

第5章 熱學

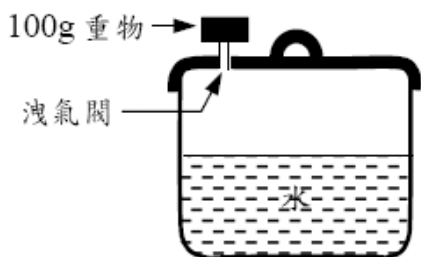
5-1 理想氣體方程式

範例題

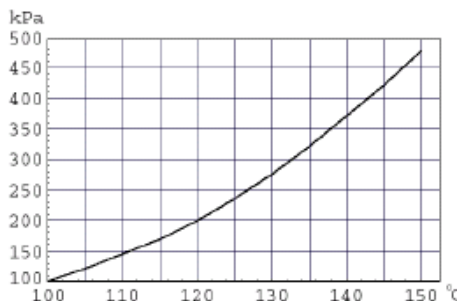
1. 圖(a)為一封緊的快鍋示意圖，鍋蓋上有一洩氣閥，閥口的大小為 5.00mm^2 ，圖(b)為蒸汽（壓力-沸點）溫度的關係圖。若以一重 100g 的重物壓在此洩氣閥上，則在一大氣壓下使用此快鍋時，鍋內的水沸點約為多少 $^{\circ}\text{C}$ ？

(A) 100°C (B) 105°C (C) 110°C (D) 120°C (E) 133°C 。

Ans : E



(a)



(b)

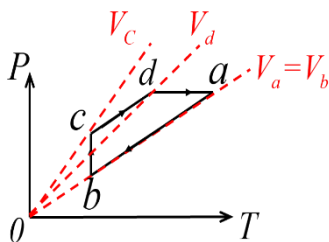
$$\text{鍋內氣體最大壓力 } P = P_0 + \frac{F}{A} = 10^5 + \frac{100}{5 \times 10^{-6}} \times 10 = 3 \times 10^5 \text{ [Pa]}$$

外界氣壓 重物壓力

2. 一定質量之理想氣體，在 P-T(壓力-絕對溫度)圖二上，由狀態 a 經圖中所示之過程再回到原狀態。圖中 ab 平行於 cd，且 ab 之延長線通過原點。下列敘述何者正確？

- (A) a 到 b 之過程中體積不變 (B) b 到 c 之等溫過程中體積減少
 (C) c 到 d 之過程中體積不變 (D) d 到 a 之等壓過程中體積增加
 (E) 狀態 c 之體積最小。

Ans: ABDE



$$\text{由 } PV = nRT \quad P = \frac{nR}{V}T$$

當 $\frac{nR}{V}$ 固定時 (分子數與體積固定)，P-T 為通過原點的斜直線 [斜率 $\frac{nR}{V}$]

$\therefore (a \rightarrow b)$ 體積相同

斜直線斜率為 $\frac{nR}{V}$ ，當 V 越大，斜率越小 $\therefore V_a = V_b > V_d > V_c$

3. 利用熱空氣可以升空，下面為與此有關的問題：

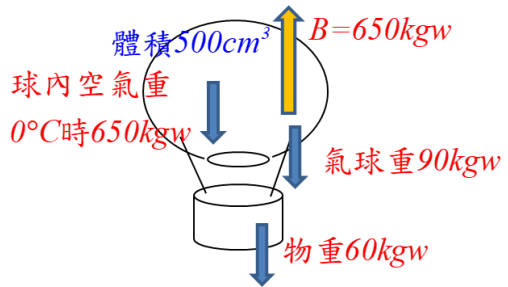
(1) 一開口容器內有氣體，質量為 M_0 ，其絕對溫度為 T_0 。今氣體溫度升至 T_1 ，該氣體逸出多少質量？（假定器外的溫度和壓力、容器的體積一直不變）

(2) 一氣球，質量為 90 公斤，容積為 500 立方公尺，底部有一開口通於大氣，兼便對球內空氣加熱（這種氣球俗稱熱氣球。今假定，加熱時球外空氣的溫度、壓力以及氣球容積均不變）在 0°C ，1 大氣壓時，空氣密度為 $1.3 \text{ 公斤}/(\text{公尺})^3$ 。此時球內空氣有多少公斤？球外空氣所形成的浮力有多少公斤重？

(3) 若欲使體重為 60 公斤的人升空，則球內空氣應逐出多少公斤？此時球內空氣應由 0°C 加熱至攝氏幾度？

Ans.: (1) $\frac{T_1 - T_0}{T_1} M_0$ (2) 球內空氣質量 650kg，浮力 650kgw

(3) 排出空氣質量 150kg，空氣溫度 81.9°C



總體積固定 浮力固定
 排出氣體降低重量
 使浮力大於重力 熱氣球才能上升

(1) 設氣體分子量 m ，氣體總質量 M 由 $PV = nmRT = MRT$ $M = \frac{PVm}{RT} \propto \frac{1}{T}$ 當 P, V 固定下

$$M_0 : M_1 = \frac{1}{T_0} : \frac{1}{T_1} \therefore M_1 = \frac{T_0}{T_1} M_0 \quad \text{溢出去的質量} = M_0 - M_1 = \frac{T_1 - T_0}{T_1} M_0$$

(2) $M = DV = 1.3 \times 500 = 650 [\text{kg}]$

$$B = DVg = 1.3 \times 500g = 650 [\text{kgw}]$$

(3) 設排出空氣質量 M' $B \geq Mg + 60g + 90g - M'g$ $M' \geq 150 [\text{kg}]$

剩下空氣質量 $= M - M' = 650 - 150 = 500 [\text{kg}]$

$$\text{由(1)} \quad M_0 : M_1 = \frac{1}{T_0} : \frac{1}{T_1} \quad 650 : 500 = \frac{1}{273} : \frac{1}{t+273} \therefore t = 81.9 [^\circ\text{C}]$$

4. 如圖，一容器內裝理想氣體，以能自由滑動的活塞隔成 A、B 兩室，在 27°C 時，A、B 兩室體積和壓力均為 V 和 P。今將 A 室緩緩加熱到 227°C，B 室保持在 27°C，則

(1) A 室的體積增為？(2) 最後兩室壓力？

Ans.: (1) $\frac{5}{4}V$ (2) $\frac{4}{3}P$

A室	B室	A室	B室
27 °C	27 °C	227 °C	27 °C
V	V	V ₁	V ₂
P	P	P'	P'

設平衡後 A 體積 V_1 ，B 體積 V_2 ，壓力 P'

(1) ∵ 原本 AB 兩室 PVT 相同 ∴ n 相同

∴ 總體積不變 ∴ $V_1 + V_2 = 2V$

see 平衡後 A B 兩室：P, n 相同 $PV = nRT$ $V \propto T$

$$\therefore V_1 : V_2 = 227 + 273 : 27 + 273 = 5 : 3 \quad V_1 = \frac{5}{5+3} \times 2V = \frac{5}{4}V$$

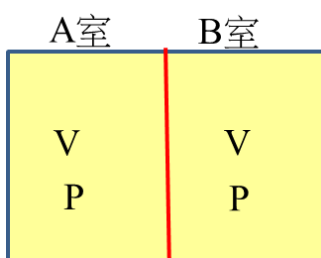
(2) see 平衡前後的 A 室：n 相同 $PV = nRT$ $P = \frac{nRT}{V} \propto \frac{T}{V}$

$$\therefore P : P' = \frac{27+273}{V} : \frac{227+273}{\frac{5}{4}V} = 3 : 4$$

5. 在一個導熱性良好的容器內，有一導熱良好的隔板，將容器分成等體積 V 的 A 、 B 兩室，如圖所示。今在 A 、 B 兩室中分別裝入質量均為 M 的氦氣與氖氣，將氦氣與氖氣視為理想氣體，若外界溫度恆為絕對溫度 T ，則（分子量：氦為 4；氖為 20）

- (1) 氦氣與氖氣的分子數比值為何？
- (2) 若將中央的隔板鬆開，不計摩擦力時，隔板會向哪一側移動？
- (3) 承上題，達成平衡時， A 、 B 兩室的體積比值為何？

Ans: (1) 5 (2) 會向 B 室一側移動 (3) 5



(1) 分子數 N 與莫耳數 n 成正比，意即

$$N \propto n = \frac{M}{\text{分子量}} \propto \frac{1}{\text{分子量}} \quad \therefore \frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{Ne}}} = \frac{20}{4} = 5$$

(2) 容器的導熱性良好，故兩氣體的平衡溫度均為 T 。

由 $P = \frac{NkT}{V} \propto N$ 知氦氣的壓力大於氖氣，所以隔板鬆開後，會向 B 室一側移動。

(3) 平衡時，兩邊氣體壓力相等，意即 $P_{\text{He}} = P_{\text{Ne}}$ 。由於氣體的溫度均為 T ，

$$P = \frac{kNT}{V} \quad \textcircled{R} \quad \frac{kN_{\text{He}}T}{V_{\text{He}}} = \frac{kN_{\text{Ne}}T}{V_{\text{Ne}}} \quad \setminus \quad \frac{V_{\text{He}}}{V_{\text{Ne}}} = \frac{N_{\text{He}}}{N_{\text{Ne}}} = 5$$

練功題

1. 太陽表面溫度為 6000K，附近氫氣的壓力為 2.5×10^{-3} 大氣壓，則太陽表面處每立方公尺有幾個氫分子？ *Ans: 3.05×10^{21} 個*

$$\text{由 } PV = NkT \quad \therefore N = \frac{PV}{kT} = \frac{2.5 \times 10^{-3} \times 1.01 \times 10^5 \times 1}{1.38 \times 10^{-23} \times 6000} = 3.05 \times 10^{21} \text{ [個]}$$

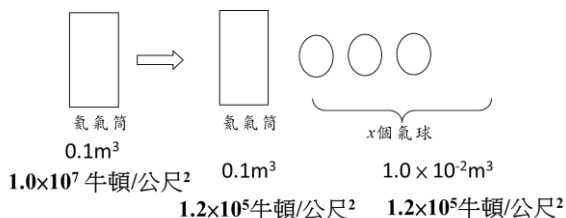
2. 用一筒氫氣吹氣球，氫氣筒之容積為 0.1 立方公尺，原來壓力為 1.0×10^7 牛頓/公尺²，每一汽球充氣後體積為 1.0×10^{-2} 立方公尺，壓力為 1.2×10^5 牛頓/公尺²。用該氫氣筒同溫下最多約可以吹出多少個這樣的氣球？ *Ans: 823 個*

設可吹 x 個氣球 由 $PV = nRT$ $n = \frac{PV}{RT}$

總分子數不變

$$\frac{1.0 \times 10^7 \times 0.1}{RT} = \frac{1.2 \times 10^5 \times 0.1}{RT} + x \times \frac{1.2 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-2}}{RT}$$

原本氣桶分子數
最後氣桶分子數
每個氣球分子數



∵ 溫度固定

$$\therefore 1.0 \times 10^7 \times 0.1 - 1.2 \times 10^5 \times 0.1 = x \times 1.2 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-2} \rightarrow x = 823.3 \text{ 最多 } 823 \text{ 個}$$

3. 一截面積為 10 cm^2 的均勻 U 形管內裝了水銀，末端連通一玻璃球，球內含氫氣 4 l ，右端開口，如圖 5 所示。若大氣壓力為 76 cmHg ，開始時室溫為 300 K ，U 形管末端水銀柱高度恰達玻璃球的底部，且恰與末端水銀柱同高。然後加熱於玻璃球體使得末端的水銀面較原來高度升高 2 cm ，如圖 6 所示。若只考慮玻璃球內氫氣受熱影響下，試問玻璃球內氫氣加熱後的溫度約為多少 K ？ *Ans: 317*

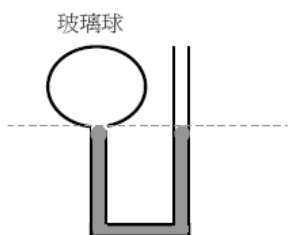


圖 5

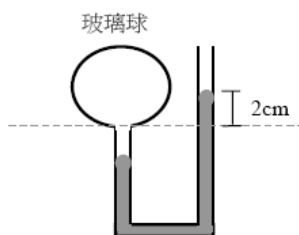


圖 6

氫氣原本體積 $4 \text{ l} = 4000 \text{ cm}^3$ 升溫後體積增加量為 $10 \times 2 = 20 \text{ [cm}^3]$

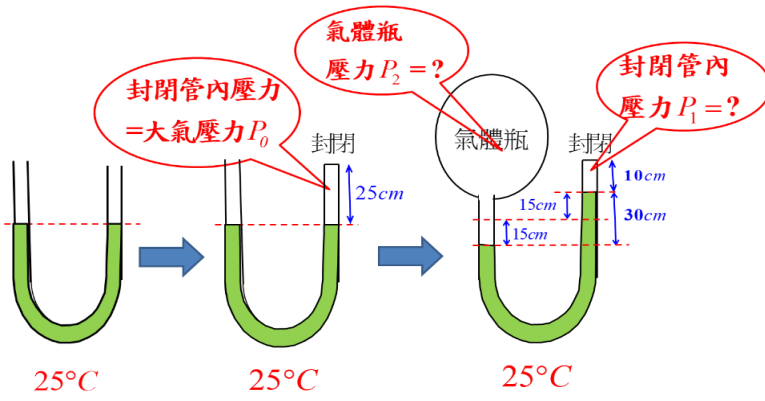
$$PV = nRT \quad \text{當 } n \text{ 相同時, } \frac{PV}{T} \text{ 相同} \quad \frac{76 \times 4000}{300} = \frac{(76+4) \times 4020}{T} \quad \therefore T = 317.36 \text{ [K]}$$

4. 一開管壓力計（內裝水銀）未接待測系統時，在 25°C 、 1 atm 下，將其一端開口封閉，此時閉口端空氣柱的長度為 25 cm 。今將其開口端接上一相同溫度的氣體瓶，連接後發現閉口端之空氣被壓縮成 10 cm ，則：

(1) 此時氣體瓶中的壓力為多少？

(2) 若忽略氣瓶氣體體積的變化（體積不變），則氣體瓶溫度為何時，壓力計中兩管的水銀面會等高？

Ans. (1) 2.89 atm (2) 102.9 K



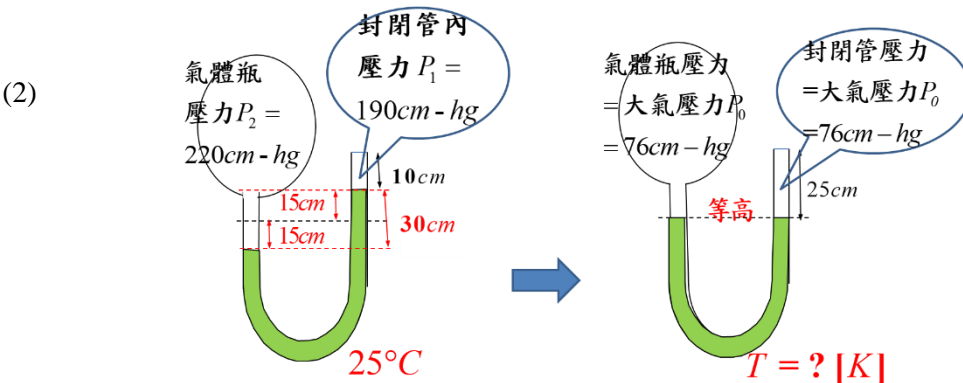
(1)

設最後閉口端氣體壓力 P_1 氣體瓶壓力 P_2

see 閉口端氣體比較接氣體瓶前與後：

$$\text{波以耳定律 } [PV \text{ 相等}] \quad 76 \times 25 = P_1 \times 10 \quad \therefore P_1 = 190 [\text{cm-Hg}]$$

$$\text{see 氣體瓶氣體} : P_2 = P_1 + \rho gh = 190 + 30 = 220 [\text{cm-Hg}] = \frac{220}{76} [\text{atm}] = 2.89 [\text{atm}]$$



see 氣體瓶氣體：兩邊等高時，氣體壓力 76 cm-Hg

$$\text{查理-給呂薩克定律 } \left[\frac{P}{T} \text{ 相等} \right] \quad \frac{220}{25+273} = \frac{76}{T} \quad \therefore T = 102.9 [\text{K}]$$

5. 在湖底 1 克的氫氣氣泡，在 27°C 時的體積為 $5.6 \times 10^3 \text{ cm}^3$ ，則湖深約為？
(設湖面壓力為 1 atm)

Ans: 12m

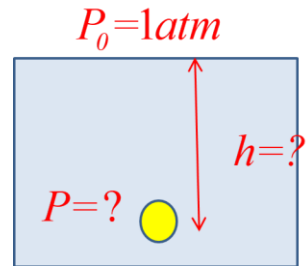
設湖深 h 公尺，氣泡壓力(湖底壓力) P [N/m^2]

$$\text{由 } PV=nRT \quad P \times 5.6 \times 10^3 \times 10^{-6} = \frac{1}{2} \times 8.31 \times (27+273)$$

$$\therefore P = 2.225 \times 10^5 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

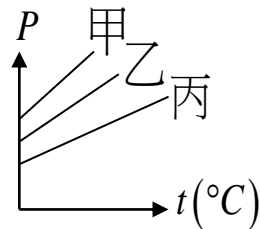
$$\text{由 } P = P_0 + \rho gh \quad 2.225 \times 10^5 = 1.01 \times 10^5 + 1000 \times 9.8 \times h$$

$$\therefore h = 12.4 \text{ [m]}$$



6. 如圖，甲、乙、丙三個大小不同的容器，裝入相同種類的理想氣體，其定容下的壓力與溫度的關係圖曲線，則 (A) 甲所裝氣體的分子數最多 (B) 甲的單位體積所含分子數目最多 (C) 甲的體積最大 (D) 三直線的延長線理論上應交於同一點為 -273.15°C (E) 甲斜線的斜率為 $1/273.15$ 。

Ans: BD



(A)(B)(C)(E)

$$\text{由 } PV=nRT \rightarrow P = \frac{nR}{V} T \quad \therefore \text{題意體積 } V \text{ 相同 } \therefore P-T \text{ 斜率 } \propto n$$

由圖知斜率 甲 > 乙 > 丙 所以分子數 甲 > 乙 > 丙

5-2 氣體運動論 5-3 氣體分子的速率分布**範例題**

1. 有一每邊長為 10 米之容器，內盛由數量級為 10^{-26} 公斤的分子所構成之理想氣體，在 300K 時，容器的上下兩面，由於重力場引起之壓力差，與容器內平均壓力之比值的數量級約為？ **Ans:** 10^{-4}

$$\text{重力場引起的壓力差 } \Delta P = \frac{Nmg}{A}$$

$$\text{分子碰撞產生的壓力 } P = \frac{NkT}{V}$$

$$\therefore \frac{\Delta P}{P} = \frac{\frac{Nmg}{A}}{\frac{NkT}{V}} = \frac{mg}{kT} \times \frac{V}{A} = \frac{mg}{kT} \times L = \frac{10^{-26} \times 9.8}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \times 10 \approx 10^{-4}$$

2. 一莫耳的氣體，其體積為 12.3 公升，壓力為 2 atm，則此氣體

(1) 總能為？ (2) 每一分子的平均動能為？ **Ans:** (1) $3.725 \times 10^3 [J]$ (2) $6.2 \times 10^{-21} [J]$

$$(1) E = \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} \times 2 \times 1.01 \times 10^5 \times 12.3 \times 10^{-3} = 3.725 \times 10^3 [J]$$

$$(2) \overline{E}_k = \frac{E}{N} = \frac{3.725 \times 10^3}{6 \times 10^{23}} = 6.2 \times 10^{-21} [J]$$

3. 太陽表面溫度為 6000 K，並含大量氫氣，則氫分子的方均根速率為？ **Ans:** 8650 m/s

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.317 \times 6000}{2 \times 10^{-3}}} = 8.65 \times 10^3 [m/s]$$

4. 甲、乙兩鋼瓶分別裝有 3 莫耳的氦氣及 1 莫耳的氫氣，兩鋼瓶維持固定溫度，甲鋼瓶內氦氣的溫度為 300 K，乙鋼瓶內氫氣的溫度為 450 K，且甲鋼瓶容積為乙鋼瓶容積的 2 倍。請問（氦的原子量為 4，氫的原子量為 40）

(1) 氦氣與氫氣的壓力比=_____ (2) 氦原子與氫原子的平均動能比=_____

(3) 氦原子與氫原子的方均根速率比=_____ **Ans:** (1) 1:1 (2) 2:3 (3) $\sqrt{300} : \sqrt{45}$

氦氣 3mol 2V 300K

氫氣 1mol V 450K

(A) 由 $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \propto \frac{nT}{V}$
 $\Rightarrow P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}} = \frac{3 \times 300}{2} : \frac{1 \times 450}{1} = 1 : 1$

(B)(C) 由 $\overline{E} = \frac{3}{2} kT \propto T$
 $\Rightarrow \overline{E}_{\text{甲}} : \overline{E}_{\text{乙}} = 300 : 450 = 2 : 3$

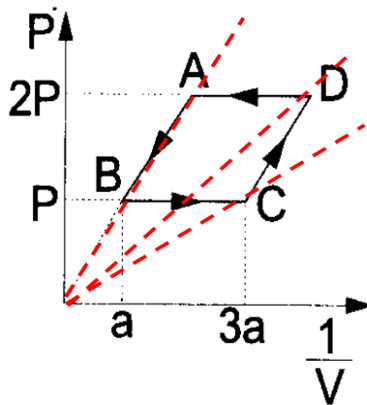
(D)(E) 由 $v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_0}} \propto \sqrt{\frac{T}{M_0}}$
 $\Rightarrow v_{\text{rms甲}} : v_{\text{rms乙}} = \sqrt{\frac{300}{4}} : \sqrt{\frac{450}{40}} = \sqrt{300} : \sqrt{45}。$

5. 圖為密閉容器內定量的單原子理想氣體的 $P - \frac{1}{V}$ 關係圖，ABCD 為平行四邊形，

AB 的延長線通過原點，該氣體由狀態 A 經圖示的過程再回到狀態 A，則：

- (1) 狀態 ABCD 的壓力比=_____ (2) 狀態 ABCD 的體積比=_____
- (3) 狀態 ABCD 的溫度比=_____ (4) 狀態 ABCD 的分子平均動能比=_____

Ans: (1) 2:1:1:2 (2) 6:12:4:3 (3) 6:6:2:3 (4) 6:6:2:3



$PV = nRT \rightarrow P = nRT \frac{1}{V} \because nR$ 固定 $\therefore P - \frac{1}{V}$ 圖中通過原點斜直線上任一點 T 相同

由圖知 AB 的 T 相同 $P \propto \frac{1}{V}$ 已知 B 點 $P_B = P \frac{1}{V_B} = a$ A 點 $P_A = 2P$ 則 $\frac{1}{V_A} = 2a$

由圖知 C 點 $\frac{1}{V_C} = 3a$ 則 D 點 $\frac{1}{V_D} = 4a$ (因為平行四邊形 AB 點與 CD 點的 $\frac{1}{V}$ 差值相等)

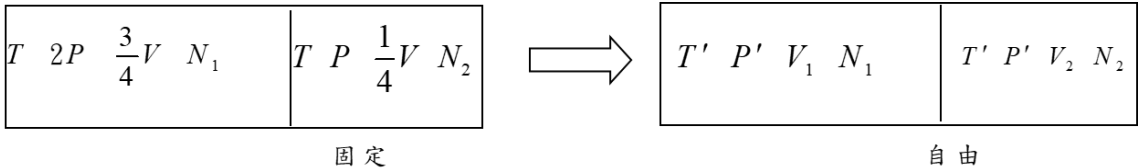
(1) $P_A : P_B : P_C : P_D = 2P : P : P : 2P = 2 : 1 : 1 : 2$

(2) $\frac{1}{V_A} : \frac{1}{V_B} : \frac{1}{V_C} : \frac{1}{V_D} = 2a : a : 3a : 4a = 2 : 1 : 3 : 4 \rightarrow V_A : V_B : V_C : V_D = \frac{1}{2} : \frac{1}{1} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 12 : 4 : 3$

(3) $PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR} \propto PV \quad T_A : T_B : T_C : T_D = (2 \times 6) : (1 \times 12) : (1 \times 4) : (2 \times 3) = 6 : 6 : 2 : 3$

6. 如圖所示，一個水平放置的絕熱容器，體積固定為 V ，以導熱性良好的活動隔板分成左、右兩室，內裝相同的理想氣體，容器與隔板的吸放熱均可忽略。最初限制隔板不動，使兩室的氣體溫度均為 T ，但左室的氣體壓力與體積分別為右室的 2 倍與 3 倍。後來拆除限制，使隔板可以左右自由移動，則在兩室的氣體達成力平衡與熱平衡後：

- (1) 左室與右室氣體的分子數比為_____ (2) 左室與右室氣體的體積比為_____
- (3) 右室的氣體壓力為原本隔板固定時右室氣體壓力的_____倍。 **Ans:DE**



∵ 隔版自由移動 ∴ 平衡時，兩室壓力相同

∵ 隔版導熱良好 ∴ 平衡時，兩室溫度相同

設兩容器分子數分別為 N_1, N_2 ，隔版自由平衡後溫度 T' ，壓力 P' 左室體積 V_1 右室體積 V_2

see 隔版固定時左右兩室： $\left(N = \frac{PV}{kT} \propto PV \right) \therefore N_1 : N_2 = 2 \times 3 : 1 \times 1 = 6 : 1$

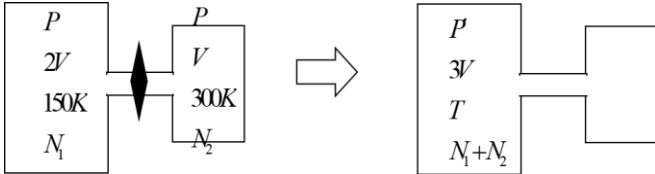
see 隔版自由平衡後左右兩室： $\left(V = \frac{NkT}{P} \propto N \right) \therefore V_1 : V_2 = N_1 : N_2 = 6 : 1 \quad \therefore V_1 = \frac{6}{7}V \quad V_2 = \frac{1}{7}V$

∵ 絕熱 ∴ 總能量不變且總分子數不變 $N_1 \frac{3}{2}kT + N_2 \frac{3}{2}kT = (N_1 + N_2) \frac{3}{2}kT' \therefore T' = T$

∵ 總能量不變 $\frac{3}{2} \cdot 2P \cdot \frac{3}{4}V + \frac{3}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{4}V = \frac{3}{2} P' (V_1 + V_2) \therefore P' = \frac{7}{4}P$

7. 兩個絕熱容器中裝有相同的理想氣體，壓力相等，其中一個容器的體積為 $2V$ ，溫度為 150K ，另一個容器的體積為 V ，溫度為 300K 。若使這兩個容器相互連通，則熱平衡時之溫度為？

Ans : 180K



設兩容器分子數分別為 N_1, N_2 平衡溫度 T 壓力 P'

$$\text{由 } PV = NkT \quad N = \frac{PV}{kT} \propto \frac{V}{T} \quad \therefore N_1 : N_2 = \frac{2V}{150} : \frac{V}{300} = 4 : 1$$

$$\therefore \text{絕熱} \therefore \text{能量不變} \quad N_1 \frac{3}{2} kT_1 + N_2 \frac{3}{2} kT_2 = (N_1 + N_2) \frac{3}{2} kT$$

$$4 \times 150 + 1 \times 300 = (4 + 1) \times T \quad \therefore T = \frac{900}{5} = 180 [K]$$

$$[\text{延伸}] \therefore \text{總能不變} \quad \frac{3}{2} P2V + \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} P'(V + 2V) \quad \therefore P' = P$$

練功題

1. 對於理想氣體，下列敘述中有那些是正確的？

- (A) 分子間的電磁交互作用不能忽略 (B) 氣體的壓力是由分子與容器器壁的碰撞而產生 (C) 氣體溫度與分子平均速率成正比 (D) 分子朝各方向運動的機率都相同 (E) 分子的大小不能被忽略 (F) 就理想氣體而言，在相同的溫度時，任何一個氣體分子的平均移動動能皆相等，和氣體的種類無關。

Ans : BDF

2. 絕對溫度為 T 的某理想氣體密封於一個立方盒內，如圖所示。依氣體動力論，下列數學式中何者錯誤？註： v_x 代表分子速度 \vec{v} 在 x 軸方向之分量，分子速率 $v = |\vec{v}|$ ，分子的方均根速率以 v_{rms} 表示， $\langle v_x \rangle$ 代表所有分子 v_x 的平均值，餘類推。 k_B 為波茲曼常數， m 為分子質量。(A) $\langle v_x \rangle = 0$ (B) $\langle v \rangle \neq 0$ (C) $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ (D) $v_{rms}^2 = \langle v^2 \rangle$ (E)

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{2m}}$$

Ans : E

(A) \because 分子數目是巨大的，分子運動具有方向性，且隨機無規則， x 、 y 、 z 三方向的向量彼此獨立互不干涉

$$\therefore \langle \vec{v} \rangle = 0 = \langle v_x \rangle + \langle v_y \rangle + \langle v_z \rangle \Rightarrow \langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

(B) 速率無方向性 \therefore 分子速率的平均值 $\langle v \rangle \neq 0$

$$(C) \therefore \begin{cases} \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \\ \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$(D) v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \Rightarrow v_{rms}^2 = \langle v^2 \rangle$$

$$(E) \frac{1}{2} m v_{rms}^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

3. 一氣體密封於一具有可自由滑動無摩擦的活塞之圓筒內，氣體體積 0.5 米^3 ，高度 1 米，活塞重 $5 \times 10^4 \text{ N}$ ，當時大氣壓力為 10^5 N/m^2 ，則圓筒中氣體分子的總動能為？

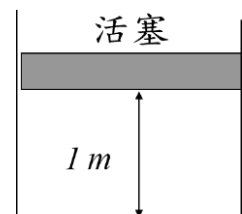
Ans: $1.5 \times 10^5 \text{ J}$

$$\text{活塞面積 } A = \frac{0.5}{1} = 0.5 [\text{m}^2]$$

$$E = \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} \left(P_0 + \frac{F}{A} \right) V$$

活塞重造成壓力

$$= \frac{3}{2} \left(10^5 + \frac{5 \times 10^4}{0.5} \right) \times 0.5 = 1.5 \times 10^5 [\text{J}]$$



4. 密閉容器內裝有 0.5 升，1atm，27°C 的氮氣，當加熱至 127 °C 時，則氮氣的總動能增加多少？ **Ans: 25J**

$$\text{總能變化量 } \Delta E = N \frac{3}{2} k \Delta T$$

$$PV = NkT \quad N = \frac{PV}{kT}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= N \frac{3}{2} k \Delta T = \frac{PV}{kT} \frac{3}{2} k \Delta T = \frac{3}{2} PV \frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \times 1 \times 1.01 \times 10^5 \times 0.5 \times 10^{-3} \times \frac{127 - 27}{27 + 273} \\ &= 25.25 [J] \end{aligned}$$

5. 氧氣分子的方均根速率等於地球表面的脫離速度時，溫度應升至多少 K？（地球半徑 ≈ 6400 公里） **Ans: 1.6×10^5 K**

$$\text{束縛能 } E_b = -E \quad \text{脫離動能 } K_e = -U_g$$

$$\text{分子平均動能 } \frac{3}{2} kT = \frac{GMm}{R} = mgR \quad \therefore T = \frac{2}{3} \frac{mgR}{k}$$

6. 有 AB 兩種理想氣體，其壓力比 1 : 2，分子的方均根速率比 2 : 1，則兩氣體的密度比為？ **Ans: 1 : 8**

$$PV = \frac{1}{3} N m v_{rms}^2 \rightarrow P = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} v_{rms}^2 = \frac{1}{3} \rho v_{rms}^2 \quad \therefore \rho = \frac{3P}{v_{rms}^2} \propto \frac{P}{v_{rms}^2}$$

7. 有兩種理想氣體，其氣體分子的質量、方均根速率及分子數為 m_1 、 m_2 、 v_1 、 v_2 、 N_1 、 N_2 ，兩者混合平衡後第一種分子的方均根速率為？ **Ans :** $\sqrt{\frac{N_1 m_1 v_1^2 + N_2 m_2 v_2^2}{(N_1 + N_2) m_1}}$

絕熱 總能量不變 平衡後溫度相同 平均動能相同

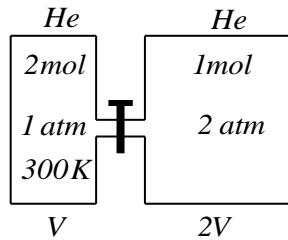
$$N_1 \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + N_2 \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = (N_1 + N_2) \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \quad \therefore v_1' = \sqrt{\frac{N_1 m_1 v_1^2 + N_2 m_2 v_2^2}{(N_1 + N_2) m_1}}$$

8. 如圖所示，A、B 兩容器體積比為 1：2，分別充 2 mole 之 He 及 1 mole 之 He，最初 A 之絕對溫度為 300 K，壓力為 1 atm，而 B 之壓力為 2 atm，則

(1) A、B 兩氣體之方均根速率比為何？

(2) 若無能量散失，則混合後之壓力為何？

(3) 若能量無散失，則混合後之溫度為何？ **Ans:** (1) $1:2\sqrt{2}$ (2) $\frac{5}{3}$ [atm] (3) 1000 [K]



$$(1) v = \sqrt{\frac{3PV}{Nm}} \propto \sqrt{\frac{PV}{N}} \therefore v_A : v_B = \sqrt{\frac{1 \times 1}{2}} : \sqrt{\frac{2 \times 2}{1}} = 1:2\sqrt{2}$$

$$(2) \text{能量不變 } \frac{3}{2}P_1V_1 + \frac{3}{2}P_2V_2 = \frac{3}{2}P(V_1 + V_2) \quad 1 \times 1 + 2 \times 2 = P \times (1+2) \therefore P = \frac{5}{3} [\text{atm}]$$

$$(3) \text{由 } PV = NkT \therefore T = \frac{PV}{Nk} \propto \frac{PV}{N}$$

$$\text{比較混合前A與混合後的A+B: } 300:T = \frac{1 \times 1}{2} : \frac{\frac{5}{3} \times (1+2)}{2+1} = 3:10 \therefore T = 1000 [\text{K}]$$

9. 兩絕熱容器內充以相同理想氣體，兩者的壓力、體積和絕對溫度分別為(P, V, T₁)

及 (P, 2V, T₂)。在兩者連通混合達平衡時，氣體的絕對溫度為？ **Ans:** $\frac{3T_1T_2}{T_2+2T_1}$

$$\text{總分子數不變 } PV = nRT \quad n = \frac{PV}{RT} \propto \frac{PV}{T} \quad \frac{P \times V}{T_1} + \frac{P \times 2V}{T_2} = \frac{P' \times 3V}{T} \therefore T = \frac{3P'}{\frac{P}{T_1} + \frac{2P}{T_2}}$$

$$\text{絕熱 總能量不變 } \frac{3}{2}PV + \frac{3}{2}P \times 2V = \frac{3}{2}P' \times 3V \therefore P' = P \therefore T = \frac{3P'}{\frac{P}{T_1} + \frac{2P}{T_2}} = \frac{3T_1T_2}{T_2+2T_1}$$

[補充] 熱力學第一定律

練功題

1. 依照氣體運動論，在絕對溫度為 T 時，理想氣體分子的平均移動動能為 $\frac{3}{2}kT$ ， k 為波茲曼常數。設絕對溫度為 T 時，在裝有活塞的密閉氣室內，有 N 個某種單原子的理想氣體分子，加熱使氣溫增加 ΔT ，而維持氣室內氣壓不變，則所加的熱能 = ?

Ans: $\frac{5}{2}kN\Delta T$

熱力學第一定律 $\Delta U = \Delta Q - W$

氣溫增加 ΔT $\Delta U = \frac{3}{2}kN\Delta T$

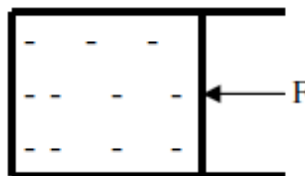
理想氣體方程式 $PV = NkT \xrightarrow{P, N \text{ 固定}} P\Delta V = Nk\Delta T \rightarrow W = P\Delta V = Nk\Delta T$

熱力學第一定律 $\Delta Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}kN\Delta T + Nk\Delta T = \frac{5}{2}kN\Delta T$

2. 如圖所示，定量的理想氣體密封於一絕熱氣室內，氣室的右側裝有一可以活動的氣密活塞。今緩慢對活塞施以一水平力，使活塞向左移動一段距離後，氣室的體積減少，若忽略活塞與氣室內壁間的摩擦力，並以 P 表氣體壓力， T 表氣體溫度， U 表氣體內能，則 P 、 T 、 U 三者各自有何變化？

- (A) P 增加， T 增加， U 減少
- (B) P 減少， T 減少， U 增加
- (C) P 增加， U 增加， T 減少
- (D) T 減少， U 減少， P 增加
- (E) P 增加， T 增加， U 增加。

Ans: E



絕熱 $\Delta Q = 0$

體積變小 $W < 0$

熱力學第一定律 $\Delta U = \Delta Q - W > 0 \rightarrow \Delta U = \frac{3}{2}kN\Delta T > 0 \rightarrow \Delta T > 0$

理想氣體方程式 $PV = NkT$ 當 $V \downarrow T \uparrow$, 則 $P \uparrow$

[補充] 熱容量與比熱、潛熱

練功題

1. 將 15°C 、6.0 公斤的冷水與 80°C 、9.0 公斤的熱水混合，忽略水與環境的熱交換，則（水的比熱為 $1.0 \text{ cal/g} \cdot ^{\circ}\text{C}$ ）
- (1) 冷、熱水的熱容量各為何值？ (2) 熱平衡的末溫為何？
- (3) 熱水在熱平衡過程中所釋放的熱量為多少？
- (4) 將上述冷水、熱水與初溫 54°C 、質量 100 公克的銅塊一起混合，則平衡的末溫為何？（銅的比熱為 $0.093 \text{ cal/g} \cdot ^{\circ}\text{C}$ ）

Ans : (1) 冷水 $6.0 \times 10^3 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}$ 熱水 $9.0 \times 10^3 \text{ cal/}^{\circ}\text{C}$ (2) 54°C (3) $2.3 \times 10^5 \text{ cal}$ (4) 54°C

(1) 由 $C=sm$ ，知

冷水熱容量為 $C_1=(1.0) \times (6.0 \times 10^3)=6.0 \times 10^3 \text{ (cal/}^{\circ}\text{C)}$ 。

熱水熱容量為 $C_2=(1.0) \times (9.0 \times 10^3)=9.0 \times 10^3 \text{ (cal/}^{\circ}\text{C)}$ 。

(2) 令熱平衡的末溫為 t ，由冷水吸收的熱量等於熱水釋放的熱量知
 $(6.0 \times 10^3)(t-15)=9.0 \times 10^3 \times (80-t)$ ，得 $t=54^{\circ}\text{C}$ 。

(3) $Q=Ct=(9.0 \times 10^3)(80-54)=2.3 \times 10^5 \text{ (cal)}$ 。

(4) 54°C

2. 將質量同為 100 公克的 70°C 的熱水和 0°C 的冰塊，放入絕熱容器內，當達成熱平衡時
- (1) 末溫為何？ (2) 容器內有幾公克的冰？ (3) 容器內有幾公克的水？

Ans : (1) 0°C (2) 12g (3) 188 g

(1) 100 公克的冰全部熔化所需熱量 $Q_1=100 \times 80=8.0 \times 10^3 \text{ (cal)}$ 。

100 公克的水其溫度由 70°C 降為 0°C 時，放出熱量

$Q_2=100 \times 1.0 \times 70=7.0 \times 10^3 \text{ (cal)}$ 。

由 $Q_1 > Q_2$ ，表示冰無法全部熔化，所以末溫為 0°C 。

(2) 令冰熔化的質量為 m ，由吸收的熱量等於放出的熱量
 $7.0 \times 10^3 = m \times 80$ ，得 $m=88 \text{ (g)}$ 。

所以剩餘冰的質量為 $100-88=12 \text{ (g)}$ 。

(3) 水的總質量為 $100+88=188 \text{ (g)}$ 。

(4) 20°C

3. 圖中，表示某物質質量 5 公克受熱由固體變為氣體的關係圖，熱源每分鐘提供 10 卡熱量，則：(A) 此物質未加熱時為固態，溫度為 -10°C 。
 (B) 此物質吸收了 20 卡的熱量後，溫度升至 20°C ，開始熔化
 (C) 此物質的熔化熱與汽化熱的比為 3 : 4 (D) 此物質在液態時的比熱為 $1 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ 。
 (E) 此物質吸收 30 卡熱量時成為固液態共存，其中固體，液體的質量比為 1 : 2。

Ans : ABC

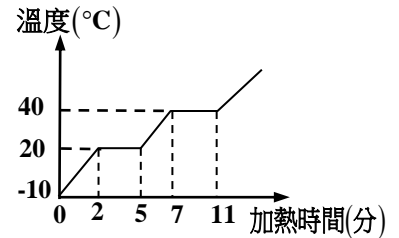
(C) 熔化熱 ($t = 2 \sim 5$ 分) : 熔化熱 ($t = 7 \sim 11$ 分) = $(5 - 2) : (11 - 7) = 3 : 4$

(D) 液態 ($t = 5 \sim 7$ 分) : 比熱 $s = \frac{H}{m\Delta t} = \frac{(7-5) \times 10}{5 \times (40-20)} = 0.2 [\text{cal} / \text{g}^{\circ}\text{C}]$

(E) 20 卡用來升溫, 只剩 $30 - 20 = 10$ [卡] 用來相變(固 \rightarrow 液)

全部熔化需熱 $(5 - 2) \times 10 = 30$ [卡]

\therefore 只有 $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ 相變成液態, $\frac{2}{3}$ 依然維持固態



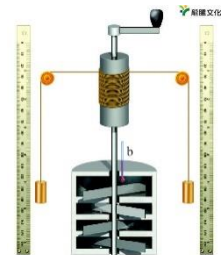
4. 「焦耳熱功當量實驗」中，兩重錘各重 2500 公克，每次重錘緩緩下落 1 米，以帶動葉片以攪動容器中 400 公克的水，共下落 42 次，容器熱容量 100 卡/克，若水的初溫為 14.5°C ，若絕熱良好，則最後水溫為何？ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Ans: 15.5°C

$$n2m_{\text{重錘}}gh = (C_{\text{容器}} + m_{\text{水}}s)\Delta T \times 4.2$$

$$42 \times 2 \times \frac{2500}{1000} \times 10 \times 1 = \left(100 + \frac{400 \times 1}{\text{公克}} \right) \Delta T \times 4.2$$

$$\therefore \Delta T = 1 [^{\circ}\text{C}]$$



5. 質量為 100g 及 200g 之兩鉛球，鉛的比熱為 $0.031 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ ，在同一直線上，以 250 m/s 及 200 m/s 之速度相向運動，設兩球碰撞後合為一體，且所生的熱均被兩者吸收，則鉛球溫度上升幾 $^{\circ}\text{C}$ ？

Ans: 約 173°C

合體損失的力學能 = 升溫的熱能

$$\frac{1}{2} \times \frac{0.1 \times 0.2}{0.1 \times 0.222} (250 + 200) = (100 + 200) \times 0.031 \times \Delta T \times 4.2$$

$$\therefore \Delta T \approx 173 [^{\circ}\text{C}]$$

[補充] 熱膨脹

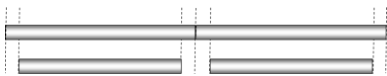
練功題

1. 在 20°C 由長60公尺的鐵軌築成的鐵路，在 40°C 時兩鐵軌間恰無空隙。試問：

(1) 在 20°C 時兩鐵軌間之空隙應若干？

(2) 如溫度降到 7°C 時，鐵軌間的空隙有多大？（鐵的線膨脹係數 $=11\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ）

$$\text{Ans: (1)} 1.32\times 10^{-2} [m] \text{(2)} 2.18\times 10^{-2} [m]$$



$$L_{40} = L_{20}(1 + \alpha \times 20) \therefore L_{40} - L_{20} = L_{20} \times \alpha \times 20 = 60 \times 11 \times 10^{-6} \times 20 = 1.32 \times 10^{-2} [m]$$

$$L_7 = L_{20}(1 - \alpha \times 13) \therefore L_{40} - L_7 = L_7 \times \alpha \times 33 = 60 \times 11 \times 10^{-6} \times 33 = 2.18 \times 10^{-2} [m]$$

2. 一鐵尺在 0°C 時，經過校正，在溫度 30°C 時，測量一鉛棒得20公尺，若考慮熱膨脹效應，則鉛棒在 0°C 時真正長度為何？（鐵的線膨脹係數 $=11\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ 、鉛的線膨脹係數 $=28.9\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ）

$$\text{Ans: } 19.98866\text{m}$$

設鐵尺 0°C 刻度每 m 長度 a_0 ，鉛棒 0°C 長度 b_0

鐵尺 30°C 刻度每 m 長度 a_{30} ，鉛棒 30°C 長度 b_{30}

$$\frac{b_{30}}{a_{30}} = 20 \quad \text{求} \quad \frac{b_0}{a_0} = ?$$

$$\frac{b_{30}}{a_{30}} = \frac{b_0(1 + 28.9 \times 10^{-6} \times 30)}{a_0(1 + 11 \times 10^{-6} \times 30)} = \frac{b_0}{a_0} (1 + (28.9 - 11) \times 10^{-6} \times 30) = 20$$

$$\therefore \frac{b_0}{a_0} = 20(1 - (28.9 - 11) \times 10^{-6} \times 30) = 20 - 0.01074 = 19.98926 [m]$$

3. 一單擺的擺線由線膨脹係數為 $1.8 \times 10^{-5} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$ 的材料製成，在 25°C 時，此單擺的週期為 T ，在 0°C 時，此單擺的週期為 T_0 ，則 $T - T_0$ 約為？

$$\text{Ans: } 2.25 \times 10^{-4} T_0$$

當溫度為 30°C 時，此鐘擺動恰好準確 $T_{30}=1$ 秒

當溫度為 15°C 時， T_{15} 小於1秒

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \propto \sqrt{L} \quad \frac{T_{15}}{T_{30}} = \frac{\sqrt{L_{15}}}{\sqrt{L_{30}}} = \left(\frac{L_{30}(1 - \alpha \times 15)}{L_{30}} \right)^{\frac{1}{2}} = (1 - \alpha \times 15)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{15}{2} \alpha$$

$$\therefore T_{15} = \left(1 - \frac{15}{2} \alpha \right) T_{30}$$

4. 設有一鐘，其擺為黃銅所製，當溫度為 30°C 時，此鐘擺動恰好準確，問在 15°C 時，每日要差多少秒？($\alpha=18.9\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$) **Ans:** 快12.25.秒

時鐘每日跑過格數就是顯示時間

時鐘每日時間差=

$$\begin{aligned} \frac{86400}{T_{15}} - \frac{86400}{T_{30}} &= 86400 \times \left(\frac{1}{T_{15}} - \frac{1}{T_{30}} \right) = 86400 \times \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{15}{2}\alpha\right)T_{30}} - \frac{1}{T_{30}} \right) \\ &= 86400 \times \left(\frac{\frac{15}{2}\alpha}{\left(1 - \frac{15}{2}\alpha\right)T_{30}} \right) = 86400 \times \frac{15}{2}\alpha \left(1 + \frac{15}{2}\alpha \right) = 86400 \times \frac{15}{2}\alpha \end{aligned}$$

每日要差多少秒？ $86400 \times \frac{\Delta t}{2} \alpha$

溫度較準確時高，則時間較慢 溫度較準確時低，則時間較快

5. 有一玻璃容器，其球狀部分的容積為 V_0 ，如圖所示，且球上連接一支細玻璃管。已知在 0°C 時，某液體恰好裝滿圓球，該容器的線膨脹係數為 α 而液體的體膨脹係數為 $\gamma (> 3\alpha)$ ，則整體溫度由 0°C 上升至 25°C 時

- (1) 球體的容積增加多少？ (2) 液體的體積增加多少？ (3) 玻璃管中液體的體積為何？
 (4) 0°C 時細長玻璃管的截面積為 A_0 ，則 25°C 時玻璃管內的液柱長度為何？

Ans: (1) $75\alpha V_0$ (2) $25V_0\gamma$ (3) $25V_0(\gamma - 3\alpha)$ (4) $\frac{75V_0\left(\frac{\gamma}{3} - \alpha\right)}{A_0(1+50\alpha)}$

(1) 由體膨脹公式 $\Delta V_0 = V_0\gamma\Delta t$ ，知球體的容積增加

$$\Delta V_0 = 25V_0(3\alpha) = 75\alpha V_0。$$

(2) 由體膨脹公式 $\Delta V = V_0\gamma\Delta t$ ，知液體的體積增加 $\Delta V_2 = 25V_0\gamma。$

(3) 玻璃管內的液體體積為 $\Delta V_2 - \Delta V_1 = 25V_0(\gamma - 3\alpha)。$

(4) $\frac{75V_0\left(\frac{\gamma}{3} - \alpha\right)}{A_0(1+50\alpha)}$

