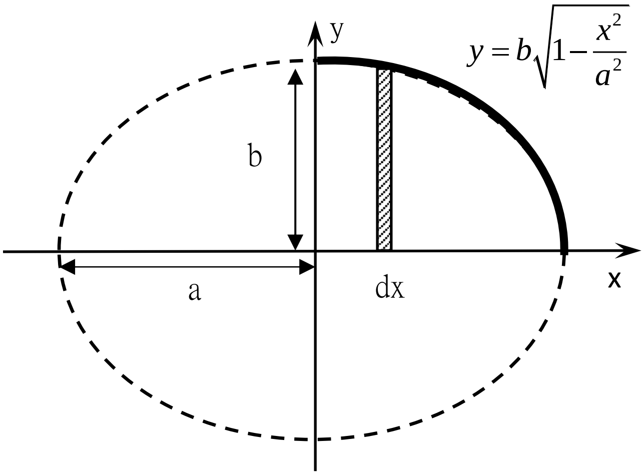
# 橢 圓 面 積

設一橢圓中心在坐標原點（0,0），半長軸為 a，半短軸為 b

E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$




可寫為 $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

橢圓面積 $A=\int_{-a}^{a}\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$

因為對稱，所以只須計算第一象限內面積，再乘 4 倍即可

$\Rightarrow \frac{A}{4}=\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$

變數變換：

令 $x=a\cos\theta$，則

$dx=-a\sin\theta d\theta$，

$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta$

$$\begin{cases}x=a\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a\cos\theta=a\\a\cos\theta=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\theta=0\\\theta=\frac{\pi}{2}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{b}\sin\theta\left(-a\sin\theta d\theta\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-ab\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ab\sin^2\theta d\theta$$

利用倍角公式

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=ab\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta\right]=ab\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{4}=ab\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\left(\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}\left(\sin\pi-\sin 0\right)\right]=ab\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A=\pi ab$$