圓 面 積

設一圓形圓心在坐標原點（0,0），半徑為 R

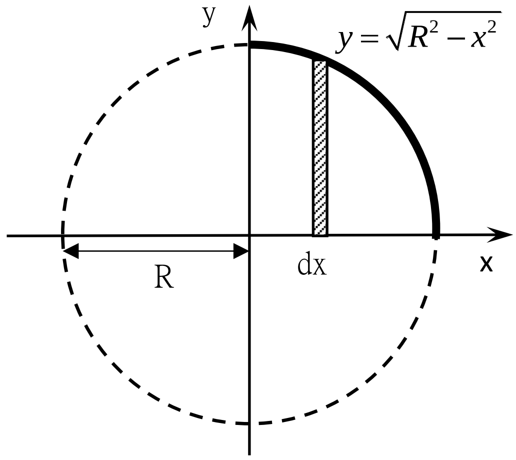
C: $x^2+y^2=R^2$

可寫為 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

圓面積 $A=\int_{-R}^{R}\pm\sqrt{R^2-x^2}dx$

因為對稱，所以只須計算第一象限內面積，再乘 4 倍即可

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx$$



- 變數變換：利用變數變換，改變積分函數的形式，積分過程較好做
  但須將原本積分範圍，對新的變數作更改

令 $x=R\cos\theta$，則

$dx=-R\sin\theta d\theta$，

$$\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\theta}=R\sqrt{1-\cos^2\theta}=R\sin\theta$$

當 $\begin{cases} x=R \Rightarrow R\cos\theta=R \Rightarrow \theta=0 \\ x=0 \quad R\cos\theta=0 \quad\ \ \theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}R\sin\theta\left(-R\sin\theta d\theta\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-R^2\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\sin^2\theta d\theta$$

利用倍角公式

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=R^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta d\theta\right]=R^2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=R^2\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\left(\sin2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=R^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}\left(\sin\pi-\sin0\right)\right]=R^2\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A=\pi R^2$$

變數變換之證明：

若函數 g'在[a,b]中為連續，且 f 在 g 值域中為連續，取$u = g\left(x\right)$

$\int_{g(\mathrm{a})}^{g(\mathrm{b})} f\left(u\right)du = F\left[g(\mathrm{b})\right] - F\left[g(\mathrm{a})\right]$ 又

$\int_{a}^{b} f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx = F\left[g(x)\right]_{a}^{b} = F\left[g(\mathrm{b})\right] - F\left[g(\mathrm{a})\right]$

故$\int_{a}^{b} f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx = \int_{g(\mathrm{a})}^{g(\mathrm{b})} f\left(u\right)du$