

ANS.

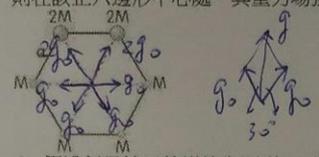
05.04.2016

萬有引力 2 小考

20160429 班級 座號 姓名

1. (DE) 若地表重力場強度減半，則於地表上的下列各項敘述哪些正確？  
 (A) 物體的重量不變 (B) 單擺擺動的週期變為原來的一半 (C) 水平作簡諧運動的彈簧振子，其振動週期變為原來的一半 (D) 在桌面上水平拋出一球，其飛行的時間變為原來的  $\sqrt{2}$  倍 (E) 人的立定跳遠能力（最遠距離）增倍。

2. 一邊長為  $a$  的正六邊形，在其各頂角處分別置放一固定的質點，各質點的質量如右圖所示，萬有引力常數  $G$ ，則在該正六邊形中心處，其重力場強度量值為 \_\_\_\_\_



$$g = 2g \cos 30^\circ = 2 \times \frac{GM}{a^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}GM}{a^2} \#$$

3. 假設行星繞日軌道皆為圓形，已知地球與火星的公轉半徑比為 2:3，則：

- (1) 地球與火星的速率比值為  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 (2) 地球與火星的面積速率比值為  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$(1) v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{2})$$

$$(2) \frac{dA}{dt} = \frac{\pi r^2}{T} \propto \frac{r^2}{T} = r^{\frac{5}{2}} \quad (\sqrt{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$$

4. 已知某衛星繞行星表面運行，週期為  $T$ 、速率為  $v$ ，萬有引力常數  $G$ ，則：

- (1) 該行星的半徑為 \_\_\_\_\_  
 (2) 該行星的質量為 \_\_\_\_\_

$$(1) T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow r = \frac{vT}{2\pi} \#$$

$$(2) v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \rightarrow M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{v^2}{G} \times (\frac{vT}{2\pi})^2 = \frac{v^3 T^2}{4\pi^2 G} \#$$



5. 牛頓在他的力學著作「自然哲學的數學原理」中附有一幅插圖，如右圖所示，該圖清楚地呈現牛頓心中的想法：「在地表高處將某物體以足夠大的水平速度拋出，該物體的運動將如衛星運動一般，繞地球進行圓周運動而不會落至地面」。假定拋體的軌道半徑約等於地球半徑，忽略空氣阻力，則：（地球半徑為  $6.4 \times 10^6$  公尺，質量為  $6.0 \times 10^{24}$  公斤）

- (1) 拋體的初速度值至少為 8 公里秒。  
 (2) 拋體在一天內可環繞地球約 17 圈。

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6}} \approx 8 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$(2) T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6.4 \times 10^6)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}} \approx 4.8 \times 10^3 \text{ (s)}$$

6. 假設地球可視為以正圓軌道繞日，而且現在發現一顆新彗星，其繞日週期為 216 年，它在近日點與太陽的距離是地球與太陽距離的 12 倍，那麼它在遠日點與太陽的距離經推算應該是地球與太陽距離的 60 倍。

$$r_{\text{遠}} = \frac{13}{12} r_{\text{地}} = \frac{r_{\text{地}}^3}{(216)^2} \rightarrow r_{\text{地}} = 36 \text{ (平均半徑)}$$

$$r_{\text{遠}} = 2 \times 36 - r_{\text{地}} = 72 - 12 = 60 \text{ 倍}$$

7. 外太空中有相距  $d$ ，質量分別為  $m$  及  $2m$  的雙星，在同一平面上互繞其共同質心作等速圓周運動，則質量  $2m$  之星體，萬有引力常數  $G$ ，其角速度 = \_\_\_\_\_

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G(m+2m)}} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3Gm}{d^3}}$$