2012年第13屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第43屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2011 年 11 月 19 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器。

2012 年第 13 屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第 43 屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊初選考試

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、已知建築用磚塊的密度為 2000 kg/m^3，其最大的抗壓強度(每單位面積所能承受的力)為1.0×10^6 N/m^2。若純以磚塊建造的實心柱狀紀念碑，所能建成的最大高度為__(1)__公尺。

二、一傾斜的長直線軌道與水平面的夾角為θ。一質點自軌道底端，以初速率v沿著軌道向上運動。若 $\mu_S > \tan\theta > \mu$ (其中 μ_S 為最大靜摩擦係數，μ 為動摩擦係數)，重力加速度為 g，則質點最後停在軌道上的位置與底端的距離是__(2)__。若 $\tan\theta > \mu_S > \mu$，質點到達最高點後向下滑，當質點滑回原來位置時，其速率減小至$\dfrac{v}{2}$，則動摩擦係數 $\mu=$__(3)__。

三、質量相同的 A，B 兩質點，位於同一鉛直線上。A 自離地面 h 高度靜止落下的同時，B 在地面上以初速度 V_0 垂直向上拋出。A、B 兩質點間的正向碰撞、和 B 質點與地面碰撞均為完全彈性碰撞。當 B 球垂直上拋落地反彈後，才與 A 球發生第一次碰撞，其後系統以$\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$為週期進行週期性運動，則初速 V_0 等於__(4)__。A 和 B 在此週期運動中發生正向碰撞的高度為__(5)__。

四、一輕的細桿鉛直地固定在質量M木板的中央，此細桿正好可穿過質量 m 的小球中心，使球僅能在細桿上滑動。今將該小球從細桿頂端靜止釋放，小球在細桿上滑行過程中，地面施於木板的作用力為 $N=\dfrac{g}{3}(2m+3M)$，式中 g 為重力加速度，則小球沿細桿向下滑動的過程中

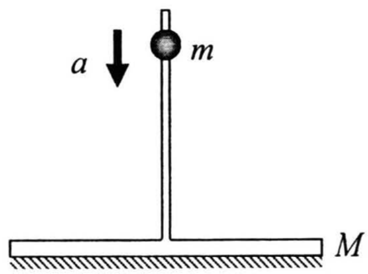


圖 1

所受到的摩擦力等於___(6)___，而向下加速度值等於___(7)___。

五、在暗室中有一滴管每間隔 T 時間滴出一顆水滴，且每顆水滴都完全相同。當閃光燈也以相同的週期 T 閃一次，且每次閃光時，恰有一水滴在滴管口形成，如圖 2 所示。此時觀察者看到水滴固定在空中，即水滴之視速度為零。若將閃光燈改為每 $7T/8$ 閃一次，在視覺上，觀察者發現在位置 1 的水滴開始向上運動，且以等加速度方式運動，則位置在 1 的水滴運動的視速度為___(8)___，視加速度為___(9)___。（以向上為正、向下為負，並以重力加速度 g 與 T 表示）。

圖 2

六、已知樹上有一蘋果，若任其自由落地，所需的時間為 t_0。今某生在與此蘋果同一高度處以 BB 槍射擊此蘋果，當 BB 彈以水平速度 v_0 發射之瞬間，蘋果恰同時自樹上自由落下。假設發射 BB 彈之瞬間，BB 彈與蘋果相距 d，且 BB 彈在蘋果落地前即打中蘋果，並與蘋果合而為一體。若蘋果之質量為 M，BB 彈的質量為 m，則此時蘋果自開始落下到落地所需的時間為___(10)___（以重力加速度 g、d、v_0、m、M 與 t_0 表示）。

七、一容器靜置於桌面上，內裝有不可壓縮且無黏滯的液體，容器側邊有一截面積為 A 的小孔，小孔的高度恰為液面高度的 $\frac{1}{2}$。若容器的液面高度近似相同，水柱由小孔水平流出後也一直保持柱狀，則在落於桌面之前，水柱的最小截面積為：___(11)___。

八、在一力場中，質量為 m、距離力場中心為 r 的物體，其所受到作用力 F 的大小為 $F = Ame^{-br}/r^4$，其中 A 和 b 為相關參數，則 A 乘以 b (即 $A \times b$) 的單位為___(12)___（以 MKS 制表示之）。

九、設地球是半徑為 R、質量為 M、自轉角速度為 Ω 的均勻圓球。若萬有引力常數為 G，考慮一條在地球赤道平面、沿著地球直徑貫穿整個地球內部的光滑圓形光滑小通道。將一質量為 m、截面大小與通道相同的小球，在相對於地

球為靜止的狀態下，自其中一個位於地球表面的洞口釋放，則小球到達通道另一端洞口所需的時間為___(13)___，小球到達地心時的速率為___(14)___。

十、一細長且內裝有水之連通管，在光滑的水平面上以等加速度 a 向左運動。因連通管很細，故管徑內之水面的變化可忽略不計，如圖 3 所示。假設若重力加速度為 g，連通管之底部的長度為 ℓ，左右管水面達平衡時之高度各為 h_1 與 h_2，則連通管之加速度 a 等於 ___(15)___。

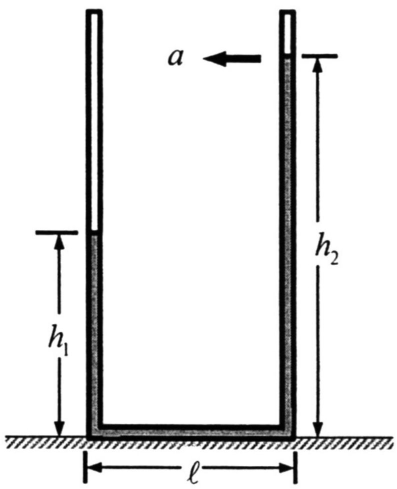


圖 3

十一、 一裝有理想氣體的圓筒浮在水面上，圓筒包括氣體之總質量為 m，起初圓筒有一部分沒入水中，其深度為 h，若圓筒之底面積為 A，水的密度為 ρ，則 $h=$ ___(16)___。之後由於圓筒底盤破了一個小洞，如圖 4 所示，水逐漸緩慢地進入圓筒之中而使得圓筒沒入水深度改變。設大氣的壓力為 p_0，圓筒之高度為 ℓ，若理想氣體初始的壓力亦為 p_0，且在整個漏水過程中保持同一溫度，則平衡時，圓筒中之水深 $x=$ ___(17)___。（以重力加速度 g、h、ρ 與 p_0 表示）。

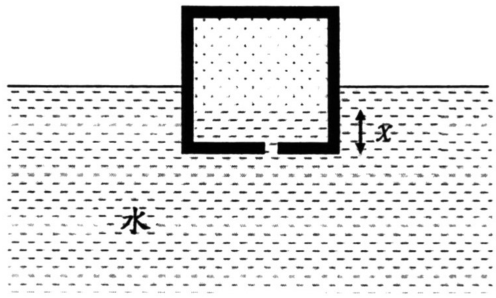


圖 4

十二、將平板垂直拉出液面所需的最小正向拉力。一液體的密度為 ρ，表面張力為 S，假設以鉛直的正向拉力，將面積為 L^2 的水平正方形平板(即圖中 ab 連線)自此液體中緩慢地向上拉出，如圖 5 所示。已知平板之重量可忽略，周圍的大氣壓力為 p_0，重力加速度為 g，液體與平板的接觸角為 0°。若平板即將與液體分離時的正向拉力為 F，則在平板下方的液體層高度 h 等於

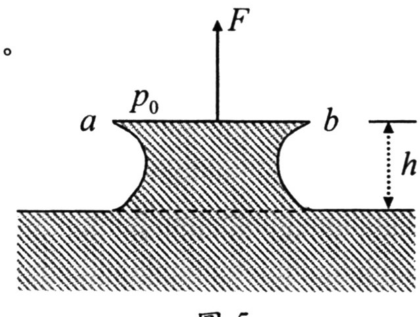


圖 5

(18)_____（限以 ρ、L^2、g、F 表示）。若四周弧形液面的形狀可近似為均勻，則 F 可近似為___(19)___（限以 ρ、L^2、g、S 表示）。

十三、 在一水平光滑平面上有一仰角為 45° 之楔形木塊，楔形木塊之斜面上裝有一彈力常數為 k 之理想彈簧，如圖 6 所示。已知楔形木塊之質量為 M、且其斜面是光滑的。今有一質量為 m 之小木塊自彈簧之伸長量為零處，由靜止沿斜面釋放滑落，若楔形木塊之初速為零，小木塊最大垂直下降的距離為 h，則小木塊自釋放到達最低點這段時間內，小木塊的水平位移等於___(20)___ 楔形木塊在水平面上位移＝___(21)___（以向右為正）。

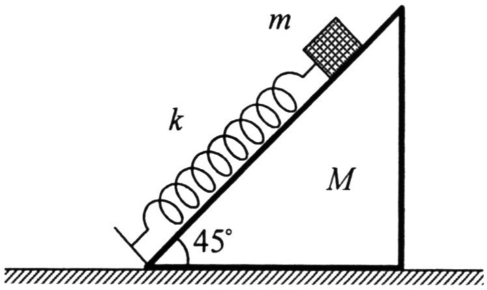


圖 6

十四、 一支鋁棒質量為 m，垂直鋁棒以質心 O 點為轉軸的轉動慣量為 I。以質心 O 為 y 軸的原點(向上為正，向下為負)，若以座標為 a 之懸掛點 A 作小振幅擺動時，其週期為 $T_a=\sqrt{\dfrac{I+ma^2}{mga}}$，如圖七所示。已知另有數個懸掛點也可使鋁棒小振幅擺動週期為 T_a，則這些懸掛點在 y 軸上的座標為___(22)___。

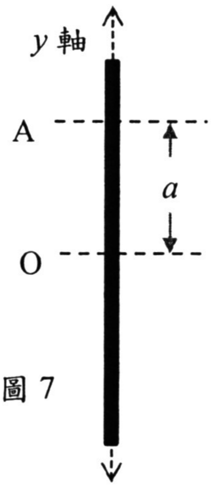


圖 7

十五、 總質量為 M 半徑為 R 的溜溜球立於水平面上，溜溜球的中心棒半徑為 r，而整體的轉動慣量可以近似為 $\frac{1}{2}MR^2$。溜溜球和水平面間的最大靜摩擦係數為 μ_s。若以水平力在中心棒的下方，拉繞中心棒的線，如圖 8(a)所示，則能使溜溜球滾動而不滑動的最大水平力 F 等於___(23)___。若水平力在中心棒的上方拉，且要使溜溜球滾動而不滑動，如圖 8(b)所示，則 R 最小需為 r 的___(24)___倍。

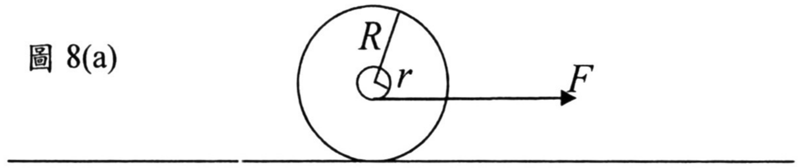


圖 8(a)

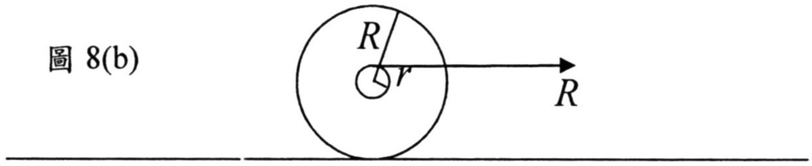


圖 8(b)

十六、 伽利略溫度計是將質量為m的數個空心玻璃球中放入質量不等的物質，並將他們置放在液體中。藉由溫度的變化，以這些玻璃球在液體中沉浮的性質來顯示溫度，如圖 9 所示。已知在0°C時此液體的密度為ρ，玻璃球的體積為V_0，且$\rho V_0 > m$。液體與玻璃的體膨脹係數分別是β_L及β_g。欲使玻璃球在T°C時，恰可停在液體中的任意位置，則需要在玻璃球內加入的物質質量為__(25)__。

提示：$\beta_g T << 1$和$\beta_L T << 1$，且當$x << 1$時，$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x$。

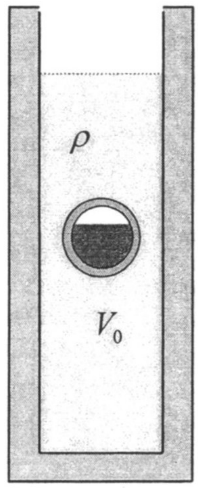


圖 9

十七、 一隻蝙蝠以速度v_b往一隻小飛蟲的方向飛，並發出頻率為f_b的超音波；與蝙蝠同方向飛行的小蟲仍未有所知覺。若空氣為靜止狀態，超音波在空氣中的速率為 v，且蝙蝠接受到自小蟲反射回來的超音波頻率為$f_r = f_b\left(1 + v_b/v\right)^2$，則小蟲的飛行速率$v_c$等於__(26)__。

十八、 一個等溫唧筒中裝有n莫耳之氣體，而此氣體的狀態方程式為$P(V - B) = nRT$；其中P為壓力、V為體積、T為溫度，R為理想氣體常數，而B/n為一常數，且$B << V$。設起始時的氣體的體積為V_i，然後唧筒的活塞開始緩慢向外移動至氣體的體積為原來的兩倍，過程中該氣體對外所作的功為W。若唧筒中裝有n莫耳之理想氣體(狀態方程式為$PV = nRT$)，則在相同

情況下所做的功為W'。已知$\dfrac{W-W'}{W'}=5.0\times10^{-4}$，試求$\dfrac{B}{V_i}=$___(27)___。

提示 A：$\int\dfrac{dx}{x}=\ln x$，

提示 B：當$x<<1$時，$\dfrac{1}{1-x}\cong1+x$，且$\ln(1+x)\cong x$

十九、 已知太陽與火星的半徑分別為$7.0\times10^{8}\,\mathrm{m}$ 及$3.4\times10^{6}\,\mathrm{m}$，太陽表面溫度為5800K，而火星繞太陽的軌道半徑$2.3\times10^{11}\,\mathrm{m}$。若只考慮輻射效應，且假設太陽及火星均為理想黑體，則當火星達到熱平衡時其溫度為___(28)___。

【註】：若一黑體的絕對溫度為T，則該黑體表面每單位面積在每單位時間內所輻射出的電磁波能量，稱之為輻射能通量密度J(每單位面積的輻射功率)，且 $J=\sigma T^4$，式中$\sigma=5.67\times10^{-8}\left(\mathrm{Js^{-1}m^{-2}K^{-4}}\right)$，稱為史特凡-波茲曼常數。如果黑體周圍的環境溫度為T_e，則須考慮黑體表面對入射輻射能的吸收。假定入射的輻射能通量密度為σT_e^4，則該黑體表面所吸收的輻射能通量密度為$J'=\sigma T_e^4$。

二十、有一個正方桌面的桌子，立在水平面上如圖 10 所示。設桌面與地面均為剛體，而桌腳卻是高強度的彈性物質所構成。每隻桌腳均相同且適用虎克定律，彈簧常數為k。桌面空無一物時，因桌面的重量，使桌腳的長度均為ℓ，且小於桌腳未受力時之原始長度。現在桌面$\overline{AC}$對角線上的P點，置放一個重量為W的小重物，已知$\overline{AP}/\overline{AC}=r$。置放小重物後，四隻桌腳的長度分別為$\ell_A$、$\ell_B$、$\ell_C$及$\ell_D$，計算桌腳$\ell_A$和$\ell_B$縮減的長度，即$\ell-\ell_B=$___(29)___，和$\ell-\ell_A=$___(30)___。

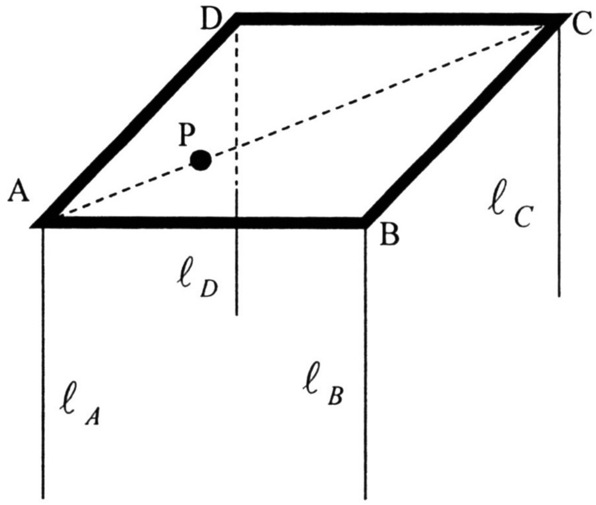


圖 10

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、火車隧道

考慮一條海底的鐵路隧道，例如穿過英吉利海峽的英法海底隧道。已知一列火車通過隧道歷時 24 分鐘，在運輸尖峰時，鐵道上相鄰列車的行駛間隔為 3 分鐘。當隧道內有一列火車行駛時，平均每秒鐘所產生的熱為 4.0×10^{6} J。火車通過隧道產生的廢熱，留存在隧道內，會使溫度上升，因此必須在隧道內鋪設循環水管，輸入冷水，並將吸收熱量後的熱水輸出。熱水經由設於隧道洞口外的冷卻系統散熱後，再冷卻重新輸入隧道內。假定不計隧道內可能生熱的其他熱源，也可忽略從隧道內散失至外界的熱量，流入隧道的冷卻水溫度為 5.0 ^{o}C，流出的熱水溫度為 30 ^{o}C。回答下列問題：

(1) 計算在尖峰時刻時通過冷卻系統的水流量（kg/s）。(水的比熱 $c = 4.2\times10^{3}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$)

冷卻系統分成兩段操作：第一段先讓熱水流經熱交換機散熱，使水溫度降至周圍的環境溫度 $T_0 = 20\,^{o}\mathrm{C}$；第二段才再由冷卻機內的冷媒運作，使水流的溫度進一步下降。設冷卻機為一理想冷機，即輸入能量讓冷卻機對冷媒作功 W，而冷媒再自溫度為 T 流水中抽取熱量 Q，然後冷卻機將 $W+Q$ 的熱量排放至周圍 20 ^{o}C 的定溫環境。

(2) 已知水流溫度為 T 時，由該理想冷卻機所能排放至外界的熱量為 $Q\times\left(\dfrac{T_0}{T}\right)$，則冷卻機所作的功 W 為何？以 Q、T、和 T_0 表示之。

(3) 設質量為 m 的水流經該冷卻機後，水溫自初溫 T_0 降至末溫 T_f，試求必須輸入冷卻機的能量為何？以 m、c、T_0、和 T_f 表示之。

(4) 利用(1)、(3)之結果和所給予的數據，計算該冷卻機所需輸入的功率。

提示：$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x$

二、鋼條上垂降的彈簧

考慮如圖 11 所示之兩根固定於桌面的鋼條，與水平的夾角固定為 45°。在

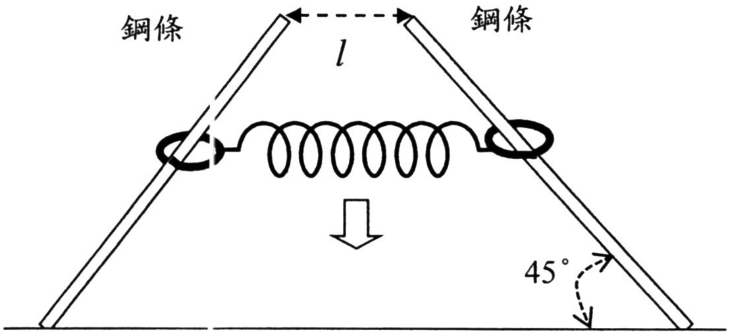


圖 11

鋼條上同一高度處各套一個質量相同鐵環，鐵環質量為$\frac{m}{2}$。兩鐵環中間繫以一條水平放置的理想彈簧，彈力常數為 k。兩鋼條頂端處的距離正好是彈簧的自然長度 l。鐵環由鋼條的頂端處，自靜止狀態放手，使鐵環下落。鐵環下滑一陣子後，鐵環彈簧組會向上反彈。

(1) 假設鐵環與鋼條間的摩擦可以忽略，反彈處距離頂點的高度差為何？

(2) 假設鐵環與鋼條間的動摩擦係數為 μ_k，那麼鐵環彈簧組向上反彈處距離頂點的高度差為何？

提示：$\int (a+bx)\cdot dx = ax+\frac{1}{2}bx^2$　(a、b 為常數)

2012 年第 13 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 43 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選試題參考解答

一、 (1) 51 m

解：

設 h 為所求的最大的建築物高度，ρ 為磚塊的密度，則該牆底面單位面所承受的力(即壓力)為 ρgh，故：

$$\rho gh = 2000\ \mathrm{kg/m^3} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times h = 1.0\times10^6\ \mathrm{N/m^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1.0\times10^6}{2000\times9.8} = 51\mathrm{m}$$

二、 (2) $\dfrac{v^2}{2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$

解：

當 $\mu_S > \tan\theta > \mu$ 時，質點會停在最頂端，假設 d 為質點上升之最大高度，則由能量守恆知道：質點在底部的動能等於最高點的位能加上摩擦力所消耗的能量，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgd\sin\theta + \mu mg\cos\theta\times d$$

因此可以解得： $d = \dfrac{v^2}{2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$ 。

(3) $\mu = \dfrac{3}{5}\tan\theta$

解：

設 h 為質點沿斜面滑行所能上升的最大高度，則由功能定理可知

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + (\mu mg\cos\theta)\cdot\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = mgh + \mu mgh\cot\theta \qquad (1)$$

按題設該質點滑回原先的出發點時，其速率減為 $v/2$，故同樣依據功能定理可得

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = 2(\mu mg\cos\theta)\cdot\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = 2\mu mgh\cot\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{8}mv^2 = 2\mu mgh\cot\theta \qquad (2)$$

由(1)和(2)兩式消去 v^2，可得

$$\mu = \frac{3}{5}\tan\theta$$

【另解】:

當 $\tan\theta > \mu_S > \mu$ 時，質點到達最高點後向下滑。設 h 為質點在沒有摩擦力的滑軌上上升之最大高度，即 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$。又設 h' 為質點在有摩擦力的滑軌上上升之最大高度，則 $mg(h-h') = \mu mg\cos\theta\frac{h'}{\sin\theta} = \frac{\mu mgh'}{\tan\theta}$，得

$$h' = \frac{h}{1+(\mu/\tan\theta)}$$

滑回原來位置將消耗兩倍能量，即

$$\frac{2\mu mgh'}{\tan\theta} = \frac{2\mu mgh}{\tan\theta+\mu}$$

因動能損失為原動能之 $\frac{3}{4}$，故 $\frac{2\mu mgh}{\tan\theta+\mu} = \frac{3}{4}mgh$，可得

$$\mu = \frac{3}{5}\tan\theta$$

三、 (4) $\frac{1}{3}\sqrt{2gh}$

解：

設A球自由落下到地面的時間為 t_A，

B 球上拋至它的最高點之時間為 t_B，

故 $\frac{1}{2}gt_A^2 = h$，得

$$t_A = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

又 $0 = v_0 - gt_B$，可得

$$t_B = \frac{v_0}{g}$$

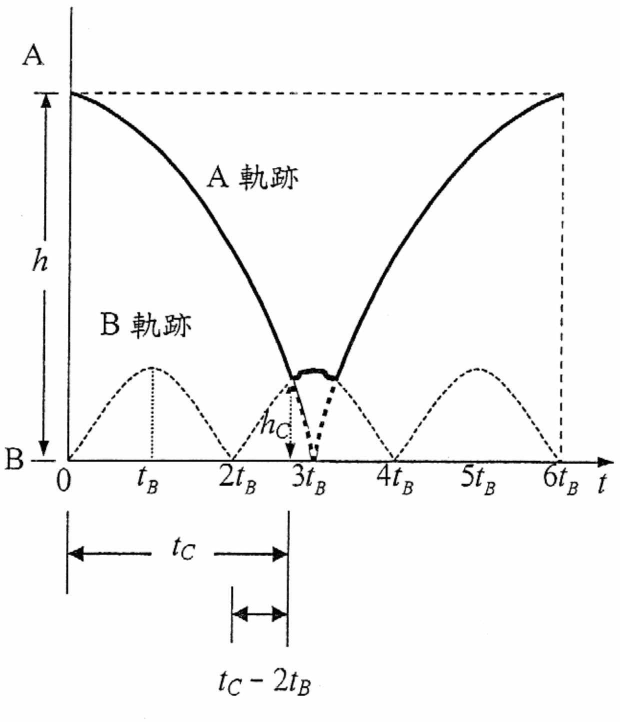


圖 1

B 球向上拋出後第一次碰撞地面反彈後，會與 A 球在高度 h_C 處發生第一次碰撞，且碰撞後 A，B 二球的速度交換；於是 B 球以 A 球的速度向下運動，且第二次會碰撞地面反彈，同時 A 球以 B 球的速度向上運動至 B 球之最高點再往下落，然後二球在高度 h_C 處再度

碰撞，速度再度交換，A 球以第一次碰撞瞬間之速度量值向上回到 A 球之原來高度，而 B 球碰地，反彈至它的最高點，再回到地面。過程如圖 1 所示，故其後形成週期性運動的條件為 $t_A = 3 \cdot t_B$，即 $\sqrt{\frac{2h}{g}} = 3\frac{v_0}{g}$，所以 $v_0 = \frac{g}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$

(5) $\frac{35}{324}h$

解：

參看圖 1，可得

$$h_C = v_0(t_C - 2t_B) - \frac{1}{2}g(t_C - 2t_B)^2$$

式中 $v_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$，$t_C = \sqrt{\frac{2(h-h_C)}{g}}$，$t_B = \frac{v_0}{g} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$。將之代入上式，可解得

$$h_C = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}\left(\sqrt{\frac{2(h-h_C)}{g}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2(h-h_C)}{g}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ h_C = \left(\frac{2}{3}\sqrt{h(h-h_C)} - \frac{4}{9}h\right) - \left((h-h_C) - \frac{4}{3}\sqrt{h(h-h_C)} + \frac{4}{9}h\right)$$

$$\Rightarrow\ h_C = \left(\frac{35}{324}\right)h$$

四、 (6) $\frac{2}{3}mg$

解：

由木板的運動方程式知：$Mg + f = N$，式中 f 為小球與細桿間之摩擦力，如圖 2 所示。故：$Mg + f = \frac{g}{3}(2m+3M)$，所以摩擦力為 $\frac{2}{3}mg$。

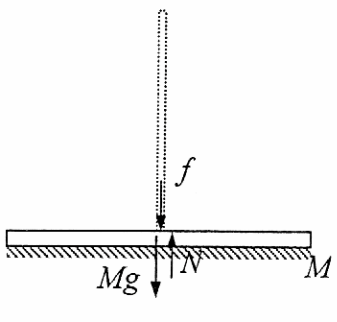


圖 2

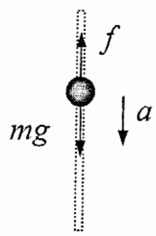


圖 3

(7) $\frac{1}{3}g$

解：

由小球的運動方程式知：$mg - f = ma$，如圖 3 所示，故加速度等於 $\frac{1}{3}g$。

五、 (8) $\underline{v_0 = gT/7}$

(9) $\underline{a = -g/49}$

解：

參看圖 4，圖上標註在各次閃光時，所見位置 1 水滴的位置座標：

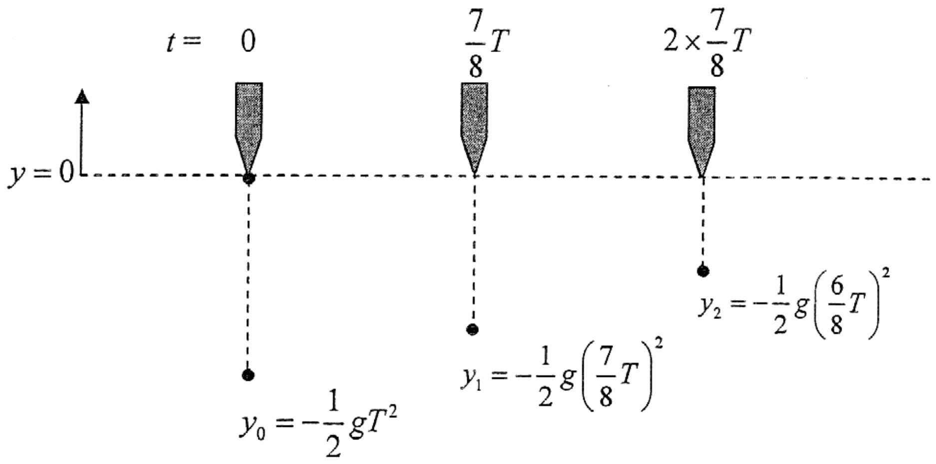


圖 4

題設水滴的視運動為等加速度運動，設 v_0 為初速度，a 為加速度，則該水滴的視軌跡方程式為

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1}$$

當 $t=0$ 時，應用上式，可得

$$y_0 = -\frac{1}{2}gT^2 \tag{2}$$

當 $t=\frac{7}{8}T$ 時，即第一次閃光，利用(1)和(2)兩式，可得

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{7}{8}T\right)^2 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0\left(\frac{7}{8}T\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{7}{8}T\right)^2 \tag{3}$$

當 $t=2\times\frac{7}{8}T$ 時，即第二次閃光，同理可得

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{6}{8}T\right)^2 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0\left(2\times\frac{7}{8}T\right) + \frac{1}{2}a\left(2\times\frac{7}{8}T\right)^2 \tag{4}$$

由(3)和(4)兩式，可解得

$$v_0 = \frac{1}{7}gT \text{ ，} a = -\frac{1}{49}g \tag{5}$$

六、 (10) $\underline{t_0}$

解：

由於BB彈與蘋果間沒有相對加速度，它們在鉛直方向的相對速度及相對高度維持為零，故BB彈與蘋果碰撞前之鉛直速度相同，因為碰撞前後動量守恆，故碰撞後的鉛直速度不變，因此蘋果落地所需的時間仍為 t_0。

七、 (11) $\underline{\dfrac{A}{\sqrt{2}} \approx 0.7A}$

解：

設液面高度為 H，當小孔與液面距離為 $\frac{1}{2}H$ 時，由伯努利原理知水小孔流出的初速為 $\sqrt{2g\frac{H}{2}} = \sqrt{gH}$。水柱下落 $\frac{1}{2}H$ 距離後，水平速率仍為 $\sqrt{gH}$，鉛直下落的速率亦為 $\sqrt{gH}$，故水柱落在桌面之前的速率為：$\sqrt{2gH}$。依據連續方程式 $A \cdot v =$ 定值，設落地前的最大速率會有最小的截面積 A'，則 $A \times \sqrt{gH} = A' \times \sqrt{2gh}$，故此水柱最小截面積為 $\dfrac{A}{\sqrt{2}} \approx 0.7A$。

八、 (12) $\underline{\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s}^{-2}}$

解：

指數無單位，所以 b 為長度的倒數，b 的單位為 m^{-1}，力的單位為 $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$，所以 A 的單位為 $\mathrm{m}^5 \cdot \mathrm{s}^{-2}$，故 $A \times b$ 的單位為 $\mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s}^{-2}$。

九、 (13) $\underline{\dfrac{\pi}{\sqrt{\left(\dfrac{GM}{R^3} - \Omega^2\right)}}}$

解：

使用一個固定於地球的座標系，以地心為原點，則在距離地心 r（$r \le R$）時，小球受到的重力 $F_G(r)$ 為：

$$F_G(r) = -\frac{GmM}{r^2}\left(\frac{r^3}{R^3}\right) = -\left(\frac{GmM}{R^3}\right)r$$

而離心力 $F_C(r)$ 等於 $m\Omega^2 r$，故小球受到的有效徑向作用力 $F(r)$ 為：

$$F(r)=F_G(r)+F_C(r)=-\left(\frac{GmM}{R^3}\right)r+m\Omega^2 r=-m\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)r$$

上式顯示此系統的有效位能$U(r)$與彈簧力位能具有同樣的形式，即彈簧力常數 k

為：$k=-m\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)$，故位能為

$$U(r)=\frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)r^2$$

小球的運動為簡諧振盪(如同彈簧)，其角頻率ω可由位能式$U(r)=\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$相比，得知為

$$\omega=\sqrt{\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)}$$

故小球由一端洞口到達通道另一端洞口所需的時間為

$$t=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)}}$$

(14) $\underline{R\times\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\Omega^2}}$

解：

由力學能守恆定律，可知小球在地心的速率 v 須滿足

$$0+U(R)=\frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R^3}-\Omega^2\right)R^2=\frac{1}{2}mv^2+U(0)=\frac{1}{2}mv^2$$

由上式解得

$$v=R\times\sqrt{\frac{GM}{R^3}-\Omega^2}$$

十、 (15) $\underline{\frac{h_2-h_1}{\ell}g}$

解：

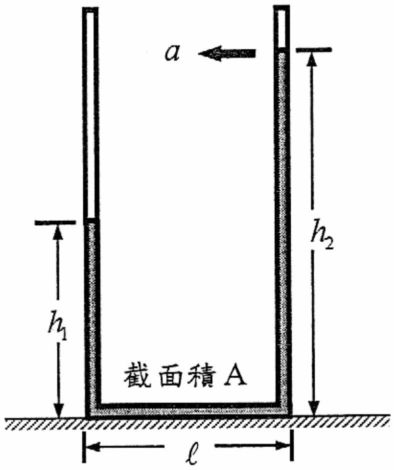


圖 5(a)

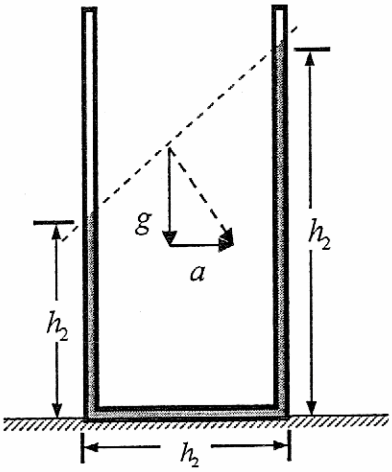


圖 5 (b)

由圖 5(a)知道底管液體兩端點的壓力差乘以截面積 A，即是底管液體的受力，因此

$$\rho g(h_2 - h_1)A = \rho \times A\ell \times a$$

故可以求得 $a = \dfrac{h_2 - h_1}{\ell} g$ 。

【另解】：

設連通管之加速度為 a，則以固定在連通管上之坐標來看，液體之總加速度必需垂直液面，如圖 5(b)所示，因此由幾何關係可得 $\dfrac{a}{g} = \dfrac{h_2 - h_1}{\ell}$，故 $a = \dfrac{h_2 - h_1}{\ell} g$ 。

十一、(16) $\underline{\dfrac{m}{A\rho}}$

解：

設圓筒底面積為 A，則 $mg = \rho Ahg$ ，即

$$h = \frac{m}{A\rho} \tag{1}$$

(17) $\underline{\dfrac{\rho gh\ell}{p_0 + \rho gh}}$

解：

又設平衡時，圓筒入水深度為 h'，理想氣體之壓力為 p，則因圓筒中之水與外面形成連通，故在小洞的位置桶內外一力要相同，即：

$$p_0 + \rho gh' = p + \rho gx \tag{2}$$

因為系統符合波義耳定律，所以：

$$p_0 \ell A = p(\ell - x) A \tag{3}$$

由上兩式可解得

$$h' = x + \frac{p_0}{\rho g}\frac{x}{\ell - x} \tag{4}$$

最後由此時圓筒所受之浮力等於其重量可得 $mg + Ax\rho g = Ah'\rho g$ ，利用(1)式 $mg = Ah\rho g$ ，得

$$h' = x + h \tag{5}$$

由(4)和(5)兩式可解得 $x = \dfrac{\rho g h \ell}{p_0 + \rho g h}$ 。

十二、(18) $h = F/(\rho g L^2)$

解：

如下圖 6 所示，平板 ab 上方之大氣壓力為 p_0 。設平板下方 f 處之液體壓力為 p，則因水平液面之靜液壓力等於大氣壓力 p_0，故 $p = p_0 - \rho g h$，由此可得平板因其上、下方之壓力差而受到的向下鉛直力為 $N = (p - p_0)L^2 = \rho g h L^2$ 。平板即將與液體分離時處於靜力平衡狀態，此時弧形液面上下端的表面張力沿水平方向作用，故正向拉力 $F = N = \rho g h L^2$ ，由是得 $h = F/(\rho g L^2)$ 。

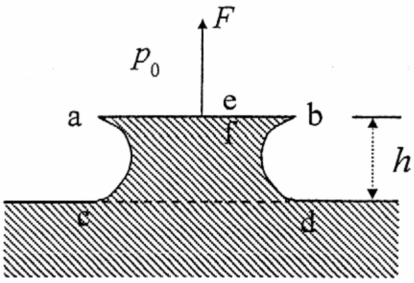


圖 6 向上提之正方形平板

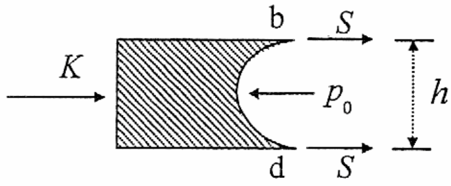


圖 7 右半部液體層之力圖

(19) $2L^2\sqrt{\rho g S}$ 。

解：

平板即將與液體分離時，在右半部的液體層，其鉛直截面與受力圖如圖 7 所示。沿水平方向，液體層右半部受到來自左半部液壓所產生的力 K，而若設右側弧形液面承受來自表面張力與大氣壓力的力為 R，則 $K = R$ 。但左半部液壓的平均值為：

$$\frac{1}{2}(p_0 + p) = \frac{1}{2}[p_0 + (p_0 - \rho g h)] = p_0 - \frac{1}{2}\rho g h$$

故 $K = Lh(p_0 - \frac{1}{2}\rho gh)$，而右半側弧形液面受到的力 R，來自大氣壓力$(=Lhp_0)$與表面張力$(=2LS)$，兩者反向，故 $R = Lhp_0 - 2LS$。將以上結果代入 $K = R$ 可得

$$Lh(p_0 - \frac{1}{2}\rho gh) = Lhp_0 - 2LS$$

上式經整理後可得液體層之高度 $h = 2\sqrt{S/(\rho g)}$，故由此式與(a)部分之結果可得

$$F = \rho ghL^2 = 2L^2\sqrt{\rho gS}$$

十三、(20) $-\left(\frac{M}{m+M}\right)h$

(21) $\left(\frac{m}{m+M}\right)h$

解：

當小木塊降至最低點時，其下降的鉛直高度為 h，設彈簧的最大壓縮量為 ℓ，此時小木塊和楔形木塊皆靜止，由能量守恆定律可得

$$mgh = \frac{1}{2}k\ell^2 \tag{1}$$

取置於水平光滑平面的參考系，以水平向右的方向為 x 軸，鉛直向上的方向為 y 軸，設小木塊自出發點到達最低點的水平和鉛直位移為 $(x,-h)$，式中 $x<0$，又楔形木塊在光滑平面上的水平位移為 X，則因整個系統(小木塊+楔形木塊+彈簧)在水平方向上不受力，在木塊的滑動過程中，系統質心的位置不變，故

$$mx + MX = 0 \;\Rightarrow\; X = -\frac{m}{M}x \tag{2}$$

相對置於斜面的參考系而言，小木塊的水平和鉛直位移為 $(x-X,-h)$，由於斜角為 45^0，且木塊緊貼斜面滑動，故小木塊運動時的限制方程式為

$$x - X = -h \tag{3}$$

$$\ell^2 = (x-X)^2 + (-h)^2 \tag{4}$$

由(3)和(4)兩式可得

$$\ell^2 = 2h^2 \tag{5}$$

將(5)式代入(1)式，可得小木塊下降的最大鉛直高度為

$$h = \frac{mg}{k} \tag{6}$$

將(3)式代入(1)式，可得

$$mx + M(x+h) = 0 \;\Rightarrow\; x = -\left(\frac{M}{m+M}\right)h \tag{7}$$

利用(2)和(7)兩式，可得

$$X=\left(\frac{m}{m+M}\right)h \tag{8}$$

十四、(22) $-a$、$\dfrac{I}{ma}$、$-\dfrac{I}{ma}$

解：

設另一點的座標為a'， 因為週期相等，故：

$$T_a=2\pi\sqrt{\frac{I+ma^2}{mga}}=2\pi\sqrt{\frac{I+ma'^2}{mga'}}$$

平方後得

$$T_a^2=\frac{I+ma^2}{mga}=\frac{I+ma'^2}{mga'}\rightarrow a'I+ma'a^2=aI+maa'^2$$

故可以解出a'，即：$a'I+ma'a^2=aI+maa'^2$，即

$(a'-a)I=maa'(a'-a)$，

可有兩組解；一為$(a'-a)=0$，另一組解為$\dfrac{I}{m}=aa' \Rightarrow a'=\dfrac{I}{ma}$：

第一組解得與原點距離為a的點具有相同的週期，第二組解得與原點距離為$\dfrac{I}{ma}$的點，也會有相同的週期。故鋁棒上共四點會有相同的週期，座標分別為a、$-a$、$\dfrac{I}{ma}$、$-\dfrac{I}{ma}$。

十五、(23) $F=\dfrac{3\mu_S MgR}{R+2r}$

解：

設溜溜球的加速度為a，角加速度為 α。因只滾動而不滑動，所以$a=R\alpha$，由平移運動方程式得

$$F-f=Ma$$

由轉動方程式可得

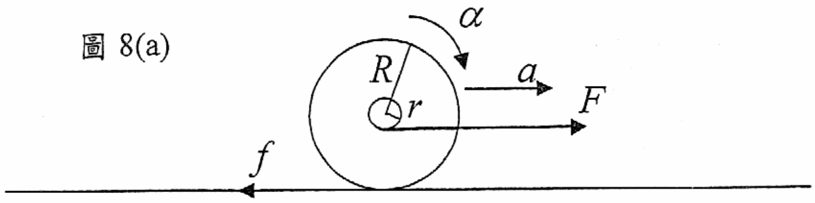
$$fR-Fr=\frac{1}{2}MR^2\alpha=\frac{1}{2}MRa=\frac{1}{2}(F-f)R$$

由上式可以解得：

$$F=\frac{3fR}{R+2r}$$

f 的最大值為 $\mu_S Mg$，所以 F 的最大值為 $F=\dfrac{3\mu_S MgR}{R+2r}$。

圖 8(a)



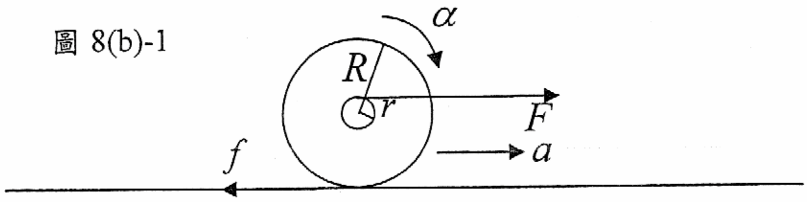
(24) $\underline{\dfrac{2F}{F+3\mu_S Mg}}$

解：

靜摩擦力的方向有下列的兩種可能性：

(i)靜摩擦力 f 向左，如圖 8(b)-1 所示。

圖 8(b)-1



由平移運動方程式得

$$F-f=Ma$$

由轉動方程式可得

$$rF+Rf=\frac{1}{2}MR^2\alpha=\frac{1}{2}MRa=\frac{1}{2}(F-f)R$$

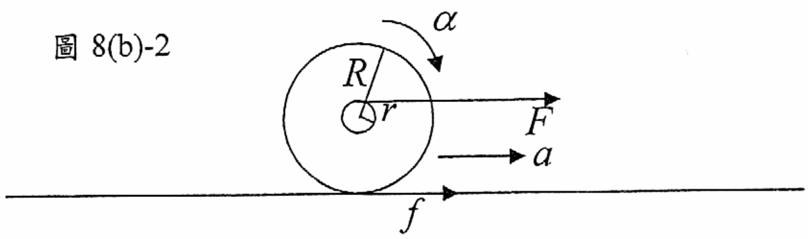
由上式可以解得

$$f=\left(\frac{R-2r}{3R}\right)F$$

上式中 F 為正值，且 $f\geq 0$，故 $R\geq 2r$，即 $R_{\min}=2r$。

(ii)靜摩擦力 f 向右，如圖 8(b)-2 所示。

圖 8(b)-2



由平移運動方程式得

$$F + f = Ma$$

由轉動方程式可得

$$rF - Rf = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa = \frac{1}{2}(F + f)R$$

由上式可以解得

$$f = \left(\frac{2r - R}{3R}\right)F$$

因為 $f \le \mu_S Mg$，故 $\left(\frac{2r - R}{3R}\right)F \le \mu_S Mg$，得

$$R \ge \left(\frac{2F}{F + 3\mu_S Mg}\right)r \quad \Rightarrow \quad R_{\min} = \left(\frac{2F}{F + 3\mu_S Mg}\right)r$$

比較上述兩種情況所得 $R_{\min}$ 的大小，可得溜溜球半徑 R 的最小值為

$$R_{\min} = \left(\frac{2F}{F + 3\mu_S Mg}\right)r$$

十六、(25) $\underline{(\rho_0 V_0 - m) - \rho_0 V_0 (\beta_L - \beta_g) T}$

解：

設加入的質量為 $M(T)$ 恰可使玻璃球在 T °C 時，停在液體中任意的位置。玻璃球的體積增加為 $V_0(1 + \beta_g T)$，而液體的密度變成 $\frac{\rho}{1 + \beta_L T}$。由阿基米德原理知重量與浮力相等，得

$$mg + M(T)g = \left[V_0(1 + \beta_g T) \times \frac{\rho_0}{1 + \beta_L T}\right]g$$

因為 $\beta_g T, \beta_L T << 1$，且當 $x << 1$ 時，$\frac{1}{1 + x} \cong 1 - x$，所以

$$\begin{aligned} M(T) &= V_0(1 + \beta_g T) \times \frac{\rho_0}{1 + \beta_L T} - m \\ &\cong V_0(1 + \beta_g T) \times \rho_0(1 - \beta_L T) - m \end{aligned}$$

在上式中保留至 T 的一次方項，可得

$$M(T) = (\rho_0 V_0 - m) - \rho_0 V_0 (\beta_L - \beta_g) T$$

十七、(26) $\underline{\frac{v_b^2}{2v^2 - v_b^2} v}$

解：

假設小蟲的飛行速率為 v_c 依據都卜勒效應，小飛蟲接受到超音波的頻率為

$f_b\dfrac{(v-v_c)}{(v-v_b)}$，而蝙蝠接受到自小飛蟲反射回來超音波頻率為

$$f_r = f_b\frac{(v-v_c)}{(v-v_b)}\frac{(v+v_b)}{(v+v_c)}$$

因此小飛蟲的飛行速率 $v_c = \dfrac{f_b(v+v_b)-f_r(v-v_b)}{f_b(v+v_b)+f_r(v-v_b)}v$。將題目中 $f_r = f_b(1+v_b/v)^2$ 的

條件代入，得

$$v_c = \frac{v_b^2}{2v^2-v_b^2}v$$

十八、(27) $\underline{6.9\times10^{-4}}$

解：

當理想氣體($PV = nRT$)的體積增加兩倍時，理想氣體所作的功等於

$$W' = \int_{V_i}^{2V_i} PdV = \int_{V_i}^{2V_i}\frac{nRT_i}{V}dV = nRT_i\ell n2$$

當氣體($P(V-B) = nRT$)體積增加兩倍時，氣體所作的功等於

$$W = \int_{V_i}^{2V_i} PdV = \int_{V_i}^{2V_i}\frac{nRT_i}{V-B}dV = nRT_i\ln(\frac{2V_i-B}{V_i-B}) = nRT_i\ln\left(2\cdot\frac{1-\dfrac{B}{2V_i}}{1-\dfrac{B}{V_i}}\right)$$

利用題目提示的近似，可得

$$W \approx nRT_i\left[\ln2+\ln\left(1+\frac{B}{2V_i}\right)\right] \approx nRT_i\left(\ln2+\frac{B}{2V_i}\right)$$

因為 $\dfrac{W-W'}{W'} = 5.0\times10^{-4} = \dfrac{B}{2V_i\ln2}$，故得

$$\frac{B}{V_i} = (2\ln2)\times5.0\times10^{-4} = 6.9\times10^{-4}$$

十九、(28) $\underline{230\text{K}}$

解：

假設 T_S 和 R_S 為太陽的溫度和半徑，由 Stefan-Boltzmann Law 知道太陽發出的黑體輻射總能量為 $\sigma T_S^4\left(4\pi R_S^2\right)$。若 R_M 為火星半徑，D_{SM} 是太陽與火星間距離，則火星所接受到的能量為 $\sigma T_S^4\left(4\pi R_S^2\right)\dfrac{\pi R_M^2}{4\pi D_{SM}^2}$。若火星的溫度為 T_M，則火星發出的黑體輻射總能量為 $\sigma T_M^4\left(4\pi R_M^2\right)$。當火星達到熱平衡時，從太陽吸收的能量會等於火星輻射出去的能量，即

$$\sigma T_S^4\left(4\pi R_S^2\right)\frac{\pi R_M^2}{4\pi D_{SM}^2}=\sigma T_M^4\left(4\pi R_M^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad T_M=\left(\frac{R_S}{2D_{SM}}\right)^{1/2}\times T_S=\left(\frac{7.0\times10^8}{2\times2.3\times10^{11}}\right)^{1/2}\times5800=230\text{K}$$

二十、(29) $W/4k$

解：

當小重物 W 置於桌面上的 P 點時，桌面的受力情形和桌腳的長度變化，如下面的側視圖所示。由於桌面上的 B 和 D 兩點對稱，故桌腳 B 和桌腳 D 的長度縮短量相等，圖 9 中的 $\Delta\ell_A=\ell-\ell_A$，$\Delta\ell_C=\ell-\ell_C$，$\Delta\ell=\ell-\ell_B=\ell-\ell_D$。

由於桌面不變形，由圖 9 中的幾何關係可得

$$\Delta\ell-\Delta\ell_C=\frac{1}{2}\left(\Delta\ell_A-\Delta\ell_C\right)$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\ell_A+\Delta\ell_C=2\Delta\ell \tag{1}$$

加重後的桌面處於靜力平衡的條件為

$$W=k\Delta\ell_A+2k\Delta\ell+k\Delta\ell_C \tag{2}$$

由(1)和(2)兩式可得：

$$W=4k\Delta\ell\quad\Rightarrow\quad\Delta\ell=\frac{W}{4k} \tag{3}$$

(30) $(3-4r)\dfrac{W}{4k}$

解：

參看圖 10，由於桌面處於靜力平衡，取 A 點為參考支點，則桌面所受的各力相對於 A 點的合力矩為零，即

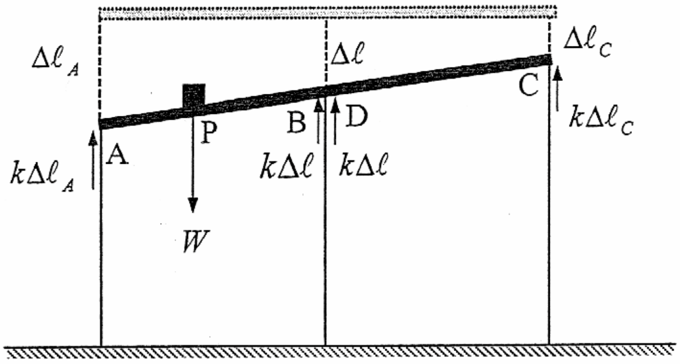


圖 9

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \overline{AP} \times \vec{W} + \overline{AB} \times \vec{F}_B + \overline{AD} \times \vec{F}_D + \overline{AC} \times \vec{F}_C = 0 \tag{4}$$

在上式中，$\vec{F}_B = \vec{F}_D$，其量值等於$k\Delta\ell$，可得

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \vec{F}_B + \overline{AD} \times \vec{F}_D &= \left(\overline{AO} + \overline{OB}\right) \times \vec{F}_B + \left(\overline{AO} + \overline{OD}\right) \times \vec{F}_D \\ &= 2\overline{AO} \times \vec{F}_B + \left(\overline{OB} + \overline{OD}\right) \times \vec{F}_B \\ &= 2\overline{AO} \times \vec{F}_B\end{aligned} \tag{5}$$

將(5)式代入(4)式，可得

$$-\left(r\overline{AC}\right) \times W + 2 \times \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right) \times k\Delta\ell + \left(\overline{AC}\right) \times k\Delta\ell_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ell_C = \frac{rW}{k} - \Delta\ell \tag{6}$$

利用(1)、(3)、和(6)三式，可得

$$\begin{aligned}\Delta\ell_A &= 2\Delta\ell - \Delta\ell_C = 2\Delta\ell - \left(\frac{rW}{k} - \Delta\ell\right) = 3\Delta\ell - \frac{rW}{k} \\ &= \frac{3W}{4k} - \frac{rW}{k} = (3 - 4r)\frac{W}{4k}\end{aligned} \tag{7}$$

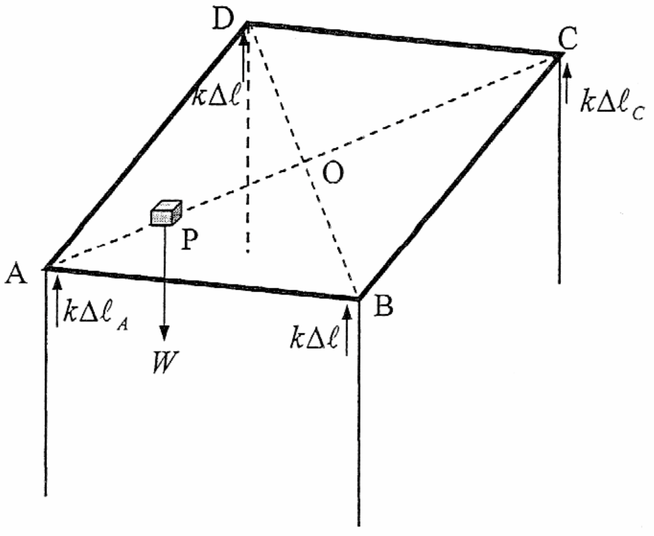


圖 10

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、海底的鐵路隧道

(1) 在運輸尖峰時，隧道內在任一時刻皆有 8 列火車在鐵道上行駛，故隧道內每單位時間內產生的熱量為

$$\frac{dQ}{dt}=8\times 4.0\times 10^{6}=3.2\times 10^{7}\ \mathrm{W}$$

設流經冷卻系統的水流量為 $\frac{dm}{dt}$，則每秒內該系統所能移除的熱量為 $\frac{dm}{dt}c\Delta T$，故：

$$\frac{dm}{dt}c\Delta T=\frac{dQ}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dm}{dt}=\frac{3.2\times 10^{7}}{4.2\times 10^{3}\times(30-5.0)}=300\,\mathrm{kg/s} \tag{1}$$

(2) 根據能量守恆定律，該理想冷卻機排放至外界的熱量為 $Q'=Q+W$ ，故

$$Q\left(\frac{T_0}{T}\right)=Q+W \quad\Rightarrow\quad W=Q\left(\frac{T_0}{T}-1\right) \tag{2}$$

(3) 由(2)式可知對冷卻機所作的功 W，與水流的溫度 T，以及自水流抽取的熱量 Q 有關。若溫度為 T，質量為 m 的水，在流經冷卻機的過程中，其溫度的變化量為 ΔT，則被冷媒抽取的熱量為

$$\Delta Q=-mc\Delta T \tag{3}$$

由(2)和(3)式，可得：

$$\Delta W=-mc\left(\frac{T_0}{T}-1\right)\Delta T \tag{4}$$

若水流的初溫為 T_0，末溫為 T_f，則將上式積分後，可得：

$$\int_0^{W_f}dW=-mc\int_{T_0}^{T_f}\left(\frac{T_0}{T}-1\right)dT$$

$$\Rightarrow\quad W_f=-mcT_0\ln\frac{T_f}{T_0}+mc(T_f-T_0) \tag{5}$$

對冷卻機所作的功等於所需輸入的能量，即 $E=W_f$，故由上式可得：

$$E=mcT_0\ln\frac{T_0}{T_f}-mc(T_0-T_f) \tag{6}$$

(4) 該冷卻機所需輸入的能量功率為

$$P=\frac{dE}{dt}=c\left(\frac{dm}{dt}\right)\left[T_0\ln\frac{T_0}{T_f}-(T_0-T_f)\right]$$

$$=4.2\times 10^{3}\times 300\times\left[293\times\ln\left(\frac{293}{278}\right)-(293-278)\right]$$

$$=5.0\times 10^{5}\ \mathrm{W}$$

二、鋼條上垂降的彈簧

(1) 因為整個系統左右對稱，所以可以認定兩鐵環在下滑過程會是等高的。

以最高點為垂直軸(y 軸)的原點，若下滑 $-y$ 的高度，則鐵環系統的重力位能 U_G 為：

$$U_G = -mgy \quad 。$$

因為鋼條與地面的夾角為 45°，若彈簧下滑 $-y$ 的高度，則伸長量為 $2y$，故彈簧的彈力位能 U_S 為：

$$U_S = \frac{1}{2}k\cdot(-2y)^2 = 2ky^2 \quad 。$$

總位能等於重力位能與彈力位能之和，即：

$$U = U_S + U_G = 2ky^2 - mgy \text{ ，}$$

總位能先縮小再增加。

因為起始處的總位能為零，動能為零，故總能量為零。因為過程中沒有摩擦損耗，因此反彈點即在 $U=0$，及 $y=0$，和 $y=\dfrac{mg}{2k}$ 處，故在距離頂點的下方處 $\dfrac{mg}{2k}$ 的位置，鐵環彈簧組向上反彈。

(2) 加上摩擦力之後，必須考慮摩擦力所做的功，即 $f_k = \mu_k \cdot N$，其中 N 為正向力。

正向力等於正力在垂直鋼條方向的投影加上彈力在垂直鋼條方向的投影：

$N = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{m}{2}g + k\cdot 2y\right)$，所以摩擦力等於：

$$f_k = \frac{\mu_k}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{m}{2}g + 2ky\right) 。$$

故摩擦力所做的功等於：

$$dW = -2f_k\cdot\sqrt{2}\cdot dy = -\mu_k(mg + 4ky)\cdot dy \quad ，$$

從頂端到高度為 $-y$ 處，摩擦力所作消耗之總能量為：

$$W = -\int_0^y \mu_k(mg + 4ky')\cdot dy' = -\mu_k\left(mgy + 2ky^2\right) 。$$

在反彈處動能為零，即：$U - W = 0$，因此：

$2ky^2 - mgy + 2\mu_k ky^2 + \mu_k mgy = 0$，

反彈處高度為 $y = \dfrac{mg - \mu_k mg}{2k + 2\mu_k k} = \dfrac{mg}{2k}\cdot\left(\dfrac{1-\mu_k}{1+\mu_k}\right)$。