# 高二 物理 (下學期)

## 上課講義

第 6 章　動量

第 7 章　萬有引力定律

第 8 章　功與能

第 9 章　碰撞

班級________________

座號________________

姓名________________

蔡豐光編授

105.3-

第 6 章 動量　　6-1　動量及衝量

**一、動量 $\vec{P}$**：（*momentum*）**(運動的量) 物體質量 $m$ 和速度 $v$ 的乘積**，為向量。

（1）公式：$\boxed{\vec{P}=m\vec{v}}$　　單位：$\boxed{kg\cdot m/s}$

（2）動量的方向和速度的方向相同。

（3）① 動量 $\vec{P}$ 乃指質點"某時刻"的動量，而非某段時間的動量。

② 動量變化量 $\Delta\vec{P}$："某段時間"動量變化量　$\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\Delta\vec{v}$

三、**衡量 $\vec{J}$**：（*impulse*）**以定力 $\vec{F}$ 作用於物體上，經歷一段時間△$t$，則 $\vec{F}$ 和△$t$ 的乘積**，即為定力 $\vec{F}$ 對物體的衝量，為向量。

（1）公式：$\boxed{\vec{J}=\vec{F}\times\Delta t}$　　單位：$\boxed{N\cdot s}$

（2）性質 ：

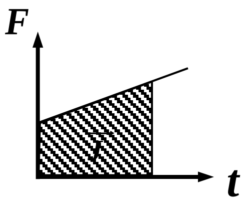
① 衝量－動量定律：　物體受合力的衝量＝動量改變量　$\boxed{\overrightarrow{J_{合力}}=\Delta\vec{P}}$。

[說明]　$\overrightarrow{F_{合力}}=\dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\Rightarrow\overrightarrow{J_{合力}}=\overrightarrow{F_{合力}}\times\Delta t=\Delta\vec{P}$

[討論]　$\overrightarrow{J_{合力}}=\vec{J}_1+\vec{J}_2+...=\vec{F}_1\times\Delta t+\vec{F}_1\times\Delta t+...=\Delta\vec{P}$

② 不同時作用的 $\vec{F}$ 不能相加；但不同時作用的 $\vec{J}$ 可以相加。

③ 力的方向在一直線上，在 $F-t$ 關係圖中曲線下的面積代表衝量（或動量變化量）。




（3）衝量的方向和合力、動量變化量、加速度、速度變化量 的方向相同。

二、牛頓第二運動定律：(牛頓原著)

物體單位時間動量變化量(動量的時變率)等於作用於物體上的外力和 (合力)。

（1）公式： $\boxed{\overrightarrow{F_{合力}}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$

平均力（平均衝力） $\vec{F}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

瞬時力（瞬時衝力） $\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$

（2）合力的方向和動量變化量、速度變化量、加速度的方向相同。

【應用】

① 若作用在物體的時間 $\Delta t$ 固定，則施加的作用力 $F$ 愈大，就會產生愈大的動量變化。[例如]：打棒球時，球員愈用力揮棒，球的動量或速度改變得就愈大。

② 當物體受力，產生相同的動量變化時，若作用時間愈短，所受的平均作用力會愈大； 反之，作用時間愈長，所受的平均作用力會愈小。

[例如]: 用棒球手套接住一顆飛來的棒球，接球前與球靜止後，球的速度變化是固定的，也就是說接球時動量變化是固定的，若將接球的時間延長，就可減少手所受到的衝擊力。同理，汽車的安全帶或安全氣囊也是延長力的作用時間，以減少對人所造成的撞擊傷害。

（3）若質量不隨時間改變 $\boxed{\vec{F}=\dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\dfrac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\vec{a}}$

[注意]

**(1)定力 $\vec{F}$ 的衝量 $\vec{J}=\vec{F}\Delta t$**

**(2)合力的衝量 (總衝量) $\overrightarrow{J_{合力}}=$ 物體的動量變化 $\Delta\vec{P}=\vec{P_2}-\vec{P_1}=\begin{cases} m\Delta\vec{v} \\ \overrightarrow{F_{合力}}\Delta t \end{cases}$**

物體 $\begin{cases} 具動量(\vec{P}) \longrightarrow 物體在動 \\ 受衝量(\vec{J}) \longrightarrow 物體運動狀態在改變 \end{cases}$

範例一 基本概念題：

*1.*下列有關「動量」與「衝量」的敘述，何者正確？　(A)物體動量的時變率等於物體所受之衝量　(B)物體動量的時變率等於物體所受之外力　(C)物體所受的衝量方向與物體的加速度同向　(D)物體的動量變化方向與速度同向　(E)施力體所受之衝量與受力體相等　。BC

*2.*物體之動量變化之方向，與下列何者相同？

(A)受力的方向　(B)速度變化的方向　(C)加速度之方向　(D)速度之方向

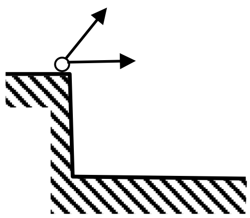
(E)位移的方向。ABC

*3.*動量相同之兩物受到相同之衝量，則：

(A)末速度必相等　(B)末動量必相等　(C)動量改變必相等

(D)速度之改變量必相等　(E)加速度必相等。BC

*4.*如圖，將質量相同之兩石子 A 、B 同時以相同之速度 A 作水平及 B 作斜向上拋射，若不計空氣阻力，則兩石子自出發至著地敘述正確的為？



(A)自出發至著地動量變化相同

(B)自出發至著地重力給予石子之衝量相同

(C)落地瞬間之動量大小相同

(D)落地瞬間之動量相同。*C*

*5.*兩物在光滑水平面上互相碰撞而分開，則下列敘述何者正確？ (A)兩物動量變化相同 (B)碰撞期間，兩物受平均力相同 (C)碰撞期間，兩物之平均加速度量值相同 (D)碰撞前後，兩物的動量和相同 (E)碰撞後，兩物速度相同。*D*

**範例二**

*1.* 質量為 $m$ 之某質點作等速圓周運動，若已知圓周運動的半徑為 $R$，週期為 $T$，則該質點旋轉 $\frac{1}{4}$ 圓周時，其(1)動量變化之大小為何？(2)平均作用力大小為何？

*2.*質量 $m$ 之靜止物體受力 $F$ 和時間 $t$ 的關係為 $F = ct$，$c$ 為常數，則在 $t$ 時刻：

（A）0→t 受衝量大小為？　　（B）此時速度大小為？

（C）此時加速度大小為？　　（D）全程平均加速度大小為？

*3.*質量 *5* 公斤之質點以 *12 m/s* 之速度向南運動受外力 $F$ 作用，$F$ 對時間 $t$ 之關係圖如右，若 $F$ 之方向為東偏北 37°，則 *4* 秒後該質點之速度量值為？方向為？

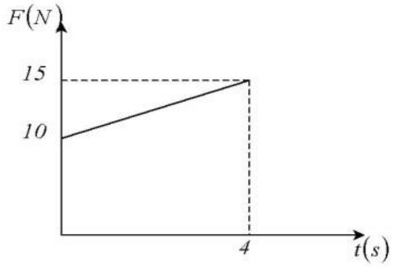
***Ans:1. (1)*** $\frac{2\sqrt{2}\pi mR}{T}$ ***(2)*** $\frac{8\sqrt{2}\pi mR}{T^2}$ ***2.*（A）** $\frac{ct^2}{2}$ **（B）** $\frac{ct^2}{2m}$ **（C）** $\frac{ct}{m}$ **（D）** $\frac{ct}{2m}$

***3.10m/s 向東偏南 37°***

1.

2.

3.



## 範例三

1.在撞擊測試裡，質量 2000 *kg* 的汽車撞擊牆壁，如圖所示。若初始速度 $v_1$＝15*m/s*（向左），撞後的速度 $v_2$＝2.0*m/s*（向右）， 碰撞時間為 0.01 *s*，求：

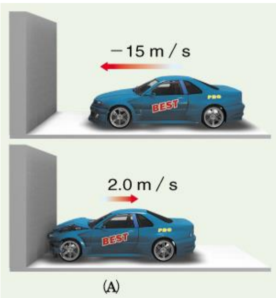
(1) 汽車的初始動量？　　(2) 汽車的撞後動量？

(3) 碰撞期間牆給汽車的衝量？　　(4) 碰撞期間牆給汽車的平均作用力？

2.一機槍每秒發射 *n* 發子彈，已知子彈的質量為 *m*、射出槍口速度為 *v*。則機槍所受的平均後座力為何？

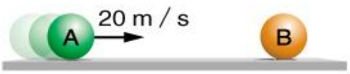
3. A 球質量 2 kg，以 20 *m*/s 的速度、方向向右，和 靜止的 B 球碰撞，B 球施以 A 球的衝量為 30 *kg*．*m/s*，方向向左。若 B 球質量為 3 *kg*，則 A、B 球碰撞後的速度各為？*Ans:1.（1）$3.0\times10^4$（kg．m/s）向左（2）$4.0\times10^3$（kg．m/s）向右（3）3.4× 104（kg．m/s），向右（4）$3.4\times10^6$（N），向右　2. nmv　3. A:5m/s 向右　B:10m/s 向右*

1.




2.

3.



### 範例四

1.鋼球的質量為 5 kg，在光滑水準桌面上以 10 m／s 之速　率、與牆壁夾 53° 角之方向撞擊牆壁，再以相同的速率及角度反彈，若鋼球與牆壁之接觸時間為 0.05 s，則：

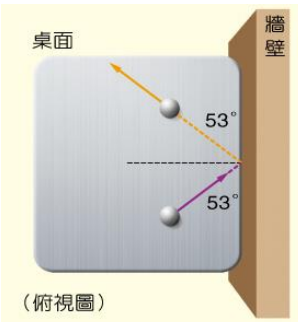
(1) 鋼球與牆壁碰撞前、後的動量變化為何？

(2) 牆作用於鋼球的平均作用力為何？

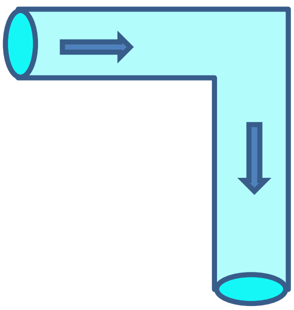
2.平面上一粗細均勻之直角彎曲水管，內有水流持續流動，流量為每秒 3 kg，流速為 4 m/s，則如圖所示，在直角轉彎處，水管施於水之作用力為何？

Ans: 1.(1) 80（kg．m／s），方向向左 (2) 1600（N），方向向左　2. $12\sqrt{2}$ N ↙

1.




2.



範例五 **衝量動量**

*1.*已知重力加速度 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$，該生見離地板高度 *20 m* 處一質量為 *2 kg* 的物體自由落下，該生見物著地板後反彈至離地板 *5m* 高度，設物與地板接觸時間為 *0.1* 秒，則
(1) 物體自落下到著地前所受衝量？ (2) 物體著地期間所受衝量？
(3) 物體在接觸地板期間所受的平均作用力（合力）為若干牛頓？
(4) 物體在接觸地板期間地板施予物的平均作用力為若干牛頓？

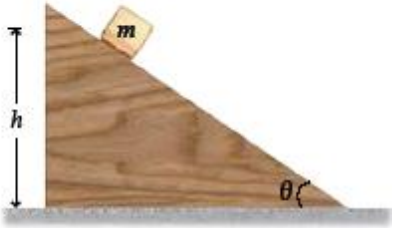
**2.**.質量為 $m$ 的木塊在光滑斜面頂端由靜止開始下滑，斜面的仰角為 $\theta$，且斜面的高度為 $h$，重力加速度g，如圖所示。在木塊滑到斜面底部的整個過程中：
（*a*）木塊獲得的衝量為若干？
（*b*）重力對木塊所施的衝量為若干？
（*c*）斜面的正向力對木塊所施的衝量為若干？

***Ans: 1.*** (1) 40kg · m/s 向下(2) 30kg · m/s 向上 (3) 300 牛頓向上(4) 320 牛頓向上

*2.* (a) $m\sqrt{2gh}$ 沿斜面向下 (b) $m\sqrt{2gh}\,\csc\theta$鉛直向下 (c)$m\sqrt{2gh}\,\cot\theta$垂直斜面向上

***1.***

***2.***



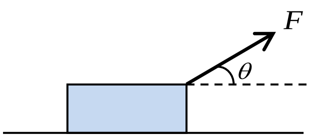
範例六

1.一線性運動的動量與時間關係為 $P = 4t^2 - 2t + 2$（$M.K.S.$制），試求：
（1）第 2 秒之瞬時衝力大小為？
（2）前 2 秒內之平均衝力大小為？
2.質量 $m$ 的物體放在粗糙水平地面上，用一個與水平方向成 $\theta$ 角斜向上的力 $F$ 拉物體沿水平地面運動，力的作用時間為 $t$，過程中物體與地面摩擦力固定為 $f$，則 (A) 拉力 F 與此物體的衝量量值？(B) 物體的動量變化量值？
3.質量 $m$ 的球作簡諧運動，振幅 R，週期 $T$，試求當其自平衡點經過 $\frac{1}{2}$ 週期時間，球所受平均力量值？

***Ans:1.（1）14N（2）6N　2. (A) Ft　(B) Ftcosθ-ft　3.*** $\frac{8m\pi R}{T^2}$

**1.**

**2.**




**3.**

**6-2 質心運動**

**一、質點系統：**由兩個以上質點組成的系統。

（實際上物體均為有形狀有大小的，為許多質點的組成，連續分布的質點系統）

**二、質心(*C.M.*)：**某點的運動可以代表整個系統的運動，稱為**質量中心**（**質心**）

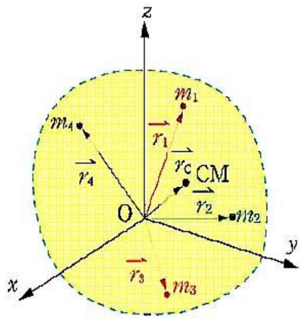
**三、質心的運動：**

（1）質心的質量（**＝系統的總質量**）：$\boxed{M = m_1 + m_2 + \ldots = \sum_i m_i}$

質心的位置：$\vec{r_C} = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$

$$\boxed{x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} \qquad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}}$$

質心的速度：$\boxed{\vec{v_C} = \dfrac{\Delta\vec{r_C}}{\Delta t} = \dfrac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + m_3\vec{v_3} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}}$




質心加速度：$\boxed{\vec{a_C} = \dfrac{\Delta\vec{v_C}}{\Delta t} = \dfrac{m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} + m_3\vec{a_3} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}}$

（2）**質心的動量＝系統的總動量**

（**＝系統內各質點的動量和**）：$\boxed{\vec{P_C} = M\vec{v_C} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + m_3\vec{v_3} + \cdots}$

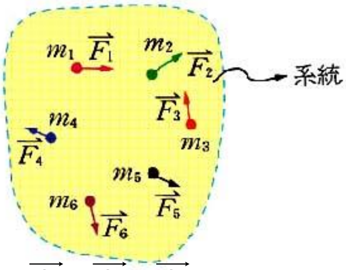
（3）**質心所受的合力＝系統所有質點所受的外力和：**

$$\boxed{\vec{F_C} = M\vec{a_C} = m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} + m_3\vec{a_3} + \cdots = \sum \vec{F_{外力}}}$$

（4）**多質點系統的牛頓第二運動定律：**$\boxed{\sum \vec{F_{外力}} = M\vec{a_C} = M\dfrac{\Delta\vec{v_C}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{P_C}}{\Delta t}}$

**【結論】：系統質心的運動只與系統所受外力有關與系統質點間的內力無關。**

【證明】設含有 i 個質點，各質點受力的情況為




$$m_1\vec{a_1}=\vec{F_1}+\vec{f_{21}}+\vec{f_{31}}+\cdots$$
$$m_2\vec{a_2}=\vec{F_2}+\vec{f_{12}}+\vec{f_{32}}+\cdots$$
$$\vdots$$
$$m_i\vec{a_i}=\vec{F_i}+\vec{f_{1i}}+\vec{f_{2i}}+\cdots$$

相加得$m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}+\cdots+m_i\vec{a_i}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots+\vec{F_i}+(\vec{f_{21}}+\vec{f_{12}}+\vec{f_{31}}+\vec{f_{13}}+\cdots)$

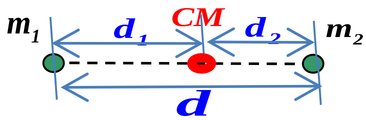
依牛頓第三運動定律:$\vec{f_{21}}=-\vec{f_{12}},\vec{f_{31}}=-\vec{f_{13}},\cdots$

質點系統的內力必成對產生,大小相等,方向相反

系統總內力和$=\vec{f_{21}}+\vec{f_{12}}+\vec{f_{31}}+\vec{f_{13}}+\cdots=0\rightarrow m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}+\cdots m_i\vec{a_i}=\vec{F_1}+\vec{F_2}\cdots+\vec{F_i}$

$\rightarrow\vec{F_C}=M\vec{a_C}=\sum_i\vec{F_{外力}}$

## 四、討論：




（1） 在均勻重力場中物體的質心與重心位置相同。

（2） 兩個質點質量 $m_1$、$m_2$，其質心與兩質點距離比 $\boxed{d_1:d_2=m_2:m_1}$

① 質心的位置到兩物距離和兩物重量成 反 比，

② 質心與兩質點連成一直線。（三點共線）

（3）當系統受外力和不為零時，則質心會產生加速度，其加速度的方向和外力和的方向相同，猶如外力直接作用於質心上，此時系統的總動量改變。

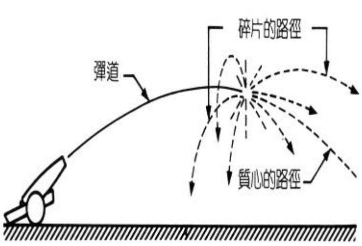
質心的運動軌跡由 外力和 控制，和 內力 無關。

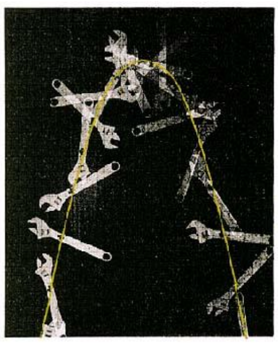
## 五、質心運動的例子：

（1）一飛行的砲彈，若在空中爆成許多碎片，這些碎片的運動甚為複雜；但在碎片著地前其質心仍似砲彈未爆一樣，以拋物線軌跡繼續行進（有碎片著地後質心所受外力變小，加速度變小）。

（2）跳水表演者無論如何翻滾，其質心運動的軌跡為一拋物線。

（3）將一板手條向空中拋出後，其質心運動的軌跡為一拋物線。



範例一

**1.**有 A、B 兩質點，質量為 1 kg 的 A 向東運動，速度為 10 m/s；質量為 2 kg 的 B 向北運動，速度為 5 m/s，則該質點系統的質心速度的量值為多少 m/s？

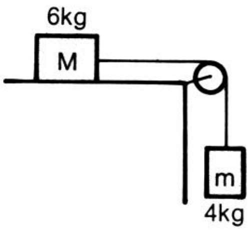
*2.*不計一切阻力及繩子質量，$g=10m/s^2$，*M* 為 *6 kg*，*m* 為 *4 kg*，系統由靜止開始，經 *0.5* 秒後（設 M 未碰及滑輪），試求系統之：

（A）質心加速度大小為？　　（B）質心速度大小為？

（C）總動量大小為？　　（D）所受外力和大小？

***Ans:1,*** $\frac{10}{3}\sqrt{2}$　　**2.**（***A***）$\frac{4}{5}\sqrt{13}m/s^2$（***B***）$\frac{2\sqrt{13}}{5}m/s$（***C***）$4\sqrt{13}kg\cdot m/s$（***D***）$8\sqrt{13}N$

2.



範例二

**1.**一炸彈自 *600* 公尺之高空自由下落，於中途爆裂成兩個等重的破片，在垂直線上分上、下散開。如空間的阻力可以不計，炸彈下落後 *10* 秒時有一破片擊中地面，則此時另一破片距地面之高度為何？（$g=10\ m/s^2$）

**2.**一砲彈以 *37°* 仰角拋出，在途中爆炸為 *4：1* 之兩碎片。大碎片落地時距出發點 *600 m*，此時小碎片之位置在水平距離 *800 m*，高度 *800 m* 處，試問：($g=10\ m/s^2$)

(1)這個時刻為發射後多久？

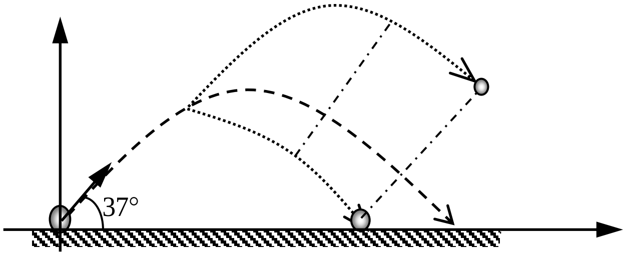
(2)砲彈的初速度量值為？

**3.**一砲彈以 *100 m/s*、仰角 *37°* 的初速從地面發射（不計空氣阻力）。在最高點爆炸成兩碎片，質量比為 *3：1*。兩碎片同時落地，且兩碎片的落地處和原砲彈的發射點在同一直線上，其中較大碎片落地處之位置距發射點 *600 m*，求小碎片落地處距發射點多遠？（$g=10\ m/s^2$）

***Ans:1.200m　2.(1) 8 秒 (2)100m/s　3. 2040m***

*1.*

*2.*




*3.*

## 6-3 動量守恆定律

### 一、動量守恆定律：

*1.*定義：系統不受外力（或外力和為零）時，系統的總動量為定值。

*2.*公式：$$\boxed{\underbrace{m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+...}_{\text{原來總動量}}=\underbrace{m_1\overrightarrow{v_1'}+m_2\overrightarrow{v_2'}+...}_{\text{後來總動量}}}$$

*3.*說明：

由多質點的牛二：$\sum\overrightarrow{F_{外}}=\dfrac{\Delta\overrightarrow{P_C}}{\Delta t}\rightarrow\Delta\overrightarrow{P_C}=\sum\overrightarrow{F_{外}}\times\Delta t$

當$\sum\overrightarrow{F_{外}}$=0 或$\Delta t$=0, 則$\Delta\overrightarrow{P_C}$=0，

此時$(1)\overrightarrow{P_C}=M\overrightarrow{v_C}=$定值 $(2)\overrightarrow{v_C}=$定值 $(3)\overrightarrow{a_C}=0$

系統質心只能是靜止或等速度運動

*4.*討論：

（1）動量守恆定律為牛頓第三運動定律的必然結果。

（2）動量守恆定律使用時機：

① 外力和=0

② 雖然外力和≠0，但歷時極短。例如：爆炸前後瞬間、碰撞前後瞬間…

（3）動量守恆的運動獨立性：當系統在某方向外力和=0，則該方向動量守恆，不受垂直方向外力和不為零的影響 。

（例如：拋體運動水平方向動量守恆，但鉛直方向則否）。

### 三、不受外力（或外力和為零）下的質心運動：

由多質點的牛二：$\sum\overrightarrow{F_{外}}=\dfrac{\Delta\overrightarrow{P_C}}{\Delta t}$

當$\sum\overrightarrow{F_{外}}$=0 $\overrightarrow{a_C}$=0 系統質心只能是靜止或等速度運動

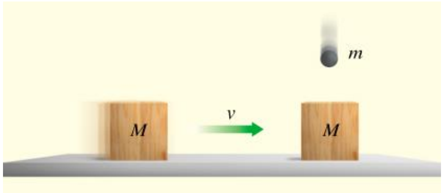
（1）質心靜止：$\overrightarrow{v_C}=0$，則$\Delta\overrightarrow{x_C}=0\rightarrow\boxed{m_1\Delta\overrightarrow{x_1}+m_2\Delta\overrightarrow{x_2}+...=0}$

（2）質心等速：$\Delta\overrightarrow{x_C}=\overrightarrow{v_C}\times\Delta t$

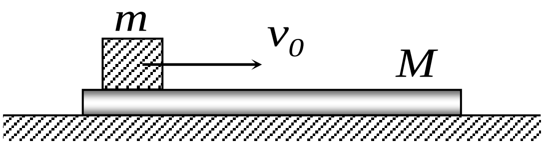
範例一

| |
|---|
| *1.*一質量 $M$的小車，以 $v$的速度在光滑水平面上運動。一塊質量為 $m$ 的磚垂直的落在車上，則：(1)小車的速度大小為？<br>(2)將磚塊用繩垂直地面上拉，當磚塊離開小車後小車之速度為？<br>*2.*光滑平面上，質量 $M$的靜止木板上，有一木塊以初速 $v_0$向右衝出，如圖所示。已知木塊質量為 $m$ ，木板與木塊間的動摩擦係數為 $\mu$ ，則當木塊與木板移動的速度相同時<br>(1)木塊的末速為？(2)自木塊衝出後需要多久時間？<br>***Ans: 1.*（*1*）$\frac{mv}{M+m}$ （*2*）$\frac{mv}{M+m}$ *2.(1)* $\frac{mv_0}{M+m}$ *(2)* $\frac{M}{M+m}\frac{v_0}{\mu g}$** |

1.




**2.**



範例二

**1.**兩輛玩具車 A 與 B，中間以細繩連接，並裝有受壓縮的彈簧，同時以 0.8 *m/s* 的速度向右運動。若細繩被燒斷，彈簧將向外伸展，造成 A 車以 1.5 *m/s* 的速度向右運動、B 車以 0.25 *m/s* 的速度向左運動，若 A 車的質量為 3 *kg*，地面摩擦可以忽略，求：

(1) B 車的質量。

(2) 彈簧伸展時，兩車的質心速度。

**2.**質量 $2\times10^4$ *kg*、速率 0.5 *m/s* 向東行駛的 A 車，與質量 $3\times10^4$ *kg*、速率 0.4 *m*/s 向西行駛的 B 車迎面撞擊，假設兩車碰撞後連結在一起，地面摩擦可以忽略，求：

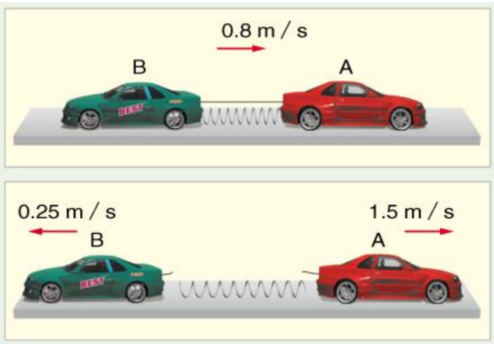
(1) A、B 兩車碰撞後的共同速度？

(2) A、B 兩車因為碰撞而獲得的衝量各為多少？

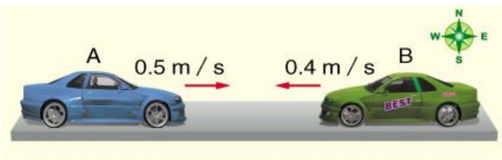
***Ans:1. (1) 2kg (2) 0.8 m/s***

***2.(1) 0.04 m/s 向西 (2) A：$1.08\times10^4$kg．m/s 向西 B：$1.08\times10^4$ kg．m/s 向東***

*1.*




*2.*



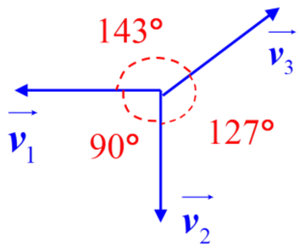
範例三

**1.** 砲彈原為靜止，若突然爆裂為三碎塊，如圖方式水平射出,已知爆裂後瞬間速率比 $\upsilon_1 : \upsilon_2 : \upsilon_3 = 2 : 1 : 5$，忽略外界摩擦阻力，此三碎塊質量 $m_1 : m_2 : m_3$ 之比為？

**2.** 一砲彈自地面以 $v_0$ 的初速仰角 60°發射，至最高點時然爆炸成質量相等的兩碎片。設 $A$ 碎片爆炸後瞬間的速率為 $2v_0$ 與未爆時同向，則 $B$ 碎片速率為？

***Ans:1.2:3:1*** **2.** $v_0$

1.




2.

**範例四**

**1.**自水平地面作斜拋運動之物體，在最高點時之動量量值恰為拋出時的 3/5；此時突然分裂為質量相等的兩塊 *A*、*B*，其中 *A* 塊以初速為零落下，則

（1）*A* 塊落地時的動量量值與原拋出時物體動量量值之比值為？

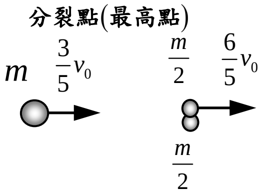
（2）若物體初速度 $v_0$，重力加速度 $g$，則兩物著地處距離多遠？

**2.**以初速 *100m/s*，仰角 53°斜拋一物體，到達最高點時爆裂為質量相等的兩塊 *A*、*B*，其中 *A* 塊以初速 *18m/s* 鉛直落下，則：(1) 兩碎片著地時相距？

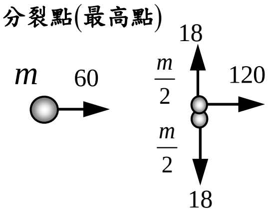
(2) 兩碎片均著地後，質心距原拋射點多遠？ （$g=10m/s^2$）

***Ans: 1. (1)*** $\frac{2}{5}$ ***（2）*** $\frac{24}{25}\frac{v_0^2}{g}$ ***2.(1)1200m (2)1080m***

**1. 最高點分裂前後瞬間：動量守恆。**




**2.最高點分裂前後瞬間：動量守恆。**



**範例五**

質量為 $5\,m$ 之臺車，靜止於光滑水平地板上，車上有 2 個質量皆為 $m$ 之人，每人以速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 水平跳離臺車，則：

(1) 2 人相繼跳下後，則臺車末速度為？

(2) 2 人同時跳下後，則臺車末速度為？

(3) 若題目改成每人以對車速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ **(相對於各人跳車前臺車)**水平跳離臺車，則 (1)(2) 結果為？

(4) 若題目改成每人以對車速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ **(相對於各人跳車後臺車)**水平跳離臺車，則 (1)(2) 結果為？

***Ans*** ***(1)*** $-\frac{2}{5}\vec{v}$ ***(2)*** $-\frac{2}{5}\vec{v}$ ***(3)*** $-\frac{11}{30}\vec{v}$ $-\frac{2}{5}\vec{v}$ ***(4)*** $-\frac{13}{42}\vec{v}$ $-\frac{2}{7}\vec{v}$

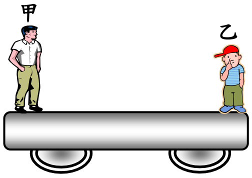
範例六

**1.**長度為 6 米，質量為 50 公斤之台車靜止在水平光滑軌道上，兩端各立質量 80 公斤與 70 公斤之甲 乙兩人，則兩人交換位置後，台車移動之距離為若干米？________

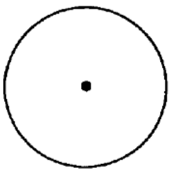
**2.**如圖所示，環半徑 $R$，質量 $m$，一物體質量亦為 $m$ 靜置於無摩擦之桌面之環心處，突然間物體爆炸成質量 2：1 之 $A$、$B$ 兩片分向左、向右撞去而黏住於環上，求最後環之位移為____________。（須說明方向）

***Ans: 1.0.3m　2.*** $\frac{R}{6}\rightarrow$

**1.【原理】台車+人系統不受外力：質心靜止（$\Delta x_C = 0$）**




**2.**



範例七

圖中，光滑桌面上置質量 M ，半徑為 R 內壁光滑的半球形碗，一小球質量 m 自碗左端點釋放，當球滾到碗底時，重力加速度 g，試問

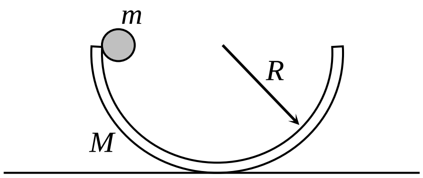
(1)碗對地的位移為________________。

(2)球對地：水平方向位移為______________；鉛直方向位移為 ______________。

(3)球與碗質心對地的位移為________________。

***Ans*：1.(1)** $\frac{m}{M+m}R\leftarrow$ **(2)** $\begin{cases}\text{水平方向 } \frac{M}{M+m}R\rightarrow \\ \text{鉛直方向 } R\downarrow\end{cases}$ **(3)** $\frac{m}{M+m}R\downarrow$

**【原理】質心水平座標靜止（** $\Delta x_C=0$ **）2.水平動量守恆（對地）**



## 6-4 角動量、角動量守恆

### 一、角動量 $\vec{L}$ ：（*angular momentum*）（向量）

（1）公式：$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}}$

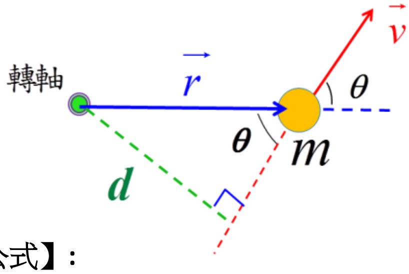
大小：$L=rP\sin\theta=rmv\sin\theta$

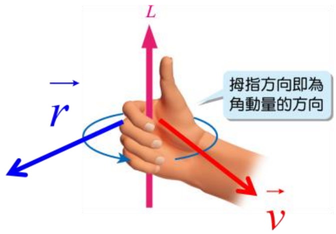
（$r$:質點與轉軸距離　$P$:質點的動量　$r\sin\theta$:速度與轉軸距離）

方向：右手螺旋定則（與 $\vec{r}$ , $\vec{P}$ 所在平面垂直）

定軸轉動常以順(逆)時針方向表示

（2）單位：$kg\cdot m^2/s$



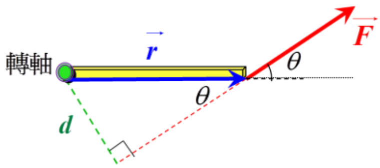

**【比較角動量與力矩的公式】：**

角動量 $L=rmv\sin\theta=mvd$

$d(=r\sin\theta)$ 為速度延長線與轉軸垂直距離

力矩 $\tau=rmg\sin\theta=mgd$

$d(=r\sin\theta)$ 為力臂（作用力延長線與轉軸垂直距離）




（3）討論：

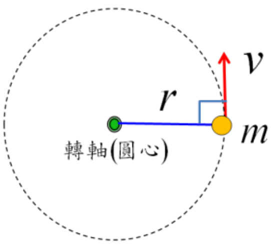
① 角動量大小和轉軸位置有關。

② 角動量 $\vec{L}$ 在轉動運動中所扮演的角色：

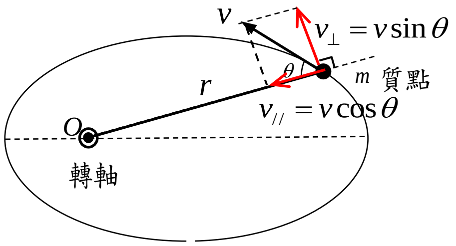
角動量 $\vec{L}$ 愈大，就愈不易改變其轉動的狀態。

與平移運動中的動量 $\vec{P}$ 相似，就像動量 $\vec{P}$ 愈大，就愈不易改變其運動的狀態。

③ 圓周運動物體<u>**對圓心**</u>的角動量大小：$\boxed{L=rmv=mr^2\omega}$。[$v=r\omega$]



[補充] 擶圓運動物體的角動量大小：$\boxed{L = rmv\sin\theta = mr^2\omega}$。[$v\sin\theta = r\omega$]




## 二、轉動的牛頓第二定律：[ 力矩 $\vec{\tau}$ 與角動量 $\vec{L}$ 的關係 ]

公式：$\boxed{\overrightarrow{\tau_{合力}} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad (\text{物體所受力矩=物體角動量時變率})}$ （對應$\boxed{\overrightarrow{F_{合力}} = \dfrac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}}$）

【說明】$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d\left(\vec{r}\times\vec{P}\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$。

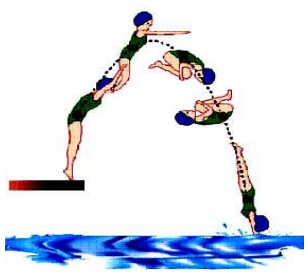
## 三、角動量守恆定律 ：(對應移動的動量守恆定律）

（1）內容：系統所受外力對轉軸所生的總力矩為零時，則系統的角動量為一定值，不隨時間而變。

（2）公式：$\boxed{L_1 = L_2 = 定值}$

[說明]：$\overrightarrow{\tau_{合力}} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$ 當$\overrightarrow{\tau_{合力}}=0$，則 $\Delta\vec{L}=0 \rightarrow \vec{L_1}=\vec{L_2}$

【角動量守恆定律應用舉例】：跳水選手、冰舞表演者、直昇機、下墜的貓……



## 範例一

1.質量為 2kg 的質點以 25m/s 之初速度，拋射仰角為 53°斜向拋出，求當達最大高度時，該 (1) 質點對拋出原點之角動量？ (2) 質點所受重力對拋出原點的力矩？（$g=10m/s^2$）

2.質量都是 $m$ 的三質點，用長度皆為 $a$ 的線段相連接，以角速度 $\omega$ 繞 O 點旋轉，如圖所示。若轉動時三個質點保持在同一直線上，求：

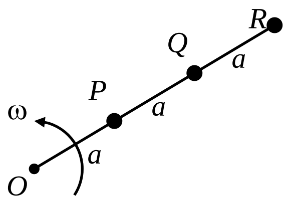
(1) 質點 Q 的角動量？ (2) 三個質點的角動量和？

3.如圖，一錐頂角 $2\theta$ 的圓錐形漏斗內面光滑，有一質量為 $m$ 的小球在內部與錐頂相距 $h$ 高處作角速度水平等速率圓周運動。設重力加速度為 $g$，試求小球對通過錐頂鉛直軸的角動量為？

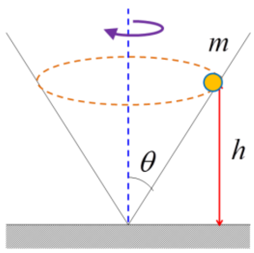
**Ans:1.(1)600 kg ‧ m²/s (2)600 N ‧ m 2.(1)4 $ma^2\omega$ (2)14 $ma^2\omega$ 3.** $mh\tan\theta\sqrt{gh}$

**1.**

**2.**




**3.**



**範例二**

*1*.如圖，以輕繩繫住的小球，繞一水平軸在一鉛垂面作順時針、半徑固定的圓周運動，O 點為其圓心。相對 O 點而言，若忽略空氣阻力，試求：

(A)小球角動量的方向？

(B) *P*、*Q*、*S* 三點，小球角動量大小順序？

(C) *P*、*Q*、*S* 三點，小球所受的重力力矩大小順序？

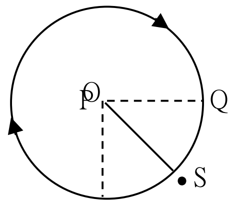
(D) *P*、*Q*、*S* 三點，小球所受的繩上張力力矩大小順序？

(E) *P*、*Q*、*S* 三點，小球角動量隨時間的改變率大小順序？

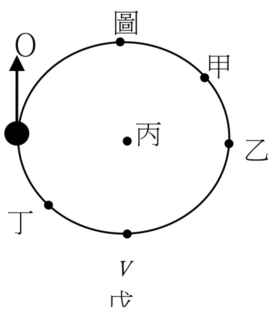
*2*.如圖，一質點以 O 為圓心在一水平面上作等速率圓周運動，其速率為 *v*，如圖所示。甲、乙、丙、丁、戊皆在圓周上，如果以丁點為參考點測量質點的角動量，則該質點(1) 角動量 (2)角動量時間變化率 的量值在圖中哪一處最大？

***Ans:1(A)垂直射入紙面(B)S>Q>P(C)P>Q>S(D)0(E) P>Q>S. 2.(1)甲(2)丙***

***1.***



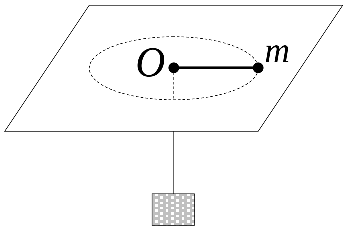

***2.***



範例三

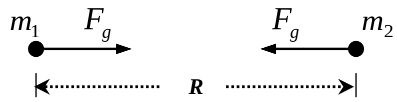
如圖所示，光滑桌面中心穿有一孔，一繩穿過此孔桌面上的一端繫有質量為 $m$ 的小球作半徑為 $R$ 而速率為 $v$ 的圓周運動，桌面下一端繫ㄧ物體，恰可平衡，則：（重力加速度 $g$）
（1）$m$ 對 $O$ 點的角動量大小為何？
（2）繩子張力大小？桌面下一端繫ㄧ物體質量為何？
（3）桌下繩的一端改用手施力緩慢下拉，使 $m$ 的圓周半徑變為 $R/3$，則此時 $m$ 對 $O$ 點的角動量大小變為多少？$m$ 的速率變為多少？繩子的張力又變為多少？

$Ans:(1)mRv\ (2)\dfrac{mv^2}{R}\quad \dfrac{mv^2}{gR}\ (3)mRv,\ 3v,\ 27m\dfrac{v^2}{R}$



## 第 7 章 萬有引力定律

### 7-1　萬有引力定律　7-2 重力場與重力加速度




**一、萬有引力定律：**<u>牛頓</u>所提出。

（1）內容：任何兩個質點之間有引力存在，引力的大小與質量乘積成正比，與兩個質點間距離的平方成反比。

（2）公式：$\boxed{F_g=\dfrac{GMm}{R^2}}$　$R$ 是兩質點間的距離

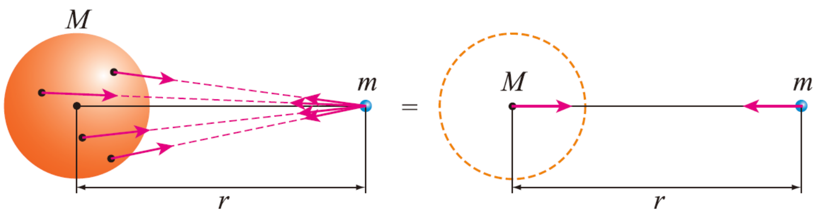
$G$ 是萬有引力常數，其值為 $6.67\times10^{-11}\ \dfrac{\boldsymbol{N\cdot m^2}}{\boldsymbol{kg^2}}$

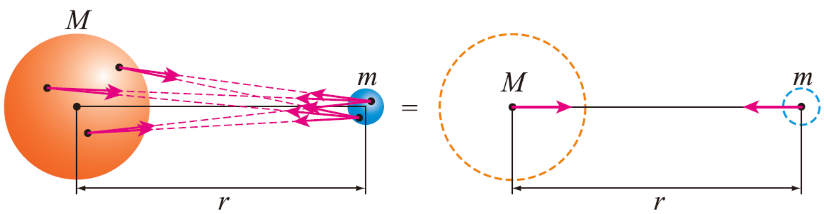
（3）討論：

① 此式只適用於<u>**兩質點**</u>。

② 若為**密度均勻球體**，對於<u>**球外**</u>物體的萬有引力，經過微積分的計算，則可<u>**將球體的質量視為集中於球心處**</u>來處理。

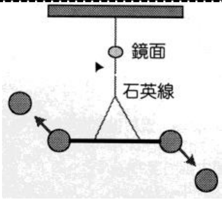
③ 若物體不是質點亦不是均勻球體，則必須將物體分成很多小質點，則以<u>**各部分質點**</u>所受萬有引力之<u>**向量和**</u>利用積分來計算。不可以用兩個物體質心間的距離當作 $R$ 來計算。




④ 在高中 $F_g=\dfrac{GMm}{R^2}$ 僅使用於兩質點或球形對稱的物體$\boxed{\begin{cases}\text{點}\leftrightarrow\text{點}\\\text{點}\leftrightarrow\text{球}\\\text{球}\leftrightarrow\text{球}\end{cases}}$。

（4）萬有引力常數測定：




① 1798 年卡文狄西 (Cavendish) 扭秤裝置實驗測得。

② 卡文迪西曾經把他自己的實驗說成「秤地球的質量」 的實驗，這是因為如果已知地球半徑以及地表的重力加速度就可以利用萬有引力定律求地球質量，計算如下：$mg=\frac{GM_E m}{R_E{}^2}\Rightarrow M_E=\frac{gR_E{}^2}{G}$ ，以地球半徑 $R_E$=6371 km 和上述 G 值，以及 $g$=9.81 m/s$^2$，可以算出地球質量 $M_E$=5.967x$10^{24}$kg。

③ 萬有引力常數 $G$ 的物理意義是：它在數值上等於兩個質量都是 1 kg 的質點相距 1 m 時的萬有引力。

## 二、重力加速度 $g$：

### 1. 重力加速度 $g$：

（1）定義 ：（$F=ma$）物體受重力（萬有引力）所產生的加速度

$\boxed{F_g = mg}$。

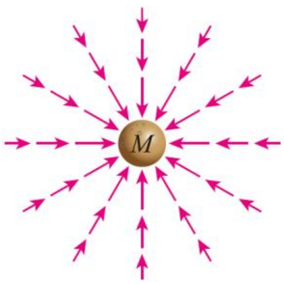
（2）公式：質量 $M$ 質點在距離 $r$ 處所產生的重力加速度

$$\boxed{F_g = mg \Rightarrow g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{R^2}}$$

（3）方向：與所受重力同向。

**2.**

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{地球表面} g_0 = \frac{GM}{R_e{}^2} \rightarrow GM = g_0 R_e{}^2 \\ \left(g_0\ \text{：地表重力加速度} = 9.8 m/s^2\ ,\ R_e\ \text{：地球半徑} = 6400 km\right)\end{array}}$$



**3.** **重力場強度：**（*gravitational field*）

（1）定義：**<u>單位質量</u>**的物體在空間中某點，所受的**<u>重力</u>**即為該點的重力場強度。

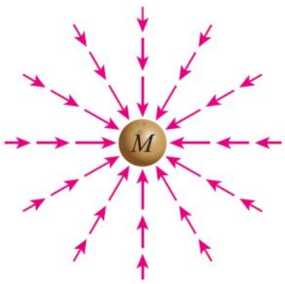
（2）公式：① 質量 $M$ 質點在距離 $r$ 處所產生的重力場 g

$$\boxed{\vec{g}=\frac{\vec{F_g}}{m}=\frac{\frac{GMm}{r^2}}{m}=\frac{GM}{r^2}}$$ ($M$ 為場源質量，$m$ 為測試質量)

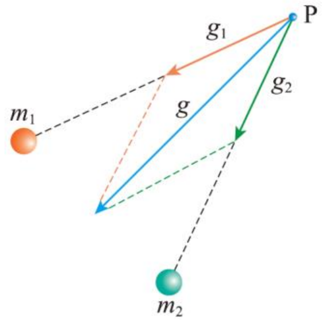
② 質量 m 的物體在重力場 g 處所受重力 $\boxed{\vec{F_g}=m\vec{g}}$

（3）方向：與所重力方向相同。

（4）**重力場的強度＝重力加速度。**




**4.** 疊加原理：設有兩個質點 $m_1$ 與 $m_2$，在空間中 P 點各自產生一個重力場 $\overline{g_1}$ 與 $\overline{g_2}$，則 P 點的重力場 $\vec{g}$ 是兩個場之向量和，如圖所示。



範例一

*1.*地球質量為月球質量之 *81* 倍，兩者連心線之長度為 $d$，設一火箭在連心線上，至地心之距離為 $a$，若二星球對火箭之引力和為零，則 $\frac{a}{d}$ ＝？

*2.*某星球其平均質量密度與地球相同，半徑則為地球之 *2* 倍，在地球上重量為 *64* 公斤重的人到該星球上時，其重量為？

*3.* 邊長為 $a$ 之正方形之四個頂點上，各置質量均為 $m$ 的四個質點，則每一個質點所受之萬有引力的量值為何？

*Ans*：*1.* $\frac{9}{10}$　*2. 128 公斤重*　*3.* $(\sqrt{2}+\frac{1}{2})\frac{Gm^2}{a^2}$

1.

2.

3.

範例二

有兩個質量均為 $M$ 的質點，位置固定在 $(0，L)$ 及 $(0，-L)$ 上，如圖所示。今在位置為 $(x，0)$ 處，放置質量為 $m$ 之質點，試求：

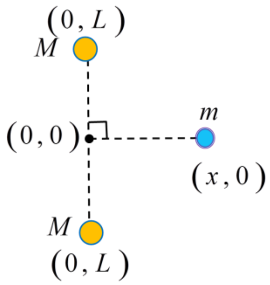
(A) 質量為 $m$ 之質點所受引力為？

(B) 若當 $x>>L$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

(C) 若當 $L>>x$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

(D) 若當 $L>>x$ 時，若只考慮兩球體對 $m$ 的萬有引力，則將質點 $m$ 由靜止釋放後，須費時多久才能回到中央處？

***Ans:*** **(A)** $\dfrac{2GMmx}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **(B)** $\dfrac{2GMmx}{L^3}$ **(C)** $\dfrac{2GMm}{x^2}$ **(D)** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{L^3}{2GM}}}$



**範例三**

*1.* 有兩個質量均為 $M$ 的質點，位置固定在 $(0，L)$ 及 $(0，-L)$ 上，如圖所示。今在位置為 $(0，x)$ 處，$x>L>0$，放置質量為 $m$ 之質點，試求：

(A) 質量為 $m$ 之質點所受引力為？

(B) 若當 $L>>x$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

(C) 若當 $x>>L$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

*2.* 有兩個質量均為 $M$ 的質點，位置固定在 $(0，L)$ 及 $(0，-L)$ 上，如圖所示。今在位置為 $(0，x)$ 處，$L>x>0$，放置質量為 $m$ 之質點，試求：

(A) 質量為 $m$ 之質點所受引力為？

(B) 若當 $x>>L$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

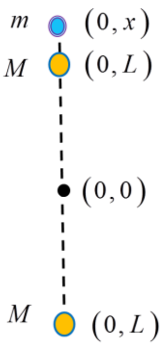
(C) 若當 $L>>x$ 時，質量為 $m$ 之質點所受的引力大小為？

(D) 若當 $L>>x$ 時，若只考慮兩球體對 $m$ 的萬有引力，則將質點 $m$ 由靜止釋放後，須費時多久才能回到中央處？

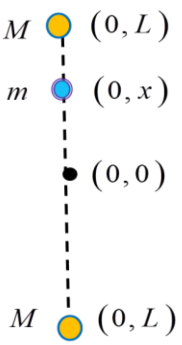
***Ans:1.*** **(A)** $\dfrac{2\left(x^2+L^2\right)GMm}{\left(x^2-L^2\right)^2}$ **(B)** $\dfrac{2GMm}{L^2}$ **(C)** $\dfrac{2GMm}{x^2}$

**2.(A)** $\dfrac{4LxGMm}{\left(x^2-L^2\right)^2}$ **(B)** $\dfrac{4GMm}{L^3}x$ **(C)** $\dfrac{4LGMm}{x^3}$ **(D)** 不會回來

1.



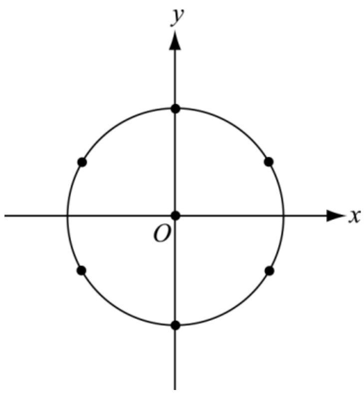

2.



**範例四**

如圖所示，在半徑為 $R$ 的圓上，每隔 $60^\circ$ 固定放置一質量為 $m$ 之質點，則在通過圓心 $O$ 的 $+Z$ 軸距圓心 $\sqrt{3}R$ 處有一質量為 $M$ 的質點，則該質點所受的萬有引力（$F_x,F_y,F_z$）為何？

***Ans:*** $(0,0,-\dfrac{3\sqrt{3}GMm}{4R^2})$



**範例五**

均勻的圓環半徑為 $R$（寬度可以不計），質量為 $M$，<u>中心軸</u>上距環心 $d$ 處有質量為 $m$ 的質點，試求：

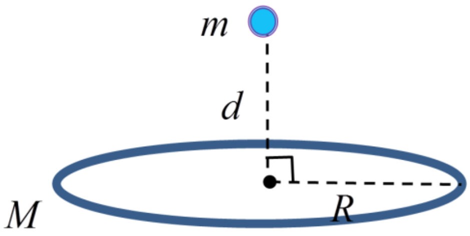
(1) $m$ 受環的萬有引力量值是多少？

(2) 若 $m$ 置於環心，則 $m$ 受環的萬有引力量值是多少？

(3) $d>>R$ 時，$m$ 受環的萬有引力量值是多少？

(4) $R>>d$ 時，將質點從靜止釋放，則質點 $m$ 會如何運動？週期為何？

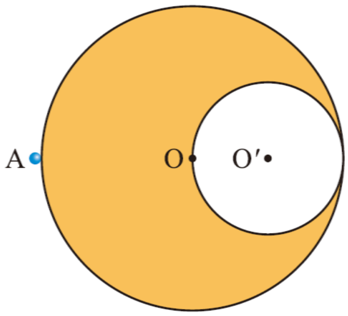
**Ans:** (1) $\dfrac{GMmd}{(R^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$ ；(2)0 ；(3) $\dfrac{GMm}{d^2}$ ；(4) SHM ；$2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$



範例六

將一質量為 $M$ 且半徑為 $R$ 的球挖去直徑為 $R$ 之內切小球（球心為 O'），如右圖所示，再將一質量為 $m$ 的質點放在 A 點時（A、O、O'位於同一直線），則質點所受的萬有引力為若干？

***Ans:*** $\frac{17}{18}\frac{GMm}{R^2}$

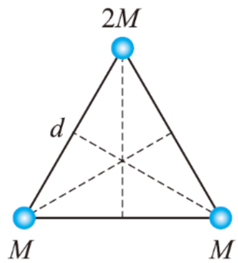


範例七

1.如圖所示，在邊長為 $d$ 的正三角形頂點分別放置質點，其質量分別為 $M$、$M$ 及 $2M$。在三角形重心的重力場強度大小為何？
2.一個密度均勻的星球分裂為 8 個密度不變，質量相等的星球。則每個星球表面的重力加速度變為原來的若干倍?
3.有一單擺在地面上的週期為 $T$，在某高處的週期為 $T'$，則某高處的離地高度與地球半徑的比值為？

Ans：1. $\dfrac{3GM}{d^2}$　2. 0.5　3. $\dfrac{T'-T}{T}$

1.




2.

3.

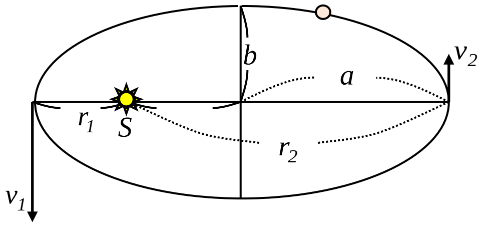
# 7-3 行星與人造衛星

## 一、行星：由萬有引力定律推導出克卜勒行星運動公式。

① 克卜勒行星第一定律(軌道定律)：太陽系的行星在以太陽為焦點的橢圓軌道上運行。

半長軸 $a$　　半短軸 $b$

近日距 $r_1$　　遠日距 $r_2$。




平均 (軌道) 半徑：$\boxed{\boldsymbol{R=\frac{r_1+r_2}{2}=a}}$ (半長軸)。

② 克卜勒行星第二定律（等面積定律）：

(1) 行星與太陽的連線，於相等時間掃過相同的面積 。

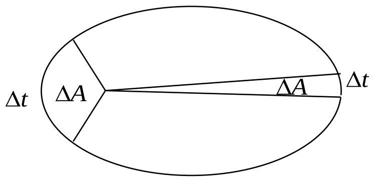
(2) 行星在軌道上運行時為變速率運動，距日越近（r 越小）運動**速率**與**角速度**越大（r 量值相同，**速率**與**角速度量值**相同），**近日點**最大、**遠日點**最小，但面積速率相同 。

(3) 利用萬有引力說明克卜勒行星運動第二定律：

[說明] ∵**行星繞太陽運行時所受萬有引力通過太陽**

∴**行星對太陽之力矩為零**→行星對太陽之**角動量守恆**

$L=mr^2\omega$ 為定值




$\frac{\Delta A}{\Delta t}=$常數

③ 克卜勒行星**第三定律（週期定律）**：

(1) 各行星繞太陽運行平均軌道半徑 $R$ 立方與週期 $T$ 平方成正比。

$$\boxed{\frac{R^3}{T^2}=K(\text{定值})}$$

(2) 此定律適用於繞同一恆星的各行星，或繞同一行星之各衛星。

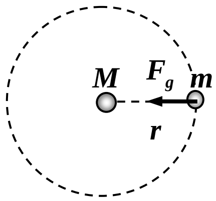
(3) 橢圓軌道 $R=a$(半長軸長) ；圓軌道 R＝圓的半徑。

(4) 利用萬有引力說明克卜勒行星運動第三定律：

[說明]

假設行星運動是圓周運動，太陽對行星的萬有引力作為圓周運動的向心力

由等速率圓周運動（$\sum F=ma_c$ ）




萬有引力＝圓周運動的向心力

：$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{4\pi^2R}{T^2}\Rightarrow\frac{R^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}=K$(對繞同一星球轉的均相同)

## 二、人造衛星：

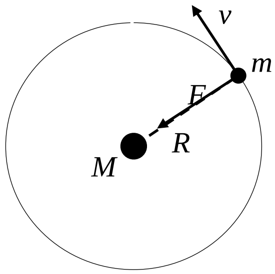
### （一）<u>圓軌道</u>人造衛星：【衛星軌道圓心為地球球心】

假設人造衛星質量為 $m$，地球質量為 $M$，人造衛星距地心為 $r$（軌道半徑），軌道速率為 $v$，週期為 $T$，則

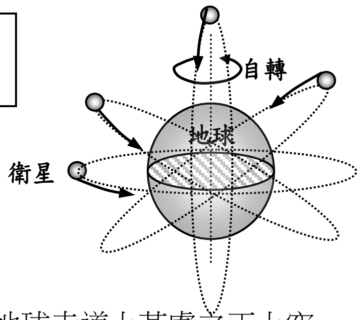
① 原理：等速率圓周運動（$\sum F = ma_c$） $\boxed{\text{萬有引力＝圓周運動的向心力}}$

② 公式：

$$\frac{GMm}{r^2}=\begin{cases} ma_n \Rightarrow \boxed{a_n=\dfrac{GM}{r^2}} \propto \dfrac{1}{r^2} \\ m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}} \\ m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}} \propto \sqrt{r^3} \end{cases}$$




註：**距地心相同距離的人造衛星，軌道面有無限多種可能，只要於符合軌道面圓心位於地球球心的條件即可。**

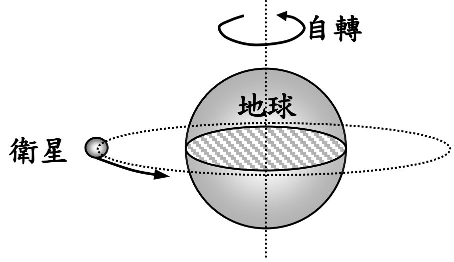



### （二）常見的衛星

（1）同步衛星 ：【三顆涵蓋全球，除南北極外】

① 週期為 24 小時（**等於地球自轉週期**），恆停留於地球赤道上某處之正上空某處。（軌道面必包含赤道面）。

② 軌道半徑：$\boxed{r=\left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{gR_e{}^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$，約為地球半徑的 *6.7* 倍，距地面高度約 *5.7* 倍地球半徑。

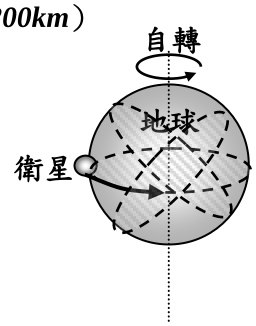



[證明]

$$\begin{cases} \dfrac{GMm}{r^2}=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2} \\ GM=g_0R_e{}^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow r=\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{g_0R_e{}^2T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{9.8\times\left(6400\times10^3\right)^2\times\left(86400\right)^2}{4\times\left(3.14\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}}=4.2\times10^7\,[\text{m}]$$

（2）地表衛星：軌道半徑約等於地球半徑。**（距地表大於 *200km*）**




① 週期： $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{{R_e}^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_e}{g}}}$，約 *84* 分鐘。

② 速率： $v$＝約 <u>*8 km/s*</u> 。

③ (向心)加速度即地表加速度 $g = 9.8\ m/s^2$。

[證明]

$$\frac{GMm}{{R_e}^2} = m\frac{4\pi^2 R_e}{T^2} \rightarrow g_0 = \frac{4\pi^2 R_e}{T^2} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g_0}} = 2\times 3.14\sqrt{\frac{6400\times 10^3}{9.8}} \approx 5075\ [s]$$

④ 若表面衛星之週期為 $T$，所環繞的行星平均密度為 $\rho$ ： $M = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi{R_e}^3$

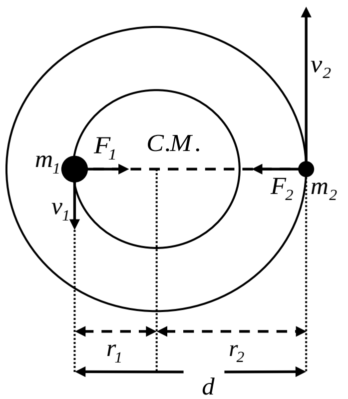
$\boxed{\rho T^2 = \dfrac{3\pi}{G} = 常數}$→可推算未知星球密度

**只適用於表面衛星，其它軌道上的衛星均不適用。**

**測量表面衛星的週期，即可測出表面衛星所繞之星球的平均密度**。

## 三、雙星運動

如圖，質量分別為 $m_1$ 及 $m_2$ 的雙星，在同一平面上互<u>繞其共同質心</u>做<u>等速率圓周運動</u>（以共同質心為圓心，共同質心靜止）。



（1） 軌道半徑 $r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} d$ ，$r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} d$ $\boxed{\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{m_2}{m_1}}$（質心）

（2） 向心力 $F_1 = \dfrac{Gm_1 m_2}{d^2} = m_1 \dfrac{{v_1}^2}{r_1} = m_1 \dfrac{4\pi^2 r_1}{{T_1}^2}$

$$F_2 = \frac{Gm_1 m_2}{d^2} = m_2 \frac{{v_2}^2}{r_2} = m_2 \frac{4\pi^2 r_2}{{T_2}^2} \qquad \boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1}}$$

（3） 加速度 $a_1 = \dfrac{Gm_2}{d^2}$ ， $a_2 = \dfrac{Gm_1}{d^2}$ $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_2}{m_1}}$

（4） 軌道速率 $v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_2 r_1}{d^2}} = m_2 \sqrt{\dfrac{G}{d(m_1 + m_2)}}$

$v_2 = \sqrt{\dfrac{Gm_1 r_2}{d^2}} = m_1 \sqrt{\dfrac{G}{d(m_1 + m_2)}}$ $\boxed{\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{m_2}{m_1}}$（動量和＝0）

（5） 動量 $p_1 = m_1 v_1$ ，$p_2 = m_2 v_2$ $\boxed{\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{1}{1}}$（動量和＝0）

（6） 週期 $\boxed{\boldsymbol{T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G(m_1 + m_2)}}}}$ $\boxed{\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{1}{1}}$（質心靜止）

<說明>

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = d \\ \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \\ r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$F_1 = \frac{Gm_1 m_2}{d^2} = \begin{cases} m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{Gm_2}{d^2} \Rightarrow a_2 = \dfrac{Gm_1}{d^2} \\ m_1 \dfrac{{v_1}^2}{r_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2)d}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\dfrac{Gm_1^2}{(m_1 + m_2)d}} \\ m_1 \dfrac{4\pi^2 r_1}{T_1^2} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G(m_1 + m_2)}} = T_2 \end{cases}$$

註 ：① 軌道半徑、速率、加速度，與質量成<u>反</u>比。

② 萬有引力大小、向心力大小、週期、動量大小，均<u>相同</u>。

③ 當 $m_1 >> m_2$，可視為 $m_2$ 繞 $m_1$ 作圓周運動（$m_1$ 為圓心，如：地球繞太陽）

④ 太陽質量約為地球的 333000 倍。

**範例一**

**1.**半徑為 $R$ 的一行星，旁有一質量為 $m$ 的小衛星繞其轉動，軌道半徑為 $r$，週期為 $T$ 萬有引力常數為 $G$，則：

(A) 此行星的質量為？ (B) 衛星的加速度為？

(C) 衛星所受行星的引力為？ (D) 行星表面的重力加速度為？

(E) 行星的密度為？ 。

2.如果萬有引力定律中兩質點間引力的大小與其距離的 $n$ 次方( $n \neq 2$ )成反比，考慮一群以圓形軌道繞行同一恆星的行星，設各行星的週期與其軌道半徑的平方成正比，則 $n$ 的值應為？

***Ans: 1.*** (A) $\dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ (B) $\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$ (C) $\dfrac{4\pi^2 rm}{T^2}$ (D) $\dfrac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2}$ (E) $\dfrac{3\pi r^3}{GT^2 R^3}$ ***2. 3***

範例二

1. 繞同一星球中心作圓周運動的二顆衛星之週期比為 *27：1*，則

（A）軌道半徑比為？　　（B）速率比為？

（C）向心加速度之大小比為？　　（D）向心力之大小的比為？

（E）掠掃之面積速率的比為？

2 .設由兩相距甚遠之恆星 $A$ 與 $B$，平均密度比為 $\rho_A:\rho_B=1:2$，質量比為 $M_A:M_B=4:1$，如果兩恆星旁各有一質量同為 m 的小行星分別以圓軌道繞 $A$ 與 $B$ 運動，假設繞行的軌道半徑相同，則：（*a*）此兩恆星之半徑比 $R_A:R_B$ 為？

（*b*）此兩恆星表面之重力加速度比 $g_A:g_B$ 為？

（*c*）兩行星之週期比為 $T_A:T_B$ 為？

***Ans:1.***（A）*9：1*（B）*1：3*（C）*1：81*（D）*未知*（E）*3：1*。

**2.（*a*）2:1（*b*）**1:1 **（*c*）**1:2

**範例三**

*1.* 地球半徑為 $R$，距地心 $r$ 處有一同步衛星；密度和地球相同之 $A$ 星球，半徑 $2R$，距其球心 $2r$ 處亦有一同步衛星，則 $A$ 星球之自轉週期為？

*2.* 某行星的半徑為地球的兩倍，密度為地球的 3 倍，則其表面運行的衛星與地球表面人造衛星 （1）週期比？ （2）速率比？ （3）向心加速度量值比？

*Ans: 1. 1 天* *2.(1)*$1:\sqrt{3}$ *(2)*$2\sqrt{3}:1$ *(3)6：1*

**範例四**

甲、乙兩星球質量分別為 m 及 5m，相距 $d$，繞其靜止不動的共同質心作等速圓周運動，如圖所示，重力常數為 $G$，則下列何者正確：

(A) 甲、乙受到的萬有引力大小比為 25:1

(B) 甲、乙相對共同質心的角動量比為 5:1

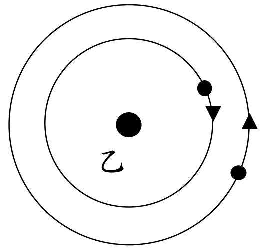
(C) 甲星球的軌道速率為 $\sqrt{\dfrac{Gm}{6d}}$

(D) 若乙的運動週期為 $T$，則 $\dfrac{d^3}{T^2}=\dfrac{Gm}{4\pi^2}$

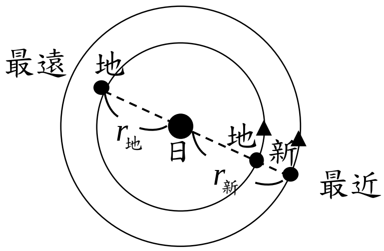
(E) 星球與共同質心的連線在單位時間內掃過的面積比為 25:1。 C

範例五

**1.如右圖所示，甲、乙兩人造衛星以圓形軌道繞地球運轉，假設運行的軌道在同一平面上，且運行的方向相反。甲衛星發現每隔 $\frac{1}{9}$ 週期會與乙衛星相遇（即甲、乙兩衛星與地球恰在一直線上且在地球同側），若忽略甲、乙兩衛星間的作用力，則甲、乙兩衛星軌道半徑之比為何？**




**2.**今在太陽系中發現一新星，公轉方向與地球相同。其連續兩次與地球相距最近時，須相隔 $\frac{8}{7}$ 年。若新行星軌道半徑較地球為大，且兩者軌道均為圓形，則此行星與地球最遠之距離為地球軌道半徑的幾倍?




***Ans:1..4：1　2.*** 5 倍

[解]

2.由題知 $\frac{\frac{8}{7}}{T_{地}}-\frac{\frac{8}{7}}{T_{新}}=1$ $\because T_{地}=1$ $\frac{8}{7}-\frac{\frac{8}{7}}{T_{新}}=1$ $\therefore T_{新}=8[年]$

由克三 $r\propto T^{\frac{2}{3}}$ $r_{新}:r_{地}=8^{\frac{2}{3}}:1=4:1$ $r_{新}=4r_{地}$

$\therefore$ 最遠距離 $=r_{新}+r_{地}=5r_{地}$

## 【補充】 萬有引力定律的應用

**一、牛頓的球殼定理：均勻密度的球殼，對殼內物體的萬有引力合力為零。**

**（1）（球殼定理）均勻薄球殼：**（半徑 $R$、質量 $M$）

① **球殼內部** ：

任何成對的兩個角錐的錐面對質點 $m$ 的萬有引力大小相等方向相反互相抵銷，而整個球殼可以看成一些成對的錐面的組合，故球殼對球殼內的質點 $m$ 的萬有引力為 $0$。

② **球殼外部** ：

假設球殼外的質點 $m$，距離球心 $r$，計算質點 $m$ 所受的萬有引力，可以將球殼所有的質量 $M$ 視為集中於球殼的球心，質點 $m$ 所受的萬有引力為 $F=\dfrac{GMm}{r^2}$ 。

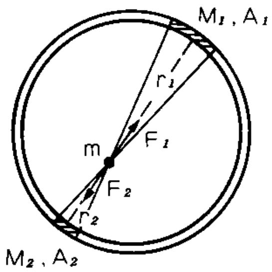
[說明]任取通過m之任一小角度對稱角錐，錐面的球殼質量各為$M_1$ $M_2$，

面積各為$A_1$ $A_2$，m距兩錐面各為$r_1$ $r_2$，

兩錐面球殼對m的引力$F_1$ $F_2$：

$$\because \frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{M_1}{M_2}\rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{\cancel{\dfrac{GM_1m}{r_1^2}}}{\cancel{\dfrac{GM_2m}{r_2^2}}}=1$$，且$F_1$ $F_2$方向相反

$\therefore F_1$ $F_2$抵銷



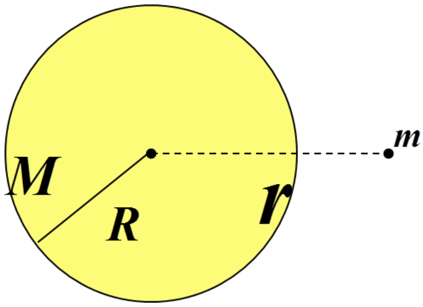
（2）（密度均勻）**實心球**（可視為許多球殼的組合）質量 $M$、半徑 $R$

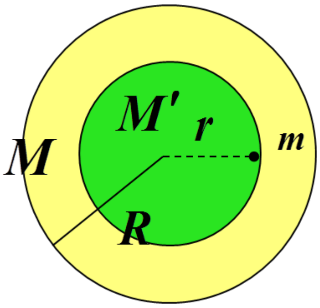
① **球外**（r≧R）：假設球外質點 $m$ 距離球心 $r$，受實體球的萬有引力為

$$\boxed{F=\frac{GMm}{r^2}}$$

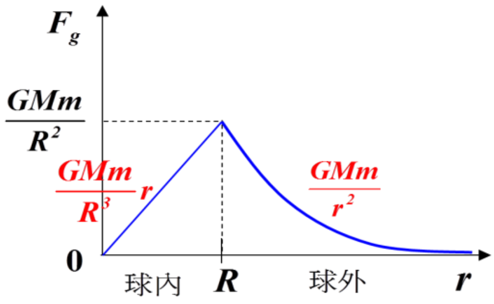
② **球內**（r≦R）：如圖，做一通過球內的質點 $m$ 的同心圓，將原來的實體球分成兩部份。一為在圓內的小實體球，與在圓外的球殼。在此圓外的球殼對質點 $m$ 的萬有引力為 0。而在圓內的小實體球（質量為 $M'=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}M=\frac{r^3}{R^3}M$ ）對質點 $m$ 的萬有引力則為

$$\boxed{F=\frac{GM'm}{r^2}=\frac{GMm}{R^3}r}$$（與距球心的距離 $r$ 成正比）




③ 萬有引力 $F_g$ 與距離球心 $r$ 的關係圖：球半徑 $R$



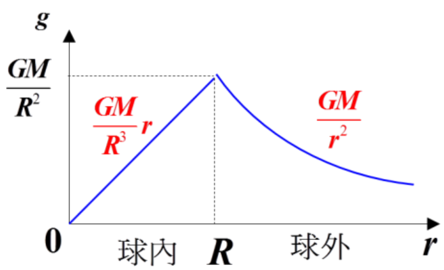
（3）重力場（重力加速度）：

① （密度均勻）實心球所建立的重力場：

球外：$\boxed{g=\frac{GM}{r^2}}$

球內：$\boxed{g=\frac{GM}{R^3}r}$

球心：$\boxed{g=0}$

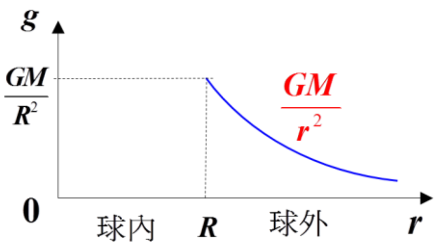



[證明]球外 $g=\frac{F}{m}=\frac{G}{r^2}\left(M\times\frac{r^3}{R^3}\right)=\frac{GM}{R^3}r$

② 空心球殼所建立的重力場：

球殼內部 $\boxed{g=0}$

球殼外部 $\boxed{g=\frac{GM}{r^2}}$




（4）通過密度均勻實心球心的直線光滑隧道物體的運動

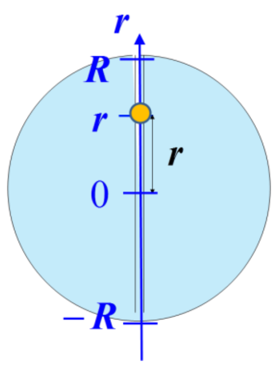
挖一條穿過球心的隧道，一物體落入隧道將做簡諧運動。

球半徑 $R$，質量 $M$

當物體距離球心 $r$ 處，萬有引力

$$F=\frac{GMm}{R^3}r \quad \text{指向地心}$$

與簡諧運動 $\vec{F}=-k\vec{r}$ 比較 $\boxed{k=\frac{GMm}{R^3}}$




週期 $\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

$T\approx 84.2$ 分鐘 似地表衛星週期。

範例一

**1.** 圖示，質量 $M$ 的薄球殼（厚度不計）中心處有一相同質量 $M$ 的小球（兩者球心位置相同）， 已知小球半徑為 $R$，在不同位置處的重力場強渡，則：

（A）球殼的外表面處重力場強渡為？

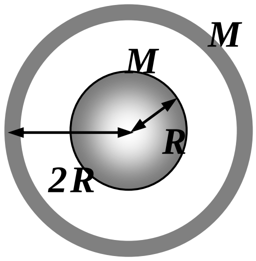
（B）球殼的內表面處重力場強渡為？

（C）小球的表面處重力場強渡為？。

**2.** 設地球為密度均勻的實心球，地球半徑$R$，離地心$\dfrac{R}{3}$處，與地球表面外離地$h$高處之重力場強度相同，則$h$為何?

***Ans:1. (A)*** $\dfrac{GM}{2R^2}$ ***(B)*** $\dfrac{GM}{4R^2}$ ***(C)*** $\dfrac{GM}{R^2}$ ***2.*** $(\sqrt{3}-1)R$

***1.***




***2.***

範例二

若地球為均質的球體，質量為 $M$，半徑為 $R$。現由北極通過地心挖一地道至南極，將一物由洞口靜止釋放。若忽略其他阻力，萬有引力常數 G，則：

($a$)當此物體距離地心 $X$ 時，所受重力大小若干？

($b$)物體來回運動的週期 $T$ 為何？

($c$)物體通過球心時的速率為何？

($d$)由端點移動 $\frac{R}{2}$ ，所需之最少時間為何？

***Ans:*** ($a$) $\frac{GMm}{R^3}X$ ($b$) $2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ ($c$) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ ($d$) $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

# 第 8 章 功與能

【前言】

(1) 物理上功與能為具有相同單位的純量，功只有一種定義（$\boldsymbol{W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}}$），但能量卻有許多不同的型式（如：動能、位能、電能、熱能、核能、化學能等…）

(2) 有能量才能作功，作功後將能量變成另一種形式，**<u>作功</u>為<u>能量轉變形式的過程</u>**。

(3) 因為功與能均為純量，所以在計算上比向量容易，因此在解決運動問題上從功與能的觀點來解運動學問題為另一種不錯的方式。

## *8-1* 功、動能與功能定理

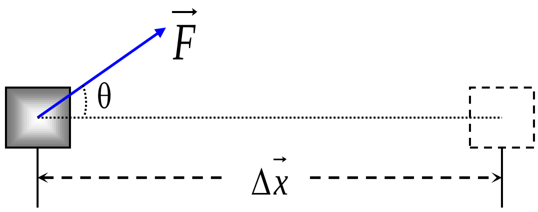
### 一、功 *W*：（work）1829 年<u>柯若利斯</u>（法國人）提出功的觀念。

（1）定義：**<u>定力對物體所作的功</u>＝<u>定力與施力期間物體位移的內積</u>。**

**（定力為<u>量值與方向均不隨時間改變的力</u>）。**

（2）公式：

$$\boxed{\boldsymbol{W=\vec{F}\times\Delta\vec{x}=F\,\Delta x\cos\theta}}$$




（3）單位：

| 力(*F*) | 位移(*d*) | 功(*W*) |
|---|---|---|
| 牛頓(N) | 公尺(m) | 焦耳(J) |

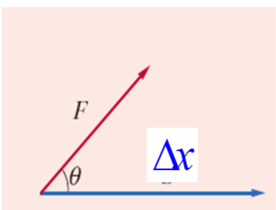
（4）性質：

功為<u>純量</u>，無方向性；但功可分為<u>正功</u>及<u>負功</u>。

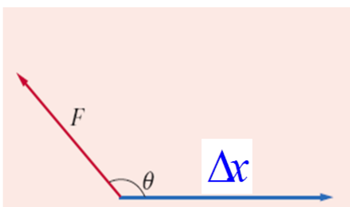
① 當 $0°\leqq\theta<90°$ → $W>0$　力對物體作<u>正功</u>，物體的能量增加

② 當 $90°<\theta\leqq180°$ → $W<0$　力對物體作<u>負功</u>，物體的能量減少

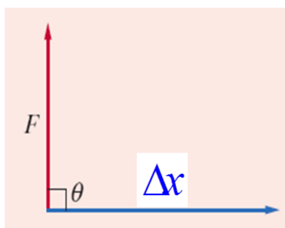
③ 當 $\theta=90°$ → $W=0$　力對物體<u>不作功（作功為零）</u>




正功




負功




不作功

【討論】

（1）功為零的狀況。

$F=0$， [例]：等速度運動的物體，合力作功為零

$\Delta x=0$， [例]：推牆壁但牆壁不動，人對牆壁不作功

$\vec{F}\perp\Delta\vec{x}$，[例]：單擺運動時，張力對擺錘不作功。

（2）多力**同時**作用在同一物體上時，

**個別力所作的功之代數和=總功=總合力所作的功。**

（3）**不同時候的力所作的功，總功=不同時候個別力作功的代數和**

**（但不等於總合力所作的功。）**。

（4）功的大小、正功或負功均與座標系的選擇**有關**。若無特別指明，則選取地面為慣性座標系。

二、功的計算：

（1）$\boxed{\text{定力作功}}$：利用功的定義　$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}$

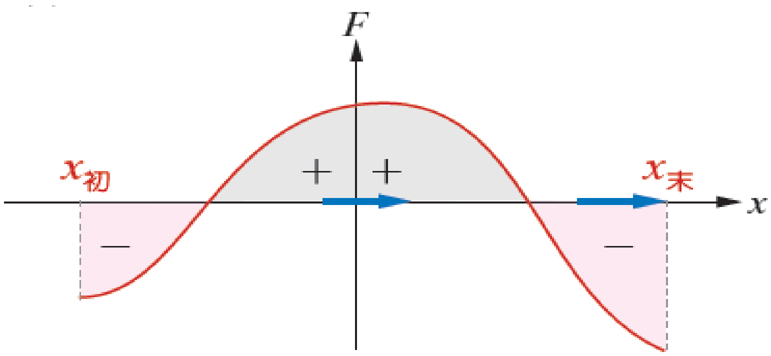
[例如] 地表附近重力作功 $\boxed{Wg=\pm mgh\quad h\text{ 為起末位置高度差}}$

（2）$\boxed{\text{變力作功}}$

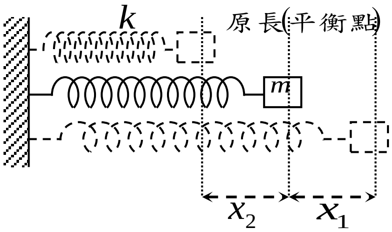
① $\boxed{\text{直線運動的變力作功}}$：若**力的方向與位移恆同在一直線上**，且作用力為位置之函數，則**作用力 $F$ 與位置 $x$ 關係圖 $F-x$ 圖中曲線下的面積即為此段位移內該力所做的功**。

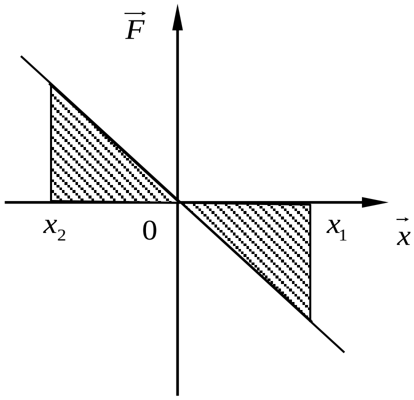
*a.*若力方向與位移方向**同**向，所夾「＋」面積代表力 F 作正功。

*b.*若力方向與位移方向**反**向，所夾「－」面積代表力 F 作負功。



[例如] 彈力所作的功




自彈簧形變量 $x_1$到形變量 $x_2$過程中

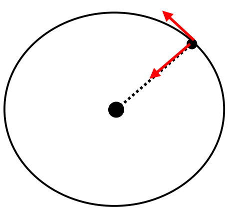
彈力作的功為$\boxed{W=\frac{1}{2}kx_1^{\,2}-\frac{1}{2}kx_2^{\,2}}$

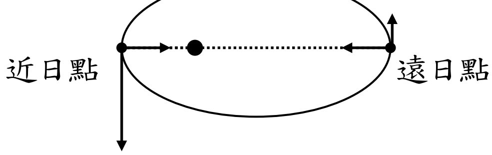
② 曲線運動的變力作功：

若外力為非一直線方向的變力時，可將位移分成許多極小區間，每一極小區間之作用力可視為定力，因此將各極小區間之功加總起來即為總功。

$$W=\sum \vec{F_i}\cdot d\vec{x_i}$$

**[例如] 地球繞太陽運行的萬有引力作功。**





## 三、動能 *K*：（*Kinetic energy*）

（1）定義：物體因運動所具有的能，為純量，與功的單位相同。

（2）公式：$\boxed{K=\frac{1}{2}mv^2}$

（3）單位：焦耳(J) 【質量：公斤（kg），速度：公尺/秒（m/s）】

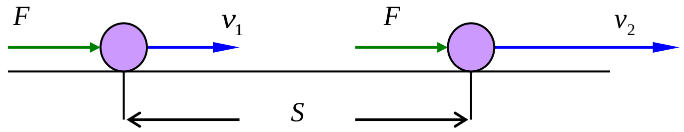
## 四、功能定理：（*work-energy theorem*）

所有的力對物體所作的總功等於物體的動能變化量 $\boxed{W_{所有力}=\Delta K}$。

[證明]

所有力對質點所作的總功 ＝ 物體動能的變化量

$$\boxed{W_{所有力}=\Delta K}$$




[說明] $a=\frac{F}{m}$ $v_2^{\ 2}=v_1^{\ 2}+2aS$ $\rightarrow$ $W=FS=\frac{1}{2}mv_2^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$，

[討論]

（1） 對物體施力，使物體獲得衝量，物體的動能不一定改變（如：等速率圓周運動）

（2） 動能與動量的關係：

① 質點的動量與動能的關係 $\boxed{p=\sqrt{2mK}}$，$\boxed{K=\frac{p^2}{2m}}$

② 質點動能為零時，動量必為零，反之亦然。質點動能改變時，動量一定改變，反之未必成立。

③ 質點系統之總動能為零，其總動量必定為零，反之未必成立。
(例如：原本靜止的炸彈爆炸後瞬間，炸彈碎片總動量和為零(因為不受外力)，但總動能卻不為零。)

範例一 $\boxed{\text{基本概念題}}$：

下列何種情形中物體所受之力對物體所作之功為正功、負功或零？

(A)斜拋運動之物體，初拋與落地高度相同，則下列狀況重力作功。$\boxed{\text{定力作功}}$

① 初拋至最高點

② 最高點至落地

③ 初拋至落地

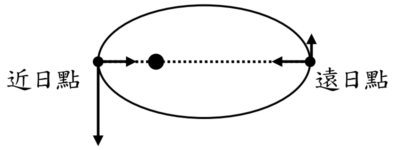
(B)地球繞太陽橢圓軌道運行，則下列狀況萬有引力作功。

$\boxed{\text{曲線運動的變力作功}}$

① 遠日點至近日點

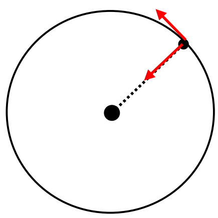
② 近日點至遠日點

③ 繞一圈回到原出發點




(C)等速率圓周運動，向心力作功。

$\boxed{\text{曲線運動的變力作功}}$

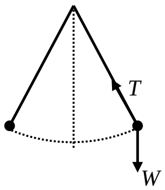


(D)單擺擺動時，自最高點到最低點，則下列狀況對擺錘作功。

$\boxed{\text{曲線運動的變力作功}}$

① 繩子張力：$\boxed{\text{曲線運動的變力作功}}$

② 重力：$\boxed{\text{定力作功}}$



(E)錐動擺擺動時，則下列狀況對擺錘作功。

① 繩子張力：曲線運動的變力作功

② 重力：定力作功

(F)連接水平彈簧物體的振動，在半個週期內，彈力對物體所作的功 。

直線運動的變力作功

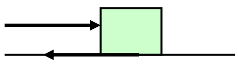
(G)在水平粗糙面上，沿一封閉圓軌道切線方向施力推物，使繞行一周，

，則下列狀況作功。

① 施力：曲線運動的變力作功

② 摩擦力：曲線運動的變力作功

③ 重力：定力作功




(H)手提皮箱，則下列狀況手對皮箱作功

① 等速度在水平路面行走

② 等加速度在水平路面向前行走

③ 等速度上樓

範例二

1.如圖所示，以 20 牛頓的推力，與水平夾 37 °角，施於質量為 4 公斤的物體。物體置於水平地面上由靜止漸漸滑動，物體與地面間動摩擦係數為 0.2，設該處的重力加速度 $g = 10$ 公尺／秒$^2$，試問在最初 2 秒內：

(1)木箱之位移為？(2)施力對物體所作功？

(3)摩擦力對物體所作功？(4)物體所獲之淨功？

2.一質量 m 的木塊自傾斜角為 ψ 的粗糙斜面上，設木塊與斜面的摩擦係數 μ，下滑 d 距離，重力加速度 g，求此過程中：

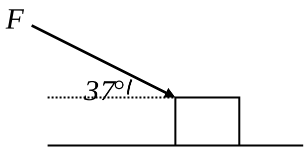
（1）重力、摩擦力、正向力對木塊所作的功各為何?

（2）外力對木塊所作總功為何?

***Ans: 1.（1）2.8m（2）44.8J（3）29.12J（4）15.68J***

***2.（1）mgdsinψ、-μmgdcosψ、0（2）mgdsinψ-μmgdcosψ***

***1.***



範例三 變力作功

1.質量為 2.0 公斤的質點沿 $x$ 軸運動，且最初靜止位置在 $x = 0$ 處，若物體受力與位置的關係為 $F = 2x + 6$，$x$ 單位為公尺，$F$ 單位為牛頓，若位移為 5.0 公尺，則此變力對物體共作了多少功？

2.若彈簧原長 20 公分，當施以 20 牛頓之力，可伸長至 25 公分，則施力於該彈簧使其由 15 公分之長度壓為 10 公分之長度，需至少對彈簧作功？

3.壓縮一彈簧 $x$ 長，需施力 $F$，作功 $W$。若再繼續壓縮 $x$ 長，則：

（A）需施力？

（B）至少施力需再作功？

Ans:1.55 焦耳　2. 1.5 J　3.（A）2$F$　（B）3$W$

1.

範例四 動能 功能定理

1.一人造衛星繞地球作半徑為 $r$ 的等速圓周運動時之動能為 $K$，則此衛星動量的時變率為？。

2.（1）質量比 5：3 的甲、乙兩物體，其動能比為 4：3。若用相同的阻力使兩物停止，則甲、乙兩物行經距離比？

（2）承上題，阻力對甲、乙兩物作用的時間比？

3.一質量為 *2.0* 公斤的物體放在水平桌面上，物體與桌面的滑動摩擦係數為 *0.25*。今以 *6.0* 牛頓的力沿水平方向推物體，使作加速度運動，當物體移動 *5.0* 公尺時，此物體的動能約增加多少焦耳？

**Ans 1.** $\frac{2K}{r}$ **2.（1）4：3 （2）** $2\sqrt{5}:3$ **3. 5**

.

範例五 功能定理

1.一物質量 $m$ 沿固定斜面以初速度 $v$ 上滑，當滑回原處時速度變為 $\frac{v}{2}$ ，上滑之最大距離為 $s$，則動摩擦力為？

2.一質量為 $m$ 之子彈，以速度 $v$ 射入一長 $\ell$ 之固定木塊，子彈恰打入 $\frac{\ell}{3}$ 的深度。若子彈與木塊間之摩擦力為定值，試問：

（1）欲使子彈能打穿木塊，其速度至少應為若干？

（2）**[挑戰]** 若木塊質量 M 可自由移動，子彈速度至少應為若干才能打穿？

***Ans: 1.*** $\frac{3mv^2}{16s}$ ***2.（1）*** $\sqrt{3}v$ ***（2）*** $\sqrt{\frac{3(m+M)}{M}}v$

**範例六** 功能定理

1.質量 *1.0* 公斤的物體由靜止受力，在水平面上運動受力 $F$ 與位置 $x$ 之關係為 $F = 3x + 6$（單位取 *SI* 制），如在 $x = 2$ 公尺時，物體的速率為 *4.0* 公尺/秒，則

（A）由 $x = 0$ 至 $x = 2$ 公尺，$F$ 所作的功為？

（B）摩擦力為？

（C）在 $x = 2$ 公尺時之加速度為？

（D）在 $x = 1$ 公尺時物體的動能為？

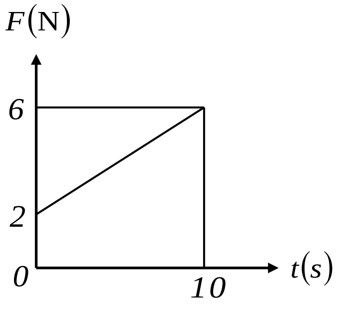
（E）由 $x = 0$ 至 $x = 2$ 公尺，物體所受總衝量為？

2.質量 *5 kg* 的物體在光滑地面上以 *6* m/s 的速度向東運動，突然受向西的力作用 *10* 秒，作用力 $F$ 對時間 $t$ 關係如右圖所示，則(1)此時物體速度為?
(2)作用力對物體所作的功為？

***Ans: 1.（A）18 焦耳（B）5 牛頓（C）7 公尺/秒²***
***（D）2.5 焦耳（E）4 牛頓–秒。 2. (1)2m/s 向西 (2)-80J***

1.

2.



## $\boxed{\textbf{8-2 功率}}$

功率 $P$：單位時間內作功的大小。

1.平均功率 $\overline{P}$ ：$\boxed{\overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}}$，單位時間（一秒鐘）內做的功。

2.瞬時功率 $P$：$\boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}}$，極短時間內的平均功率＝瞬時力與瞬時速度內積。

【證明】：$P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{W}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$ （極短時間 $\vec{F}$ 視為定力）

3.單位：**瓦特** $(W)=\dfrac{\textbf{焦耳}}{\textbf{秒}}(J/s)$

$\boxed{\text{註}}$：電費的一度：$1$ 度$=1$ 千瓦．小時 $=3.6\times 10^{6}$ 焦耳，為<u>能量</u>的單位。

$1$ 馬力＝$746$ 瓦特 （$1$ hp $=746$ W）

**範例一**

質量 $m$ 之物體自 $O$ 點起，以 $v_o$ 之初速作仰角 $53^o$ 之斜拋，到 $A$ 點時之仰角為 $37^o$，$B$ 為頂點，重力加速度 g，則（A）在 $O$ 點重力之瞬時功率為____________

（B）$OA$ 期間之動能變化量為 ___________

（C）$OA$ 所歷時間為 ________

（D）在最高點時之動能為__________

（E）$O$ 到 $A$ 為止的平均功率為______

**Ans:1.**（A）$-\dfrac{4}{5}mgv_o$ （B）$-\dfrac{7}{32}mv_o^2$ (C) $\dfrac{7v_0}{20g}$ （D）$\dfrac{9}{50}mv_o^2$ (E) $-\dfrac{5}{8}mgv_o$。

範例二

*1.*假設一船在在水中等速航行時，所受之阻力和速率成正比。試問：（1）當船速變為 2 倍時，引擎功率變為幾倍？（2）若引擎功率減為 $\frac{1}{4}$ ，船速變為幾倍？

***2.***質量為 2 *kg*之靜止物體，在光滑平面上，受一方向固定的外力作用，該力之輸出功率固定為 $P=4\ W$，則：(A)3 秒末之動能為 12*J* (B)4 秒末物體之速度值為 4*m*/*s* (C)在 4 秒內之平均功率為 4*W* (D)物體恆受定力作用 (E)4 秒末物體受力為 1*N*。

***Ans:1.（1）4（2）1/2 2.ABCE***

範例三

1.如圖所示，表示 $v-t$ 關係曲線，且物體質量為 $2\ kg$，則：

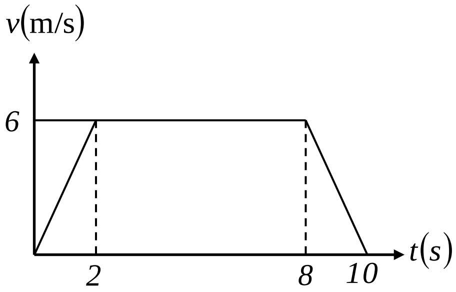
（1）物體在 *1* 秒時之瞬時功率為若干瓦特？

（2）物體在 $0\sim1$ 秒間之平均功率為多少瓦特？

**2.[挑戰]** 有一卷長鐵鏈每米質量 1.2 kg 平置於地面上，將其一端以 4 m / s 之速度拉之，則施力者之功率為？

***Ans:*** *1.（1）18（2）9* ***2.76.8*** **W**

***1.***



## $\boxed{\textit{8-3}}$ 位能

### 一、位能 *U*：（*potential energy*）

一種與物體的<u>位置（距離）或形狀（長度）</u>有關的能量，稱為<u>位能</u>。

例如：重力位能 $U_g$、彈力位能 $U_S$、電位能 $U_e$。

### 二、重力位能 $U_g$：

**1. 定義**：當物體位置改變時，**重力對物體作功＝物體重力位能的變化的負值**。

【重力作正功，則重力位能<u>減小</u>；重力作負功，則重力位能<u>增加</u>】

$$\boxed{W_g = -\Delta U_g = -\left(U_{g\,2} - U_{g\,1}\right)}$$

**2. 性質**：

①重力位能為一個**比較的值**，要知道某位置的重力位能，須先定義物體<u>重力位能的零位面</u>，再求出<u>由零位面移至某位置重力作功</u>，才能知道物體在某位置的重力位能，為<u>物體位置的函數</u>。。

②相同的位置重力位能可能因為零位面不同而有不同的值，但**兩不同位置的位能差**與零位面的選取無關為固定的值。

③位能屬於<u>系統所共有</u>，非個別質點獨自擁有。

**3. 地表附近的重力位能**：為**均勻重力場** (*g* 為定值)。

以地面為零位面時，質量 *m* 的物體，距地面高為 *h* 時，具有重力位能 $\boxed{U_g = mgh}$

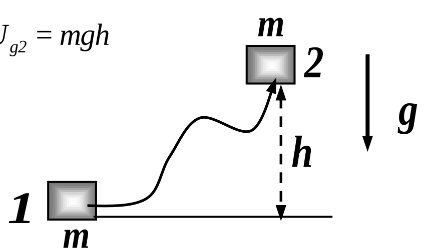
[證明]

① 此時重力作負功，即 $W_g(1\rightarrow 2) = -mgh = -\left(U_{g2} - U_{g1}\right)$。

② 任兩點間之位能差僅和<u>高度差</u>有關，而與所經的路徑無關 ，

由 1 至 2 的重力位能差 $U_{g2} - U_{g1} = mgh$ 。

③ 以 1 為重力位能零位面，則 2 重力位能 $U_{g2} = mgh$



**4.** 重力位能的一般式：非均勻重力場的重力位能（$g$ 不為定值 ）

（1） **公式：**設物體質量 m 在質量 M 的星球外部，與球心相距 r

則物體與星球所共有的重力位能 $\boxed{U_g = -\dfrac{GMm}{r}}$ (以∞處為零位面)

**[證明]**

① 定地球無窮遠處的重力位能為零 $U_g(\infty)=0$

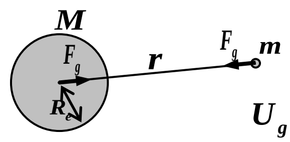
將質量為 $m$ 的物體由距地心∞處移至距地心 $r$ 處，

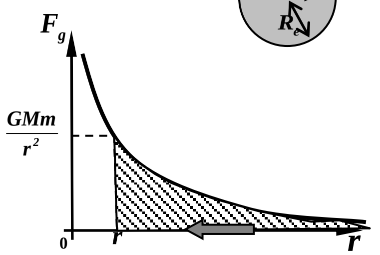
萬有引力需作功：$W_g(\infty \to r) = \dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GMm}{\infty}$

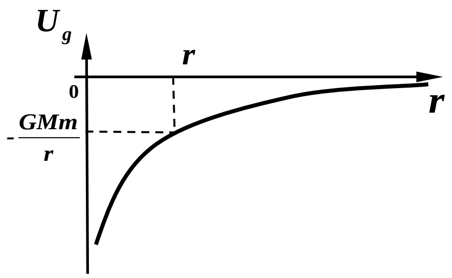
（∵非線性的變力作功∴須由積分得 $F-r$ 圖線下面積）

② 因重力對物體作功＝物體重力位能變化量的負值：$W_g(\infty \to r) = -\left(U_g(r) - U_g(\infty)\right)$

$\therefore U_g(r) = -\dfrac{GMm}{r}$




（2） 求非均勻重力場萬有引力作功：由位能定義

$$\boxed{W_g(r_1 \to r_2) = -\left[U_g(r_2) - U_g(r_1)\right] = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}}$$

（3） 性質：

① 重力位能的函數圖形：

<a> 相距 $r$ 愈大時，其重力位能愈大，相距無窮遠最大 $U_g(\infty)=0$。

<b> 其位能函數的曲線為雙曲線之一支。

② 物體在地表上空 h 處( h << Re )和在地表上的重力位能差：

$$\triangle U_g = \left(-\frac{GMm}{R_e+h}\right) - \left(-\frac{GMm}{R_e}\right) = \frac{GMmh}{R_e(R_e+h)} \approx \frac{GMmh}{R_e^{\ 2}} = mgh$$

**(4)** 多質點的重力位能＝所有<u>成對</u>質點的重力位能的代數和。

$$\boxed{U_g = \left(-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}\right) + \left(-\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}\right) + \left(-\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) + \ldots}$$

[例]：邊長為 a 的正方形頂點各置質量 m、2m、3m 及 4m 的質點，
若無窮遠為零位面，則此系統的重力位能

$$U_g = -\frac{Gm^2}{a}\left(2+8+12+3\right) - \frac{Gm^2}{\sqrt{2}a}\left(4+6\right)$$

三、**彈力位能 $U_s$ ：彈簧之彈簧力位能**。

**1. 定義**：當彈簧伸長量改變時，<u>彈力</u>對物體<u>作功</u>＝物體<u>彈力位能</u>的變化的<u>負值</u>。

【彈力作正功，則彈力位能<u>減小</u>；彈力作負功，則彈力位能<u>增加</u>】

**2.** 公式：**<u>習慣上都以彈簧原長處為彈性位能的零位面</u>**，則當彈簧伸長量 x 時的彈性

位能 $\boxed{U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2}$，恆**為正值**。

彈簧彈性位能與彈簧伸長量有關，為彈簧伸長量的函數。

[說明]

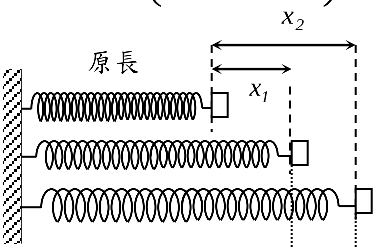
① 若物體由彈簧形變量 $x_1$ 移至形變量 $x_2$ 處，彈力對物體所作的功

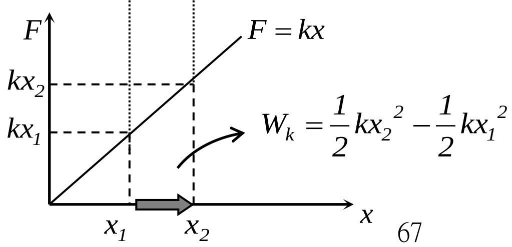
$$\boxed{W_s(x_1 \to x_2) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^{\ 2} - \frac{1}{2}kx_1^{\ 2}\right)}$$

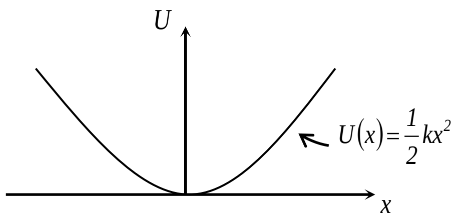
② 由位能定義： $\boxed{W_s = -\Delta U_s = -\left(U_{s2} - U_{s1}\right)}$

$$W_s(0 \to x) = -\left(U_s(x) - U_s(0)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k0^2\right) = -\left(U_s(x) - U_s(0)\right) \quad \because U_s(0) = 0 \quad \therefore U_s(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



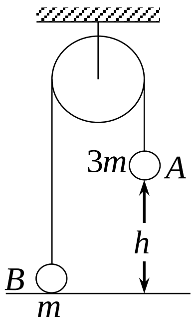
範例一

1. 質量為3$m$及$m$之$A$、$B$二球，各繫於一輕繩之兩端，此端跨過一無摩擦之滑輪，設$A$球距地面高$h$，而$B$球靜止於地面，重力加速度g，試問將$A$球釋放後，至兩球同高時，(1)重力作功多少？(2)兩球與地球的位能損失若干？

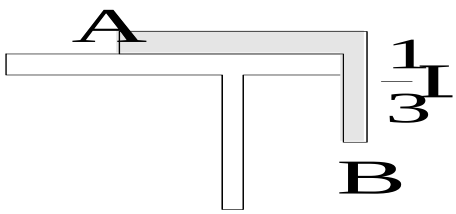
2. 長 $L$ 米之均勻繩索靜置於光滑水平桌面的邊緣，有$\frac{L}{3}$長之繩下垂，當自由釋放後，繩恰離開桌面時，試問：以桌面為位能參考面，寫出開始與最後的位能及位能差。（重力加速度 g）

***Ans: 1.(1) mgh (2)*** $-mgh$　**2.** $-\frac{1}{18}mgL$ 、$-\frac{4}{9}mgL$

1.




**2.**



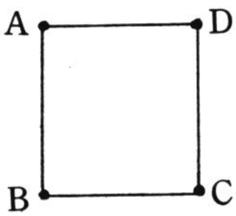
**範例二**

1. 如圖所示，在邊長為 $a$ 之正方形四頂點上置有質量均為 $m$ 之四質點，求：
（1）系統之重力位能？
（2）欲將此系統拆散，分別推移四質點至無窮遠處至少需作功？
（3）欲將其中一質點移至無窮遠處至少需作功？

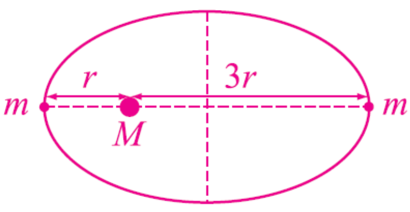
2. 一質量為 $m$ 的行星在橢圓軌道上繞質量為 $M$ 的太陽運動，設行星與太陽之最近距離為 $r$，而最遠之距離為 $3r$，萬有引力常數 G，則行星由近日點運動至遠日點時，太陽的萬有引力對其所作的功為何？

*Ans:* 1. （1）$-\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{a}$ （2）$\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{a}$ （3）$\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{2a}$ 2. $-\dfrac{2GMm}{3r}$

1.



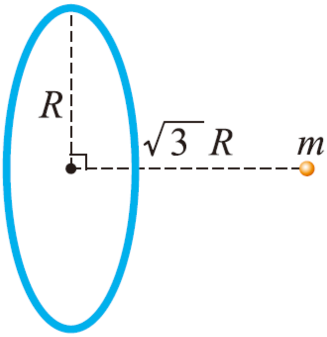

2.



範例三

太陽系中的木星。土星、天王星外圍都有圓形的環存在，圓環由許多微小的物質所組成。假設在宇宙中有一個圓形環的半徑為 R，其總質量為 M，如圖所示。在該環的中心軸上，距離環中心$\sqrt{3}\boldsymbol{R}$處有一質量為 m 的質點，圓環 M 與質點 m 系統的重力位能為何？（萬有引力常數 G，只考慮環與質點共有的重力位能不考慮）

*Ans:* $\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$



範例四

*1.*一物體連接於彈性常數為 200N/m 的彈簧上，並可在光滑水平面上，離平衡點為 0.60m 的範圍內來回振動。求物體自 0.60m 移動至－0.20m 處，彈力對物體作功為？

*2.*彈力常數 $k$ 之彈簧鉛直懸掛，下端吊一質量為 $m$ 的物體在平衡時，若施力使物體自平衡點向下拉 $x$ 距離停止，則：

（A）重力位能變化？（B）彈力位能變化？（C）系統總位能變化？

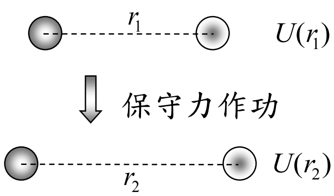
*Ans:1.32 J*　*2.*（A）減少 $mgx$（B）增加 $\frac{1}{2}\boldsymbol{kx}^2+\boldsymbol{mgx}$（C）增加 $\frac{1}{2}kx^2$

## *8-4* 力學能守恆定律

### 一、保守力與非保守力：

***1.*** **保守力（conservative force）：**

保守力對物體所作的功與物體運動的路徑無關，只與物體起末位置有關，可用位能的形式表示，保守力的作功必伴隨位能的變化。**如：重力、彈力、靜電力**。




**[公式]** 位能定義 $\boxed{W_{保守力}=-\Delta U=-\left(U_2-U_1\right)}$

物體受**保守力**所作的功＝物體**位能**的變化量的**負值**。

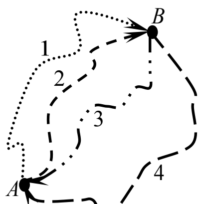
註：若物體的運動路徑為一任意的封閉迴路，則保守力對該質點所作的功為零。

[說明] 保守力作功與路徑無關，只與起、終點位置有關 (位置函數)：

（a）如右圖所示，當某保守力使物體由 $A$ 移動到 $B$ 位置時，不論是沿路徑 1 或是沿路徑 2，所作的功皆相同 (設為 $W_{AB}$)。

（b）當此保守力使物體由 $B$ 移動回到 $A$ 位置時，不論是沿路徑 3 或是沿路徑 4，所作的功皆相同 (設為 $W_{BA}$)。

（c）保守力沿任何封閉路徑對物體作功為零，故：$W_{AB} + W_{BA} = 0$，即：$W_{AB} = -W_{BA}$。




***2.*** **非保守力：**非保守力對物體所作的功與物體運動的路徑有關，**不可**用**位能**的形式表示，**如：摩擦力**。

## 三、$\boxed{\text{力學能守恆定律}}$：

**1.力學能 *E*：**動能與各種形式位能的總和稱為「力學能」，以 $E$ 表示。

**2.力學能守恆定律**：若一物體(或一系統)僅受到<u>保守力</u>的作功，則其動能和位能在運動過程中會改變，但其總和【即物體(或系統)的<u>**力學能**</u>】保持不變。

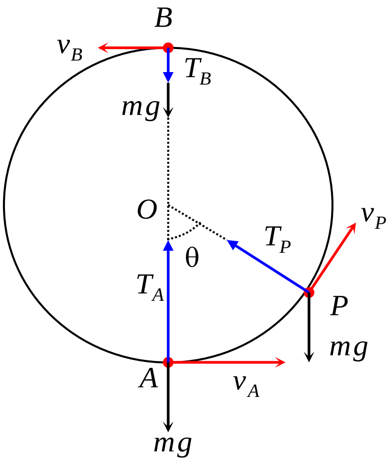
**[公式]：** $\boxed{\Delta U+\Delta K=0\text{或}U_1+K_1=U_2+K_2=\text{定值}}$

[證明]：
1.功能原理：$W_{合力}=\Delta K$ 2. $W_{保守力}=-\Delta U$
3.∴當只有保守力做功時，$W_{合力}=-\Delta U=\Delta K \rightarrow \Delta K+\Delta U=0$

$\boxed{\text{註}}$：計算時，**<u>先確定要比較的起末兩位置</u>**，再用力學能守恆公式。

## 四、鉛直方向圓周運動（力學能守恆的應用）

以質量不計的繩子繫一質量為 $m$ 的物體，另一端固定於某定點 $O$，在鉛直面使 $m$ 作圓周運動：




a. 系統：$m$ 與地球。

b. 系統所受外力：繩張力。

c. 系統內力：重力。

d. 運動過程中外力 (繩張力) 並未對系統作功。

e. 系統內力 (重力) 為保守力。

f. 結論：系統的總力學能守恆。

(1) $\boxed{\text{力學能守恆}}$：由於地球幾乎不動，故系統總動能 $K$ 中，僅需考慮 $m$ 的動能

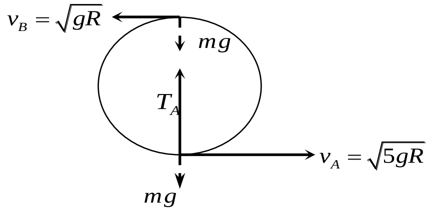
$$\boxed{E=K+U_g=\underbrace{\frac{1}{2}m{v_B}^2+mg(2R)}_{position\ B}=\underbrace{\frac{1}{2}m{v_A}^2+0}_{position\ A}=\underbrace{\frac{1}{2}m{v_P}^2+mgR(1-\cos\theta)}_{position\ P}=\text{定值}}$$

a. 定最低點 $A$ 處為零位點。

b. 鉛直方向圓周運動為變速率圓周運動，上行時減速，下行時加速。

(2) 向心力關係式：$m$ 在圓周上的各位置，需滿足向心力關係式，即：$\boxed{\sum F_N = ma_c = m\dfrac{v^2}{R}}$

$P$ 點：$T_P - mg\cos\theta = m\dfrac{{v_P}^2}{R}$




$B$ 點：$T_B + mg = m\dfrac{{v_B}^2}{R}$

$A$ 點：$T_A - mg = m\dfrac{{v_A}^2}{R}$

(繩子張力在最低點最大，在最高點最小)

(3) 臨界速率：

欲維持物體作鉛直面圓周運動，其速率 $v$ 有一最小值，若小於此一最小值，則懸線鬆弛而無法繼續作鉛直面圓周運動，此最小速率稱為"臨界速率"。

a. 最高點的臨界速率：

向心力公式：$T_B + mg = m\dfrac{{v_B}^2}{R}$，當 $T_B = 0$ 時，臨界速率 $\boxed{v_B = \sqrt{gR}}$。

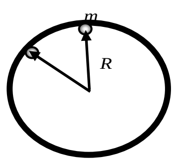
b. 最低點的臨界速率：

力學能守恆：$\dfrac{1}{2}m{v_A}^2 + mg\left(2R\right) = \dfrac{1}{2}m{v_B}^2 + 0$

臨界速率：$\boxed{v_A = \sqrt{5gR}}$。

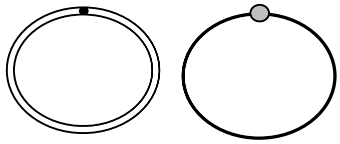
c. 利用力學能守恆可求任意點所對應的 (臨界) 速率。

註：（1）若質點沿鉛直光滑圓軌道內側運動，分析方法與結果與上述相同，只須將繩子張力改為軌道正向力。




（2）<u>但若物體是嵌在軌道上，或串在細桿上作圓周運動，則不存在臨界速率，即達最高點時，速度可以為零而不脫離。</u>

①最高點的臨界速率$\boxed{v_B = 0}$



②最低點的臨界速率$\boxed{v_A = \sqrt{4gR}}$

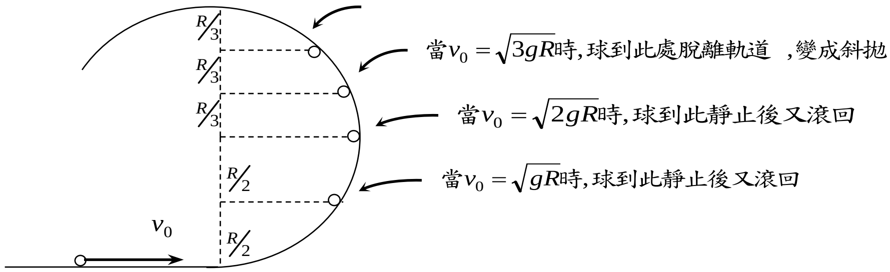
(4) 不能維持鉛直面上的圓周運動的狀況

a.若 $\boxed{v_0 < \sqrt{5gR}}$ 則物體不能作完整圓周運動。

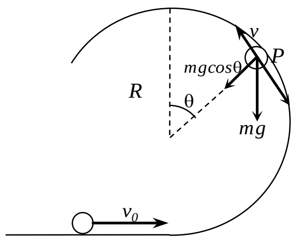
b.當 $\boxed{\sqrt{2gR} \geq v_0 > 0}$ 時，**物體上升一段高度（<u>未達半圓</u>）後<u>停止</u>**，然後**<u>沿圓軌道（緊貼軌道）滾回</u>。**

c.當 $\boxed{\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR}}$ 時，**物體上升到<u>半圓以上</u>高處<u>脫離軌道</u>**，之後作**<u>拋體運動</u>**。

[例]當 $v_0 = \sqrt{3gR}$ 時，物體在 $\frac{4}{3}R$ 高處脫離軌道。




[解]：質點在 $P$ 點時恰脫離圓軌道，此時物體與軌道間的正向力為零，重力的分力恰等於物體作圓周運動的向心力




(1) 力學能守恆：

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{3gR}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\left(1+\cos\theta\right)$$

(2) 正向力= 0 (重力分量等於向心力)：

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad \therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$$

【結論】

（1）鉛直方向圓周運動為<u>變速率圓周運動</u>，上行時<u>減速</u>，下行時<u>加速</u>。

（2）$\boxed{\text{鉛直方向圓周運動}\begin{cases}\text{力學能守恆} \Rightarrow \text{已知某點的速度可求其它各點的速度} \\ \text{向心力條件} \Rightarrow \text{可求各點的張力大小}\end{cases}}$

範例一

*1.*下列有關保守力與非保守力的敘述，何者錯誤？

(A)若一力所做的功僅與其起點和終點有關，而與其路徑無關，此種力即為保守力。

(B)一質點沿任意封閉路徑運動，環繞一周後回到起點，則保守力對此質點作功為零。

(C)力可分為保守力與非保守力，此兩者作功的形式皆可利用位能的方式來表達。

(D)若一孤立系統僅受保守力作用，且此力為內力，則此系統的力學能保持不變。

(E)非保守力作功的結果，等於物體力學能的變化。

*2.*質量為 $m$ 之小物體自距地 $3R$ 的高處沿光滑斜面自靜止下滑，經半徑 $R$ 的光滑圓曲面的 $A$ 點射出，則此物所能達的最大高度距地面多高？

*Ans:1.C*　*2.* $\frac{19}{8}R$

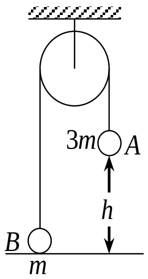
### 範例二

質量為$3m$及$m$之$A$、$B$二球，各繫於一輕繩之兩端，此端跨過一無摩擦之滑輪，設$A$球距地面高$h$，而$B$球靜止於地面，重力加速度g，將$A$球釋放後，試問：

(1) 兩球同高時速度為何？

(2) $A$球著地後，$B$球能達到最大高度為何？

*Ans:* (1) $\sqrt{\frac{1}{2}gh}$ (2) $\frac{3}{2}h$



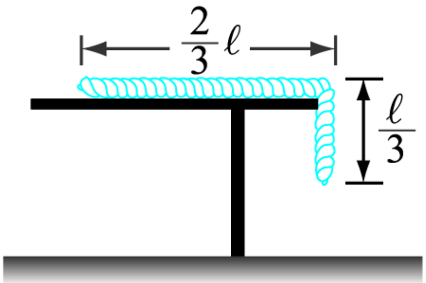
範例三

一均勻繩子的質量為 $m$、長度為 $\ell$，其中 $\frac{2}{3}\ell$ 在水平桌面上，其餘 $\frac{1}{3}\ell$ 懸垂於桌緣，重力加速度為 $g$，今將繩自靜止釋放，

（1）若水平桌面光滑，繩子全部滑離桌面時的速率為？

（2）若水平桌面不光滑，繩和桌面之動摩擦係數為 $\frac{1}{3}$，繩子全部滑離桌面時的速率為？

*Ans:* (1) $\frac{2\sqrt{2g\ell}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{15g\ell}}{9}$



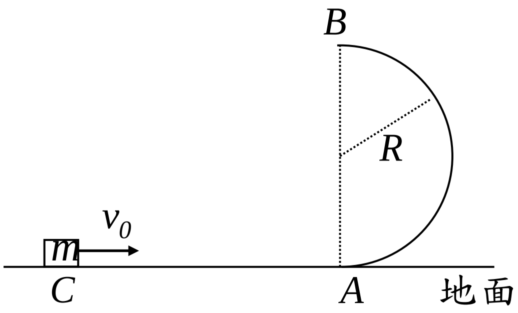
範例四

圖所示，均為光滑面，質量 $m$ 之物體以 $v_0=\sqrt{8gR}$ 向右滑行，圓軌道的半徑為 $R$，

重力加速度 g，求：*(a)* 抵 $B$ 點時軌道對物體之正向力為何？

*(b)* 物體最後落於 $AC$ 面上之點與 $A$ 之距離為何？

*Ans:(a)* $3mg$ *(b)* $4R$



範例五

一質量為 $m$ 的質點，在一無摩擦，半徑為 $R$ 的鉛直圓形軌道上運動，如圖所示。已知在最高點的速率為 $v_0 = \sqrt{\frac{4}{5}gR}$ ，$g$ 為重力加速度，則下列敘述何者為正確？

(A)此質點之最大速率為 $\sqrt{6}\,v_0$。

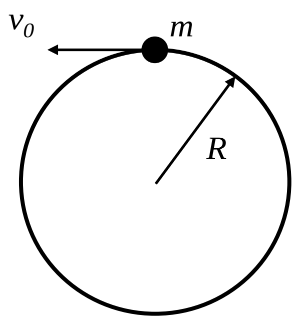
(B)在最高點處，軌道對質點作用力的量值為 $\frac{4}{5}mg$。

(C)在任一直徑的兩端點上，質點動能之和不變。

(D)此圓周運動之週期大於 $\frac{2\pi R}{v_0}$　(E)在運動過程中，質點對圓心之角動量守恆。

*Ans:.AC*

.



範例六

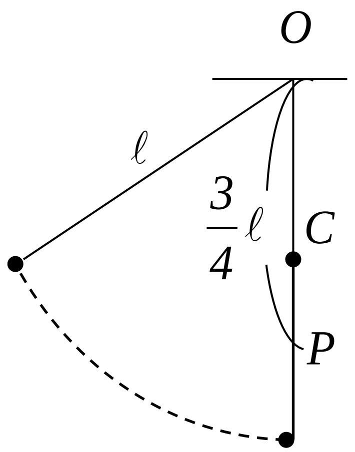
擺繩質量可忽略之單擺，如圖所示，其擺錘質量 $m$，擺長 $\ell$，若在懸掛點 $O$ 的正下方距離 $\frac{3}{4}\ell$ 處的 $P$ 有一光滑水平細棒，則：

（1）使擺繩水平拉直，再將擺球靜止釋放，繩碰到細棒後，擺球繞細棒作鉛直面圓周運動，當球上升至最高點 $C$ 之瞬間，繩之張力為若干？

（2）若單擺不是由水平狀態釋放，釋放時之擺角為 $\theta$，若恰可使球繞棒作完整圓周運動，則 $\cos\theta=$？

（3）若單擺由水平位置靜止釋放，欲恰使擺球可繞細棒完成一整圈的運動，則細棒應在懸掛點下方多遠？

***Ans*（1）3 *mg*（2）$\frac{3}{8}$（3）$\frac{3}{5}\ell$**



範例七

1.一單擺之擺長為$\ell$，其端繫質量為 $m$ 之擺錘，將擺線拉至幅角 $53°$由靜止釋放，當擺線與鉛直線夾角 $37°$時，重力加速度為 $g$，求：
（1）擺錘之切線加速度為？（2）擺錘之向心加速度為？（3）擺錘之加速度為？
（4）擺線之張力為？（5）當擺錘擺至最低點時，擺線之加速度為？張力為？

2.長繩的一端固定，另端最多僅能鉛直自由懸掛 1.8 $W$ 重物而恰不斷裂，今將此另端僅懸掛 $W$ 的重物，再由繩的水平位置放下，則繩子之斷裂點與鉛直方向 θ 的夾角為？

**Ans:1.（1）**$\frac{3}{5}g$ **（2）**$\frac{2}{5}g$ **（3）**$\frac{\sqrt{13}}{5}g$ **（4）**$\frac{6}{5}mg$ **（5）**$\frac{9}{5}mg$ **2.** $53^0$

範例八

1.圖所示，若物體的速率$v_0 = 2\sqrt{gR}$時，則：

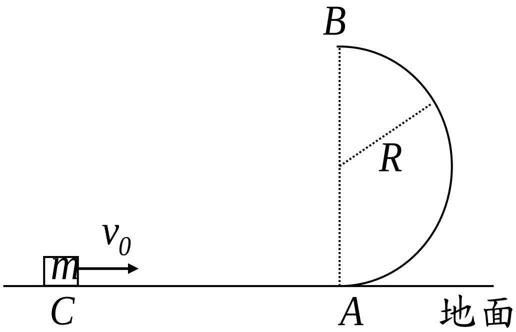
(a)在距地何高度處，小物體會脫離圓軌道面?

(b)小物體脫離軌道後，可到達的最大高度距地為若干？

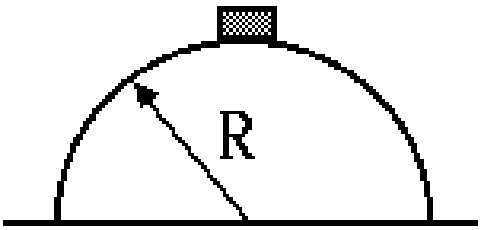
2.圖所示，一光滑的半球形物體固定在水平面上。有一物體置於半球體的頂端，自靜止開始順著球面自由滑下。已知半球體的半徑為 $R$，重力場強度為 $g$ ，則物體脫離半球體的表面時，(1)離地的高度？(2)此時速率為？(3)著地時速率為？

*Ans: 1.AC2. (1)* $\frac{2}{3}R$ *(2)* $\sqrt{\frac{2gR}{3}}$ *(3)* $\sqrt{2gR}$ *2. (a)* $\frac{5}{3}R$ *(b)* $\frac{50}{27}R$

1




2.

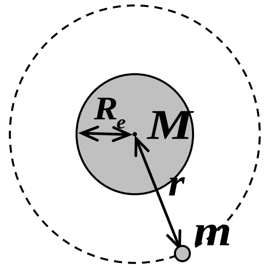


## 三、重力位能一般式的應用：人造衛星、星體運動….

### (1) 圓軌道人造衛星：

設有人造衛星(質量 $m$)，在離地心 $r$ 處繞地球(質量 $M$) 作<u>等速率圓周運動</u>：

<*a*>.重力位能 $\boxed{U_g = -\frac{GMm}{r}}$




<*b*>.動能 $\boxed{K = \frac{GMm}{2r} = -\frac{U_g}{2}}$ （與位能零位面無關）

$\left[\text{証明}\right] F_c = F_g \rightarrow m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$

<*c*>.力學能 $\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}}$ $\left[\text{証明}\right] E = K + U_g = \frac{GMm}{2r} + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{2r}$

$\boxed{\text{註}}$：圓軌道衛星之力學能、動能、位能關係 $E = -K = \frac{U_g}{2}$

### (2) 脫離動能與束縛能：（忽略星球自轉）

<*a*>.束縛能 $E_b$：欲使物體脫離重力場至無窮遠處，所需補充之最小能量。

則 $E_b + E = 0$ $\boxed{E_b = -E}$

<*b*>.脫離動能 $K_e$：

欲使物體脫離重力場移至無窮遠處，物體所具備的最小動能。

則 $K_e + U = E_\infty = 0 \Rightarrow \boxed{K_e = -U = \frac{GMm}{r}}$

（恰等於物體原位能的絕對值）

<*c*>.脫離速率 $v_e$：$K_e = \frac{1}{2}mv_e^2 \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$

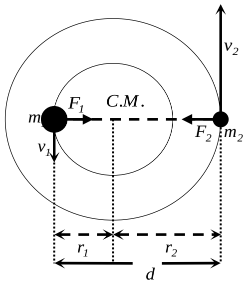
**[討論]：**

① $\boxed{K_e = K + E_b}$

② 欲從地表發射衛星至距地心 $r$ 處圓周運動，所須提供給衛星的能量

$$\boxed{\Delta E = E(r) - E(R) = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GM}{R}\right)}$$

③ 欲使繞地球圓周運動的物體從距地心 $r_1$ 移至距地心 $r_2$ 處圓周運動，所須提供給物體的能量 $\boxed{\Delta E = E(r_2) - E(r_1) = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)}$。




(3) **雙星運動：**

如圖，質量分別為 $m_1$ 及 $m_2$ 的雙星，在同一平面上互繞其共同<u>**質心**</u>做等速率圓周運動

| | | |
|---|---|---|
| 軌道半徑 | $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ ，$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d$ | $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ |
| 向心力 | $F_1 = F_2 = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$ | $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1}$ |
| 加速度 | $a_1 = \frac{Gm_2}{d^2}$ ， $a_2 = \frac{Gm_1}{d^2}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ |
| 軌道速率 | $v_1 = m_2 \sqrt{\frac{G}{d(m_1 + m_2)}}$ $v_2 = m_1 \sqrt{\frac{G}{d(m_1 + m_2)}}$ | $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$ <br> $\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \frac{1}{1}$ |
| 週期 | $\boxed{T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G(m_1 + m_2)}}}$ | $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1}$ |
| 動能 | $\boxed{K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m v_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m v_2^{\ 2} = \frac{Gm_1 m_2}{2d}}$ | |
| 位能 | $\boxed{U = -\frac{Gm_1 m_2}{d}}$ | |
| 總力學能 | $\boxed{E = -\frac{Gm_1 m_2}{2 \cdot d}}$ | |

範例一

1. 地球半徑為 $R$，質量為 $M$，將質量為 $m$ 的物體從距地面高 $R$ 處讓其自由落下，若不考慮空氣阻力，則該物體落至地面瞬間的速率為？（需考慮重力場之實際變化）

2. 兩物體質量比為 $1:4$，相距 d 時彼此互相吸引之萬有引力大小為 F。若由靜止藉萬有引力的作用拉引至相距 $\frac{d}{2}$ 時，則質量大的物體之動能為何？

Ans:1.. $\sqrt{\frac{GM}{R}}$　2. $\frac{1}{5}Fd$

範例二

1.地球半徑為 $R$，一人造衛星在距地面高 $R$ 處，繞地球作圓周運動，設無窮遠處重力位能為零時，萬有引力常數 $G$，則此人造衛星：

（A）力學能為？

（B）若在此軌道時，獲得能量使動能增加了 $\frac{GMm}{8R}$，當到達新軌道圓周運動時新軌道半徑為？

（C）若改定地球表面的重力位能為零時，則距地面高 $R$ 處重力位能為？

2.將質量 $m$ 的人造衛星，由地面發射進入太空中，以一圓形軌道繞地球運行，若衛星的軌道速率為 $\sqrt{\frac{1}{3}gR}$，$g$ 為地表重力加速度，$R$ 為地球半徑，則：

（1）衛星離地高度？（2）發射衛星的初速量值？

*Ans: 1.*（A）$\frac{-GMm}{4R}$（B）$4R$（C）$\frac{GMm}{4R}$　　*2.（1）2R（2）*$\sqrt{\frac{5}{3}gR}$

### 範例三

1. 假定地球表面上重力加速度量值為 $g$，地球半徑為 $R$ 時，自地面發射一顆質量為 $m$ 之太空船，試問：（1）太空船在地表的脫離速率為？

（2）若欲使其脫離地球引力的束縛所需之功為？

（3）若欲使至距地面高 $R$ 處，使其繞地球中心做圓周運動所需之功為？

（4）承上題，此時的脫離動能與束縛能？

（5）欲將軌道半徑由 $2R$ 提升至 $4R$ 處運行，則需補充能量？

**2.** 外太空中的某雙星係由質量分別為 $m$ 與 $3m$ 的兩星體所組成，兩星體藉由彼此間的萬有引力互繞其質量中心運轉。已知兩星距離 $d$，則欲將兩星拆散成相距無窮遠處至少需多少能量？

***Ans: 1.*** **（1）** $\sqrt{2gR}$ **（2）** $mgR$ **（3）** $\frac{3}{4}mgR$ **（4）** $\frac{1}{2}mgR$ $\frac{1}{4}mgR$ **（5）** $\frac{1}{8}mgR$

***2.*** $\dfrac{3Gm^2}{2d}$

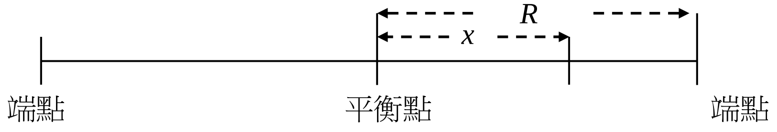
## 四、彈簧簡諧運動的能量：

### *1.* 簡諧運動的回顧

（1）簡諧運動的條件

a. 物體作簡諧運動的合力與位置關係 $\vec{F} = -k\vec{x}$

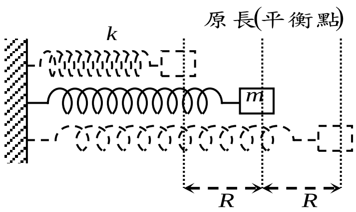
b. 運動軌跡為直線，以平衡點為對稱




速度為零 速度最大 $v_{max} = \dfrac{2\pi R}{T}$

加速度最大 $a_{max} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ 加速度為零

$\sum\vec{F} = -k\vec{R} = m\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ $\sum\vec{F} = 0$

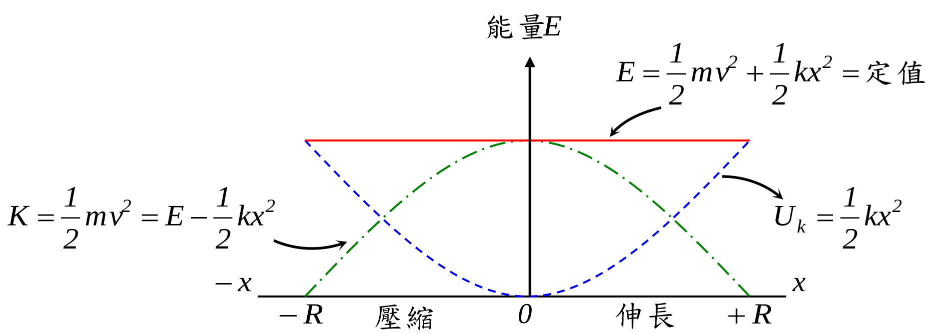



（2）簡諧運動的週期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

### *2.* 水平彈簧簡諧運動的能量

**[令振福 *R*]**

$$\boxed{\text{力學能守恆}\quad E = (\text{任一點})\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = (\text{端點})\frac{1}{2}kR^2 = (\text{平衡點})\frac{1}{2}mv_{max}^2\ \text{常數}}$$



範例一

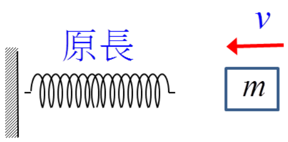
1.一彈簧橫置於一水平光滑平面上，一端固定，另一端連結一木塊作振幅 $R$ 的簡諧運動，試求（1）當木塊離平衡點的位移為最大位移的 $\frac{2}{3}$ 時，木塊動能為？彈簧位能為？

（2）簡諧運動中木塊最大動能為？

2 一條彈力常數為 $k$ 的彈簧平放在光滑水平面上，一端定在牆上。如有質量為 $m$ 的木塊以速率 $v$ 撞向彈簧的另一端，則此彈簧的最大壓縮長度為？

*Ans* 1.（1）$\frac{5}{9}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{kR}^2\right)$ $\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{kR}^2\right)$ （2）$\frac{1}{2}\boldsymbol{kR}^2$ 2. $v\sqrt{\frac{m}{k}}$

2.



## 8-5　能量守恆定律

**一、能量守恆定律：**在一個孤立的系統中，能量可以從一種形式轉變為另一種形式，但系統的總能量保持不變。

## 二、【補充】非保守力的作功

***1.*內容：**物體受**非保守力**所作的功＝物體**總力學能**的變化。

【非保守力作**負功**，總力學能減少；作**正功**，總力學能增加】

***2.*公式：**$\boxed{W_{非保守力} = \Delta E = \Delta U + \Delta K}$

[證明]：

1. 功能原理 $W_{合力} = \Delta K$　　2. $W_{合力} = W_{保守力} + W_{非保守力}$

3. $W_{保守力} = -\Delta U$　　4. $W_{合力} = -\Delta U + W_{非保守力} = \Delta K \rightarrow W_{非保守力} = \Delta K + \Delta U$

[討論]

*1.*當物體只受保守力作功，則物體運動過程中動能與位能的總和(總力學能)不變，稱為力學能守恆。

*2.*當物體受非保守力作功，則物體運動過程中總力學能改變，但總能量仍守恆。

範例一

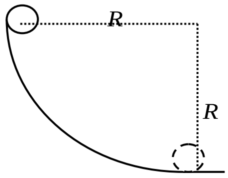
1.有一 *10* 仟克之物體從光滑斜面滑下後，在動摩擦係數為 *0.4* 之平面上滑行 *5* 米後停止。則物體原在斜面上之高度為若干米？

2.施力使質量 $m$ 的物體，沿斜角 $\theta$ 之斜面等速上移，若在鉛直方向升高 $h$，假設斜面為光滑，則（A）施力所作之功為 $mgh$（B）重力所作之功為 $mgh$（C）重力位能增加 $mgh$（D）淨力作功為 $mgh$（E）質量 $m$ 之總力學能守恆。

3.質量 *5* 公斤的質點，沿著一半徑為 *10* 公尺的圓弧曲面從水平位置以等速率 *2* 公尺/秒滑至底部，如圖所示。則摩擦力作功？

***ANS: 1.2　2.AC　3.–490J***

3.



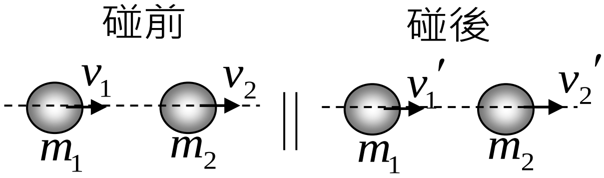
# 第 *9* 章　　碰撞與功能轉換

## *9-1* 碰撞問題的基本定理

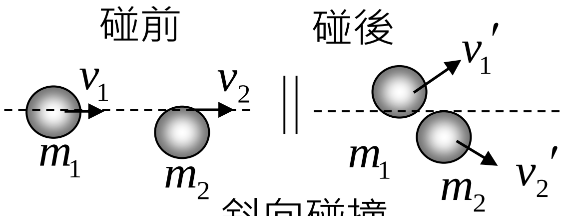
**一、碰撞：**若兩質點（物體）之間有交互作用力（超距力或接觸力），即可稱為碰撞。

（1）**動量守恆**：若碰撞期間沒有淨外力作用，或雖有淨外力作用但碰撞時間極短，，則系統動量在碰撞期間及前後均保持不變。

（2）若碰撞前後的物體速度均在同一直線上，稱為正向碰撞。
若不在同一直線上，則稱為斜向碰撞。



正向碰撞

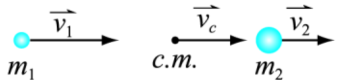


斜向碰撞

**註**：不一定要接觸才稱為碰撞。例如兩個電荷間的靜電作用亦可稱為碰撞。

## 二、[補充] 系統的總動能 $K$、內動能 $K_i$ 與質心動能 $K_C$：

如圖所示，質量 $m_1$、$m_2$ 的質點速度各為 $v_1$、 $v_2$，則 $m_1+m_2$ 系統的




（1）質心速度 $\boxed{v_c=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}}$

（2）質心動能 $\boxed{K_C=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^{\ 2}}$

（3）內動能 $\boxed{K_I=\dfrac{1}{2}m_1v_{1C}^{\ 2}+\dfrac{1}{2}m_2v_{2C}^{\ 2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_{12}^{\ 2}}$ （=系統相對於質心動能）

$\overrightarrow{v_{12}}=\vec{v_1}-\vec{v_2}$ ：二物體的相對速度

（4）$\boxed{\text{系統的總動能 } K\text{＝質心動能 } K_C\text{+內動能 } K_i\text{（相對於質心動能）}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\ 2}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^{\ 2}+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{v_1}-\vec{v_2}\right)^2}$$

**[說明]**

$m_1$ 相對於質心的速度 $v_{1c}=v_1-v_c$，

$m_2$ 相對於質心的速度 $v_{2c}=v_2-v_c$，（即站在質心上看 $m_1$ 與 $m_2$ 的速度）

系統的總動能 $\sum K=\dfrac{1}{2}m_1v_1^{\ 2}+\dfrac{1}{2}m_2v_2^{\ 2}=\dfrac{1}{2}m_1(v_c+v_{1c})^2+\dfrac{1}{2}m_2(v_c+v_{1c})^2$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^{\ 2}}_{\text{質心動能}K_c}+\underbrace{\cancel{(m_1v_{1c}+m_2v_{2c})}}_{0}v_c+\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_{1c}^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2v_{2c}^{\ 2}}_{\text{內動能}K_I}$$

質心動能 $K_C=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_C^{\ 2}$

內動能 $K_I=\dfrac{1}{2}m_1v_{1C}^{\ 2}+\dfrac{1}{2}m_2v_{2C}^{\ 2}=\dfrac{1}{2}m_1(v_1-v_c)^2+\dfrac{1}{2}m_2(v_2-v_c)^2$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(v_1-\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(v_2-\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2^{\ 2}(v_1-v_2)^2+m_1^{\ 2}m_2(v_2-v_1)^2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

三、**碰撞的分類**：以碰撞過程有無<u>**力學能守恆**</u>來分類。

***1.*** **彈性碰撞**：碰撞前後，<u>系統總動能不變</u>。

（碰撞中，只有保守力作功，<u>**力學能守恆**</u>）。

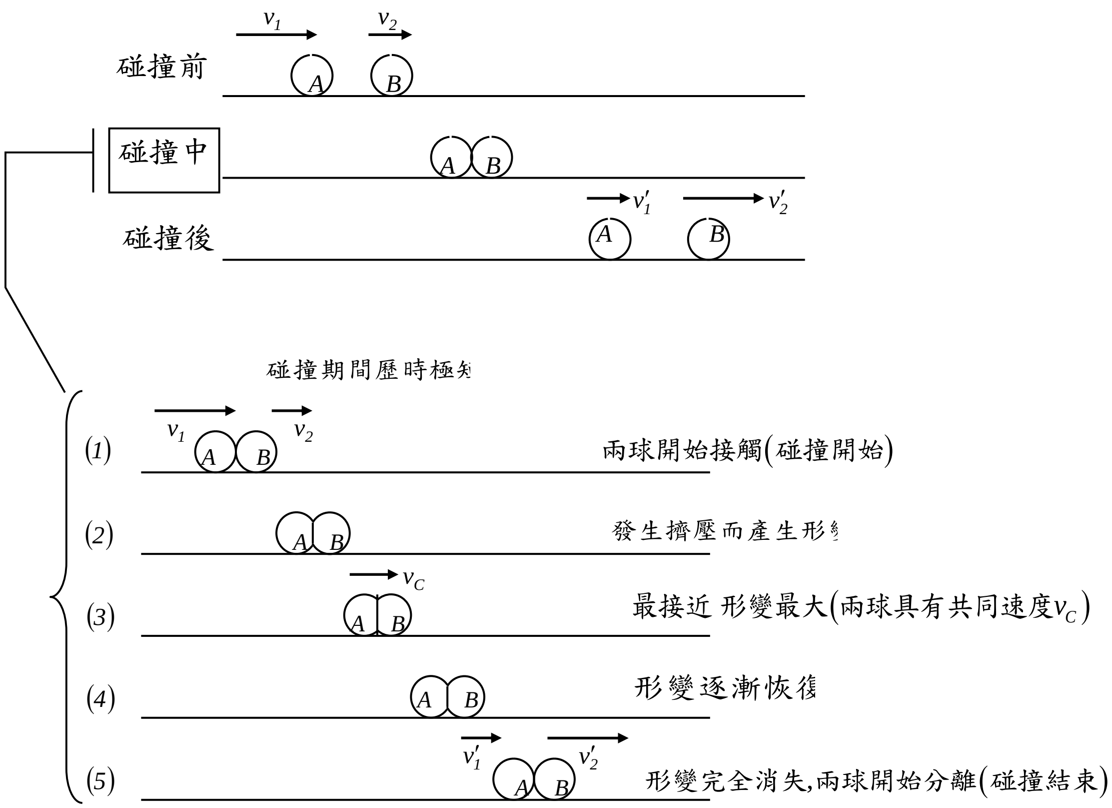
***2.*** **非彈性碰撞**：碰撞前後，<u>系統總動能改變</u>。

（碰撞中，有非保守力作功，例如：摩擦力等，<u>**非力學能守恆**</u>）。

註：不論哪種碰撞系統碰撞前中後均為<u>動量守恆</u>。

## 9-2（1）正向彈性碰撞

一、正向彈性碰撞過程：



**(1)⇒(3)壓縮階段（$v_1 > v_2$）：相對接近**

1.兩球接觸以後，形變所產生的力，對 B 而言，與速度方向相同，使 B 加速；對 A 而言，與速度方向相反，使 A 減速。因而 A 球速度逐漸減小，B 球速度逐漸加大，但只要 A 球速度大於 B 球速度，兩球就繼續擠壓，使形變加大。

2.在壓縮階段（$v_1 > v_2$），A 球動能損失，B 球動能增加，但全體的動能減小，系統的位能增大，而總力學能不變。

**(3)最接近時：** 為**形變量最大**的時刻，**兩球具有共同速度（等於質心速度）**$\boxed{v_1 = v_2 = v_C}$。

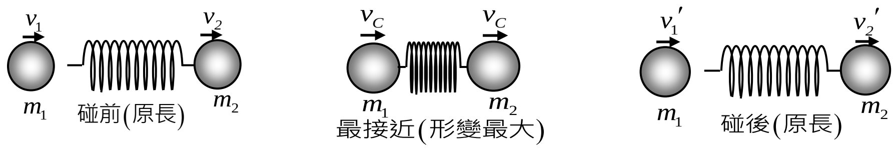
1.由動量守恆 $\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_C \Rightarrow v_C = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$

2.此時兩球的總動能最小（只剩$\boxed{\text{質心動能 } K_C = \dfrac{1}{2} M v_C^{\,2}}$），系統位能最大。

**(3)⇒(5)恢復階段（$v_1 < v_2$）：相對分離**

1.B 球繼續加速，A 球繼續減速，兩球中心的距離逐漸增大，形變逐漸恢復，直至兩球相互脫離。

2.在恢復階段，A 球動能持續損失，B 球動能增加，但兩球的總動能增大，系統位能減小，而總力學能不變。




**[討論]**：

在整個碰撞過程中

⇒ 系統的$\boxed{\text{總動量守恆}}$ ⇒ 系統的$\boxed{\text{質心速度 } v_C \text{ 保持不變}}$

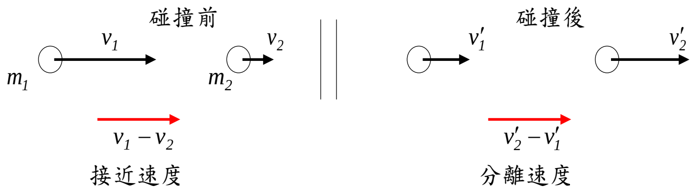
⇒ 系統的$\boxed{\text{質心動能 } K_C \text{ 保持不變}}$

| | | 前期（壓縮階段） | 中期（壓縮最大） | 後期（恢復階段） |
|---|---|---|---|---|
| 恆定量 | 總動量 | 不變 | | |
| | 質心速度 | 不變 | | |
| | 質心動能 | 不變 | | |
| | 總力學能 | 不變 | | |
| 變化量 | 內動能 | 漸減 | *0* | 漸增 |
| | 位能 | 由 *0* 漸增 | 最大 | 漸減至 *0* |
| | 總動能 | 漸減 | 質心動能 | 漸增 |

二、$\boxed{\text{正向彈性碰撞公式}}$：$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 = 2\vec{v}_C - \vec{v}_1 \\ \vec{v}'_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 = 2\vec{v}_C - \vec{v}_2 \end{cases}$

**適用於正向彈性碰撞<u>前後</u>的速度關係。**

[說明] 質量分別為 $m_1$、$m_2$ 的兩質點 $A$、$B$，在同一直線上做同向運動，$A$ 的速度大於 $B$ 的速度（即 $v_1 > v_2$），發生彈性碰撞後，速度變為 $v_1'$ 和 $v_2'$。




動量守恆 $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \ldots\ldots(1)$

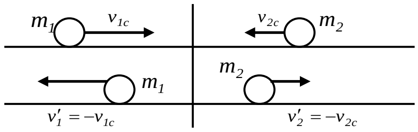
動能守恆 $\dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \text{由}(1): m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_1'\right) = m_2\left(\vec{v}_2' - \vec{v}_2\right)\ldots\ldots\ldots(3) \\ \text{由}(2): m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right)\ldots\ldots\ldots(4) \end{array}\right\} \frac{(3)}{(4)}: \vec{v}_1 + \vec{v}_1' = \vec{v}_2' + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'$$

代入(1)得 $\vec{v}_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \quad \vec{v}_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2$

**[討論]**

（1）**接近速度等於分離速度** $\boxed{v_1 - v_2 = v_2' - v_1'}$



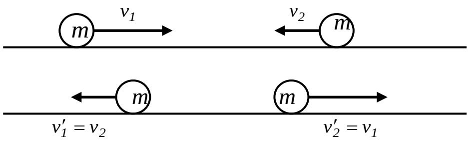

質心坐標系見兩物體原來速率反向運動

（2）**特例：**

①若 $m_1 = m_2$ ，<u>兩質點質量相等</u>

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

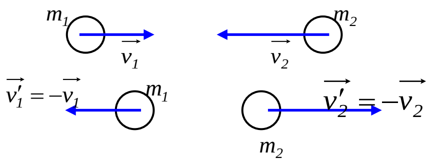
，<u>碰撞後兩質點的速度交換</u>




②若 $\overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{p_2}$ ，<u>兩質點相向運動但動量相等</u>

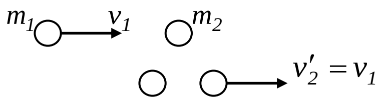
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_C} = 0} \text{ 代入（2），得} \begin{cases} v_1' = -v_1 \\ v_2' = -v_2 \end{cases}，$$

<u>兩質點以原來速率反方向彈回</u>

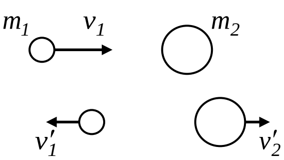



③若 $v_2 = 0$，<u>$m_2$ 原靜止</u>，$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$

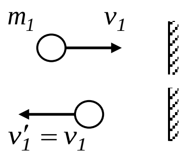
$$\Rightarrow \begin{cases}
(1)\ m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\text{靜止} \\ m_2\text{以}\vec{v_1}\text{的速度前進} \end{cases} (m_1\text{將所有的動能轉移給}m_2) \\
(2)\ m_1 > m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' > 0 \\ v_2' > 0 \end{cases} \Rightarrow m_1\text{與}m_2\text{均沿}\vec{v_1}\text{方向前進} \\
(3)\ m_1 < m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' < 0 \\ v_2' > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\text{反向彈回} \\ m_2\text{沿}\vec{v_1}\text{方向前進} \end{cases} \\
(4)\ m_1 >> m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' \approx v_1 \\ v_2' \approx 2v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\text{速率不變} \\ m_2\text{以 } 2\ v_1\text{速率前進} \end{cases} \\
(5)\ m_1 << m_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1' \approx -v_1 \\ v_2' \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\text{以相同速率反彈回} \\ m_2\text{幾乎靜止不動} \end{cases}
\end{cases}$$




$(1)\ m_1 = m_2$



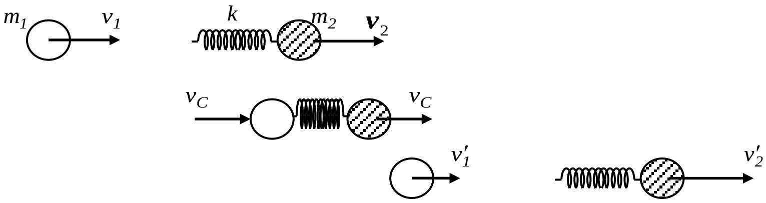

$(3)\ m_1 < m_2$




$(5)\ m_1 << m_2$

## 三、正向彈性碰撞的應用：

（1）如圖，$m_1$ 以速度 $v_1$ 與靜止的 $m_2$ 發生彈性碰撞，




① 當彈簧達最大壓縮量時，兩物體速度相同（均為質心速度 $\boldsymbol{v_C}=\dfrac{\boldsymbol{m_1v_1+m_2v_2}}{\boldsymbol{m_1+m_2}}$ ），

此時碰撞前之內動能完全變為彈性位能

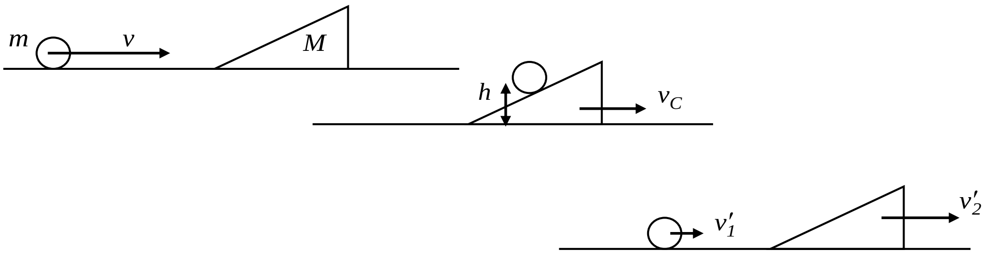
$\boxed{\text{力學能守恆}}$　$$\boxed{\frac{1}{2}\boldsymbol{m_1v_1^2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{m_2v_2^2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{(m_1+m_2)v_C^2}+\frac{1}{2}}$$

[ 碰前內動能完全變成彈性位能　$\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_1^{\,2}=\dfrac{1}{2}kx^2$ ]

② 分離後的速度 $$\boxed{\begin{cases}\boldsymbol{v_1'}=\dfrac{\boldsymbol{m_1-m_2}}{\boldsymbol{m_1+m_2}}\boldsymbol{v_1}+\dfrac{2\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{m_1+m_2}}\boldsymbol{v_2}\\ \boldsymbol{v_2'}=\dfrac{2\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{m_1+m_2}}\boldsymbol{v_1}+\dfrac{\boldsymbol{m_2-m_1}}{\boldsymbol{m_1+m_2}}\boldsymbol{v_2}\end{cases}}$$

③ [補充] 接觸時間（雙質點振動系統週期之一半）$t=\dfrac{1}{2}T=\pi\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}}$

（2）如圖，$m$ 以速度 $v_1$ 與靜止的 $M$ 發生彈性碰撞




① 當 $m$ 上升至最大高度時，$m$ 與 $M$ 的水平速度相同（均為質心速度 $\boldsymbol{v_C = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$），且 m 之鉛直速度為零，此時，碰撞前之內動能完全變為 $m$ 之重力位能）

$\boxed{\text{力學能守恆}}$ $\boxed{\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}(m+M)v_C{}^2 + mgh}$

[ 碰前內動能完全變成彈性位能 $\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}v^2 = m\,g$ ]

② 分離後的速度 $\begin{cases} v_1' = \dfrac{m-M}{m+M}v \\ v_2' = \dfrac{2m}{m+M}v \end{cases}$

範例一

1.鋼球 1 公斤、鋁球 0.2 公斤，兩球發生<u>正向碰撞</u>，下列敘述何者正確？ (A)鋁球受到撞擊力的量值是鋼球的五倍 (B)鋁球動量改變量的量值是鋼球的五倍 (C)鋁球速度改變量的量值是鋼球的五倍 (D)鋁球與鋼球動能改變量的量值相同。

**2.**圖所示，在一直線上有 A 和 B 兩物體，其質量分別為 0.4kg 和 0.6kg。物體 A 以 5.m／s 的速度向右碰撞靜止中的物體 B。碰撞後物體 A 以 0.4m／s 的速度向左彈回，求：（1）碰撞後物體 B 的速度 v。

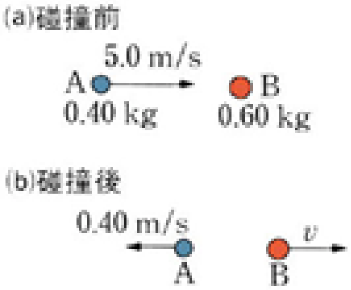
（2）碰撞過程中 A 和 B 兩物體系統所損失的動能。

**2.**圖所示，一個質量為 $m$ 速度為 $v$ 的子彈射穿質量為 $M$ 的木塊後，速度變為 $\frac{v}{2}$ ，而此木塊懸吊於長度為 $L$ 的輕繩下端，若子彈與鉛塊碰撞歷時極短可忽略。問 $v$ 須為若干，方能使木塊達最高點時，繩子張力為 $2Mg$？

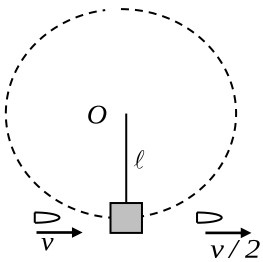
***Ans:1.C*** **2.**$(1)3.6\left[m/s\right](2)1.08\left[J\right]$ **3.** $v=\frac{2M}{m}\sqrt{7gL}$

**1.**

**2.**




3.



範例二

**1.** 入射球以動量 $\vec{P}$ 與靜止的靶球作<u>正向彈性碰撞</u>後，入射球與靶球的動量可能為？

(A) $-\vec{P}$、$2\vec{P}$ (B) $-2\vec{P}$、$3\vec{P}$ (C) $\frac{1}{2}\vec{P}$、$2\vec{P}$ (D) $\frac{1}{2}\vec{P}$、$\frac{1}{2}\vec{P}$ (E) $-\frac{3}{2}\vec{P}$、$\frac{5}{2}\vec{P}$ 。

**2.** 入射球以速度 $\vec{v}$ 與靜止的靶球作<u>正向彈性碰撞</u>後，入射球與靶球的速度可能為？

(A) $-\frac{\vec{v}}{2}$、$\frac{\vec{v}}{2}$ (B) $\frac{\vec{v}}{2}$、$\frac{3\vec{v}}{2}$ (C) $-\frac{2\vec{v}}{3}$、$\frac{\vec{v}}{3}$ (D) $\frac{3\vec{v}}{2}$、$\frac{5\vec{v}}{2}$ (E) $-\frac{3\vec{v}}{2}$、$\vec{v}$ 。

*3.* 質量 *2* kg，速度為 *10* m / s 的 A 球和質量 *3* kg，速度 *5* m / s 的 B 球，在一直線上相向進行，作正向彈性碰撞，求

（A）撞後兩球的速率？　（B）碰撞後，兩質點的質心速度大小為？

（C）*B* 對 *A* 作用的衝量大小為？　（D）*B* 對 *A* 所作的功為？

***Ans: 1.D　2.ABC*** *3.*（*A*）*A*： *8 m /s*，*B*：*7 m /s*（*B*）$\frac{1}{3}v_0$（*C*）$\frac{4}{3}mv_0$（*D*）$-\frac{4}{9}mv_0^2$

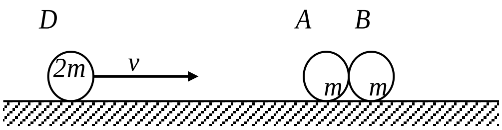
**範例三**

1.*A*、*B* 兩大小相同均勻小球，互相接觸，靜止於一光滑直水平軌道上，現有一質量為 $2m$ 與 *AB* 等大的均勻球，以 $v$ 的速度自直軌道一邊前進與 *A* 球作正向彈性碰撞，則碰撞分離後不在相撞後 *AB* 兩球速率比 $v_A : v_B =$ ？

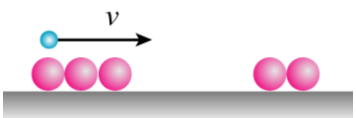
**2.**光滑水平桌面上，有 5 個完全相同的球，今其中三個球以速度 $v$ 碰撞另外兩個靜止的球，假定所有的碰撞均為直線彈性碰撞，則碰撞結束後離開的球有幾個？

***Ans:1.*** *1 : 3*　　***2.*** *3* 個

1.



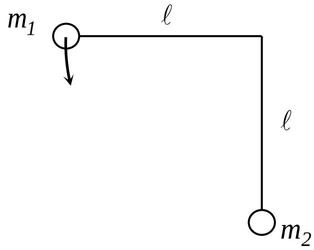

2.



**範例四**

二單擺擺長均為 $\ell$ ，其一擺錘質量為 $m_1$，另一擺錘質量為 $m_2$，今將 $m_1$ 拉起至水平狀態後放開，使其與 $m_2$ 產生彈性碰撞，$m_1$ 反彈至原來一半之高度，則 $\frac{m_1}{m_2}=$？

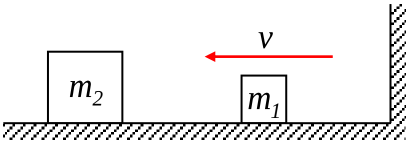
***Ans:*** $\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$



**範例五**

若 $m_2$ 質量為 $100$ kg，靜置於無摩擦力之地面，另一 質量 $m_1$，位於 $m_2$ 與牆之間，以等速度 $v$ 向 $m_2$ 運動，如圖所示。若 $m_1$ 與 $m_2$ 碰撞後，反向運動再與牆碰撞後，其速度與 $m_2$ 完全相同，求 $m_1$ 的質量？（所有碰撞皆視為彈性碰撞，且牆固定不動）

$Ans: m_1 = \dfrac{100}{3} kg$



**範例六**

如圖所示，$m_1$ 與 $m_2$ 兩物發生正面彈性碰撞時，速度對時間之變化圖，若 $m_1 = 3$ 公斤，t＝0 時碰撞開始，則：

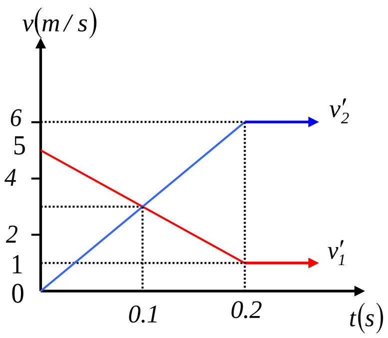
（A）$m_2 =$ ？

（B）碰撞過程中，互相作用力為？

（C）最接近時，總動能為？

（D）若兩物相距 75 公分時即開始碰撞，則兩物最小距離為？

*Ans:*（A）*2* 公斤（B）*60* 牛頓（C）*22.5* 焦耳（D）*50* 公分。



範例七

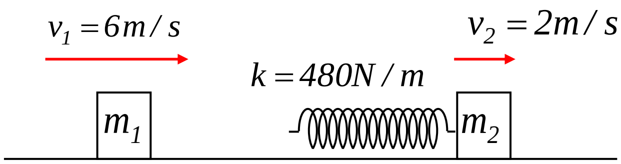
兩物體質量分別為 $m_1 = 3\ kg$，$m_2 = 5\ kg$，速度分別為 $v_1 = 6\ m/s$，$v_2 = 2\ m/s$，在一維空間作完全彈性碰撞；$m_2$ 上繫一彈力常數為 $480\ N/m$ 的輕彈簧，則：

（1）碰撞期間彈簧被壓縮的最大距離為_____ *m*

（2）碰撞後 $m_2$ 之速度為______ *m/s*

（3）[補充] $m_1$ 與 $m_2$ 碰撞時的接觸時間為_______秒。

*Ans:*（1）$\frac{1}{4}$（2）5（3）$\frac{\pi}{16}$

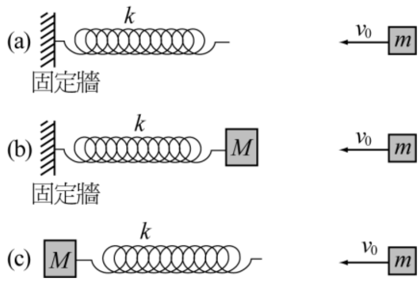


範例八

**1.**如圖(a)(b)(c)三狀況，都是質量 $m$ 的物體在 光滑無摩擦的水平面上以 $v_0$ 之速度向力常數 $k$ 的理想彈簧系統壓縮，若(b)(c)兩圖之 $M=3m$ ，且(b)圖 $m$ 與 $M$ 碰撞後合為一體壓縮彈簧，則(a)(b)(c)三者彈簧之最大壓縮量之比為？。

**2.**承上題(a)(c)二者，物體與彈簧接觸時間之比為？。

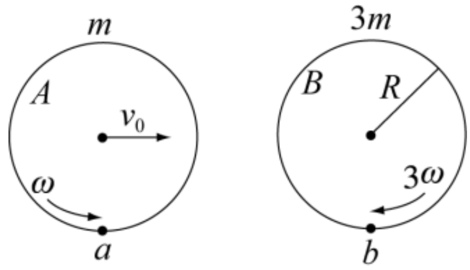
***Ans:1.***2：1：$\sqrt{3}$　***2.*** 2：$\sqrt{3}$



範例九

在光滑平面上的 $A$、$B$ 兩圓盤，半徑均為 $R$，質量分別為 $m$ 及 $3m$，$A$ 盤以角速度 $\omega$ 沿逆時針方向轉動，$B$ 盤以角速度 $3\omega$ 沿順時針方向轉動，$A$、$B$ 兩盤心的連線方向為由西向東，且兩盤的邊緣均極光滑。今 $A$ 盤以初速 $v_0$ 由西向東碰撞盤心靜止的 $B$ 盤，碰撞後 $A$ 以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速度向西運動，則下列敘述哪些正確？ (A)兩盤碰撞前 $B$ 盤最南之端點（圖中之 $b$ 點）的速度為 $3\omega R$，方向向西 (B)碰撞後，$B$ 盤之盤心速度的量值為 $v_0$ (C)碰撞後，$B$ 盤最南方之端點的速度為 $3\omega R$，方向向西 (D)碰撞後，$B$ 盤之盤心相對於 $A$ 盤之盤心的速度量值為 $v_0$ (E)此兩盤碰撞前後的線動量不守恆。

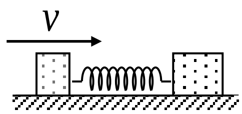
*Ans:* AD



範例10

**[挑戰]**兩木塊質量分別為 $m$ 與 $2m$，以力常數為 $k$ 的彈簧相連，靜置於光滑水平地面上。今以水平衝量 $J$ 施於質量為 $m$ 之木塊，使整個系統沿直線前進，如圖所示，則：
（A）質量為 $m$ 之木塊初速為？　（B）質量為 $2m$ 之木塊初速為？
（C）當兩個木塊最靠近時，兩木塊速度？（D）當兩木塊最接近時，系統的總動能？
（E）當兩木塊最接近時，彈簧被壓縮（最大壓縮量）？
（F）當彈簧第一次回到原長時，兩木塊速度各為？

***Ans:.***（A）$\frac{J}{m}$（B）0（C）$\frac{J}{3m}$（D）$\frac{J^2}{6m}$（E）$\sqrt{\frac{2J^2}{3mk}}$



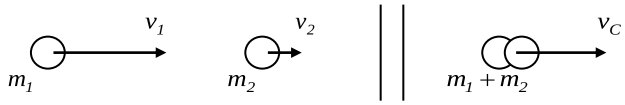
## 9-3 正向非彈性碰撞

**一、非彈性碰撞：**碰撞前後，系統總動能改變。

（1） 非彈性碰撞系統不受外力作用，所以動量守恆。但是動能不守恆。

（2） 非彈性碰撞後的動能也可能不減反增，例如砲彈與地面間發生碰撞時，會將火藥引爆，使其化學能轉變成動能，以致碰撞後的總動能大於碰撞前的總動能。

（3）**完全非彈性碰撞：碰撞後合為一體，系統總動能損失最多。**




① 碰撞後合體速度＝質心速度 $\vec{v}_C=\dfrac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

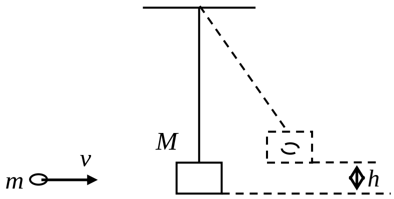
② 碰撞後系統的總動能＝質心動能 $K_C=\dfrac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_C{}^2$

③ 碰撞後系統總動能損失＝碰撞前系統的內動能

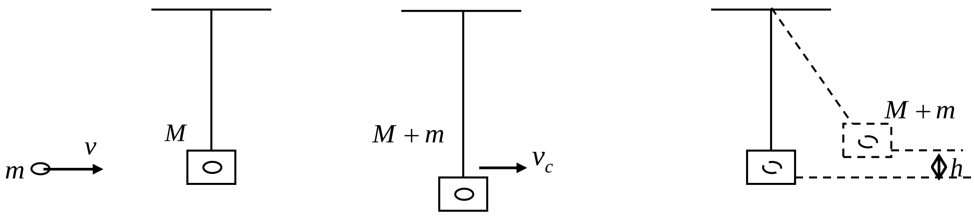
$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}m_1v_1{}^2+\frac{1}{2}m_2v_2{}^2\right)-\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v_c{}^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(v_1-v_2\right)^2=K_I$$

## 三、完全非彈性碰撞的應用：

（1）**[瞬間合體：忽略碰撞時間]** 衝擊擺




如右圖所示，子彈 $m$ 碰撞木塊 $M$ 後，停留在木塊中，上升之高度 $h$




動量守恆　$\boldsymbol{v_C = \dfrac{mv}{M+m}}$

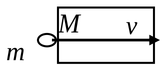
合體前後力學能損失 ＝ 內動能 ＝ $\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}v^2$

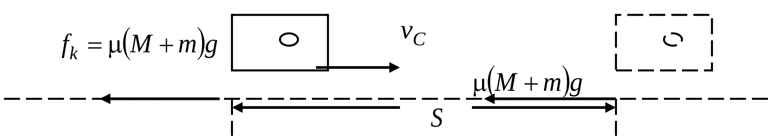
合體後力學能守恆　$\boxed{\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{M+m})\boldsymbol{v_c}^2 = (\boldsymbol{M+m})\boldsymbol{gh} \rightarrow \boldsymbol{h} = \dfrac{\boldsymbol{v_c}^2}{2\boldsymbol{g}}}$

（2）**[瞬間合體：忽略碰撞時間]**子彈 $m$ 以 $v$ 之速度射入靜止之木塊 $M$ 後停留在其內，已知木塊與地面之摩擦係數μ，求子彈在地面滑行之距離 $S$

動量守恆　$v_C = \dfrac{mv}{M+m}$

功能定理 $-f_k \cdot S = 0 - \dfrac{1}{2}(M+m)v_c^{\,2} \quad \Rightarrow \quad -\mu(M+m)g \cdot S = 0 - \dfrac{1}{2}(M+m)v_C^{\,2}$



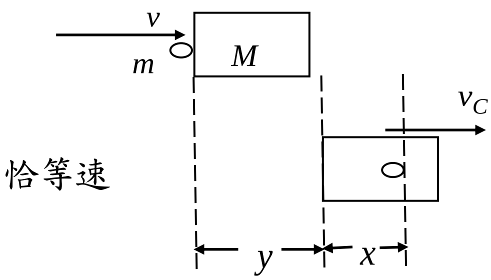



（3）**[非瞬間合體：碰撞時間不可忽略]**

質量 m 的子彈，以 v 的速度水平入射一靜置於光滑水平面上，長度為 $\ell$，質量為 M 的木塊，若木塊可自由移動，且子彈不打穿木塊，子彈在木塊中所受的平均阻力量值為 $f$，則：①子彈穿入木塊之深度為？

②子彈自進入木塊起至靜止於木塊中止，木塊共移動多遠？

③子彈自進入木塊起至靜止於木塊中止，歷時？



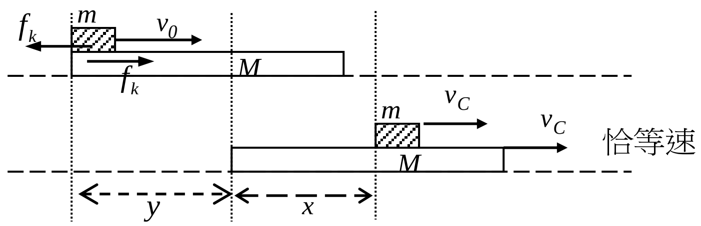

動量守恆 $v_C = \dfrac{mv}{M+m}$

功能定理：$\boxed{\begin{array}{l} m:-f\cdot(x+y)=\dfrac{1}{2}mv_C{}^2-\dfrac{1}{2}mv^2 \\ M:+f\cdot y=\dfrac{1}{2}Mv_C{}^2-0 \end{array}}$ $\rightarrow \boxed{m+M: f\cdot x=\dfrac{1}{2}\dfrac{Mm}{m+M}v^2}$

牛二；$\boxed{\Delta p = F\Delta t \rightarrow M: Mv_C = ft \therefore t=\dfrac{M\times\dfrac{mv}{M+m}}{f}=\dfrac{Mmv}{f(M+m)}}$

（4）**[非瞬間合體碰撞時間不可忽略]**

質量為 $M$ 之木板，靜止在光滑水平面上，今將質量 $m$ 的木塊由左端以初速 $v_0$ 水平滑入木板，$m$ 與 $M$ 間摩擦係數為μ，當 $m$ 在 $M$ 上滑動 $x$ 距離後，不再有相對運動，求 $x$？




動量守恆 $v_C = \dfrac{mv}{M+m}$

功能定理：$\boxed{\begin{aligned} & m:-f_k \cdot (x+y) = \frac{1}{2}mv_C{}^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\ & M:+f_k \cdot y = \frac{1}{2}Mv_C{}^2 - 0 \end{aligned}} \rightarrow \boxed{m+M: f_k \cdot x = \frac{1}{2}\frac{Mm}{m+M}v^2}$

牛二；$\boxed{\Delta p = F\Delta t \rightarrow M: Mv_C = f_k t \therefore t = \dfrac{M \times \dfrac{mv}{M+m}}{f_k} = \dfrac{Mv}{\mu_k g(M+m)}}$

範例一

**1.**質量為 $m_1$ 甲物體，以初速度 $v_0$ 朝+ $x$ 方向運動（$v_0 > 0$），與質量為 $m_2$，原為靜止之乙物體產生一維碰撞。碰撞後甲物體之速度為 $v_1$，乙物體之速度為 $v_2$（朝+ $x$ 方向為正值），則下列敘述，何者為正確？

（A）如 $v_1 > 0$，則 $m_1$ 一定大於 $m_2$

（B）如 $v_1 = 0$，$v_2 = v_0$，則 $m_1$ 一定等於 $m_2$

（C）如 $v_2 - v_1 = v_0$，則此碰撞一定是彈性碰撞

（D）如 $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_0$，則此碰撞一定是彈性碰撞

（E）如 $v_1 = v_2$，則此碰撞一定是非彈性碰撞。

**2.**兩物體 A、B 發生迎面碰撞，碰撞後 A 和 B 都朝 A 原來移動的方向運動。下列推論何者正確？　(A) 碰撞前 A 的動量的大小一定比 B 大

(B) 碰撞前 A 的動能一定比 B 大　(C) 碰撞前 A 的速率一定比 B 大

(D) A 的質量一定比 B 大　(E) A 的密度一定比 B 大 。

**3.**鋼球 1 公斤、鋁球 0.5 公斤，兩球發生正向碰撞，下列各項物理量的量值中，何者鋁球為鋼球的兩倍？(A)所受撞擊力 (B)動量變化量 (C)速度變化量 (D)動能變化量 (E)所受衝量。

***Ans:1.BE　2.A　3.C***

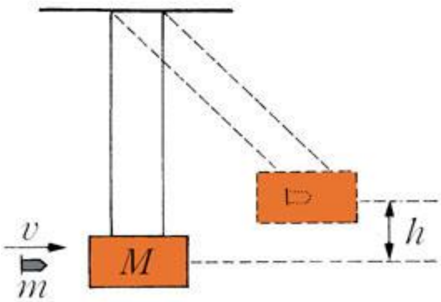
範例二

如圖，質量 m 的子彈自槍口射出後沿水平方向射入鉛直懸掛的鉛塊。鉛塊的質量 M，子彈射入鉛塊後留在鉛塊內，兩者一起往上擺動的最大高度 h，若子彈與鉛塊碰撞歷時極短可忽略，求：（重力加速度 g)

(1)子彈自槍口射出後的初速？

(2)子彈在射入鉛塊的過程中，有多少比例的動能轉變為其他形式的能量？

***Ans:***（1）$\frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$ （2）$\frac{M}{M+m}$



範例三

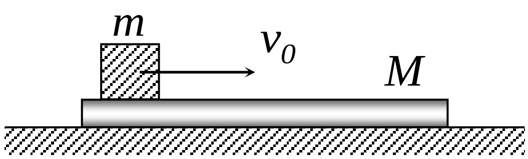
光滑平面上，質量 $M$ 的靜止木板上，有一木塊以初速 $v_0$ 向右衝出，如下圖所示。已知木塊質量為 $m$ ，木板與木塊間的動摩擦係數為 μ，則當木塊與木板移動的速度相同時：

(A)木塊的末速為？

(B)木塊與木板等速運動前，摩擦力對木塊-木板系統作功為？

(C)木塊在木板上滑行的距離為？

***Ans:* .** (A) $\frac{mv_0}{M+m}$ (B) $-\frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{M}{M+m}\right)$(C) $\frac{v_0^2}{2\mu g}\left(\frac{M}{M+m}\right)$



**範例四**

質量 m 的子彈，以 v 的速度水平入射一靜置於光滑水平面上，長度為 $\ell$ ，質量為 M 的木塊

若木塊原固定在地面上，而子彈恰打入 $\frac{\ell}{2}$ 深，試問：

(1)子彈在木塊中所受的平均阻力量值為何？

(2)若子彈要貫穿木塊，則所需的速率為多少？

(3)若木塊不固定在地面上（可自由移動），則當子彈以前述貫穿木塊之速率入射，則穿入木塊之深度為多少？

(4)承(3)，子彈自進入木塊起至靜止於木塊中止，木塊共移動多遠？

***Ans:*** (1) $\frac{mv^2}{L}$ (2) $\sqrt{2}v$ (3) $\frac{M\ell}{(M+m)}$ (4) $\frac{Mm\ell}{(M+m)^2}$

## 範例五

***1.***有一打樁錘質量為 200kg，從離樁頂 1.25 m 高處由靜止落下撞擊於樁柱上，若樁柱的質量為 800kg，設撞擊樁柱後連成一體壓向地面，若樁柱壓入地面 0.1m 而停止。須考慮重力，則土地對樁柱之平均阻力為多少？($g=10m/s^2$)

***2.***某人持一質量為1.0 kg的鐵鎚，以速度1.0 m/s將鐵釘水平打入一固定的硬木塊中。假設鐵釘在木塊中所受的阻力和其進入的深度成正比，第一次敲擊後，鐵釘深入木塊中的距離為0.50 cm，則在鐵鎚以同樣的方式總共敲擊4次後。忽略重力，鐵釘進入木塊中的總深度為何？

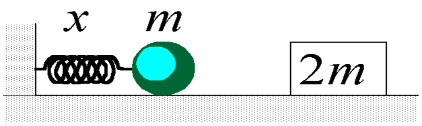
***Ans:1.15000N　2. 1.0 cm***

範例六

在光滑水平面上，釋放壓縮量為 $x$ 的彈簧（力常數 $k$），與彈簧相連的小球質量 $m$，在彈簧原長處小球與質量 2m 的木塊完全非彈性碰撞，則碰撞後

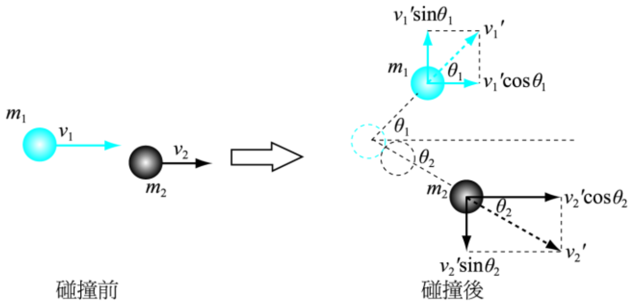
（1）合體的速率？（2）合體的振幅？

***Ans:***（1）$\frac{x}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}x$



## [斜向彈性碰撞]

**一、斜向彈性碰撞**：碰撞前瞬間兩物體之運動方向和其中心連結直線不一致




質量分別為 $m_1$、$m_2$ 的兩質點 $A$、$B$，速度分別為 $\vec{v}_1$ 與 $\vec{v}_2$，

發生斜向彈性碰撞後，速度變為 $\vec{v}'_1$ 和 $\vec{v}'_2$。

動量守恆 $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \begin{cases} x方向：m_1 v_1'\cos\theta_1 + m_2 v_2'\cos\theta_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ y方向：m_1 v_1'\sin\theta_1 + (-m_2 v_2'\sin\theta_2) = 0 \end{cases}$

動能守恆 $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$

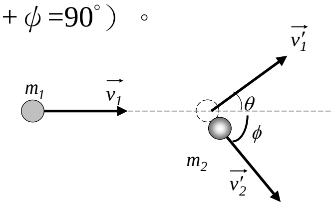
**因 $m_1$、$m_2$、$v_1$、$v_2$ 為已知，所以只要 $v_1'$、$v_2'$、$\theta_1$、$\theta_2$ 四個未知數中得知其一，**

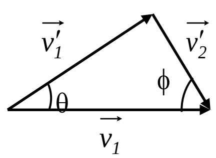
**則由上面三式即可求出所有未知數。**

**二、斜向彈性碰撞的特例：**

若兩物體的**質量相等**，且 **$m_2$ 原來靜止**，則碰撞後兩者的運動方向**互相垂直**

（即 $\theta+\phi=90^\circ$）。




**[證明]**

$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$ 三個向量圍成一個三角形

$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ 此三角形為一個直角三角形

$\Rightarrow \theta+\phi = 90^\circ$，

範例一

***1.***質量相同之 *A*、*B* 兩球，作斜向碰撞後，則：
(A)兩球必垂直彈開　(B)兩球動量和與碰撞前相等　(C)兩球之總動能等於原來兩球動能和　(D)兩球質心之運動方向不變　(E)兩球質心動能不變。

*2.* *A*、*B* 二小球質量均為 *m*，設 *A* 球以 v 之初速與靜止之 *B* 球作非正面之彈性碰撞， 碰撞後 *A* 球運動方向與原入射方向之夾角為＋30°。則 *B* 球碰撞後射出之方向與原入射方向之夾角為？速率為？

*Ans:1.BDE*　2.（**1**）60°　$\frac{1}{2}v$