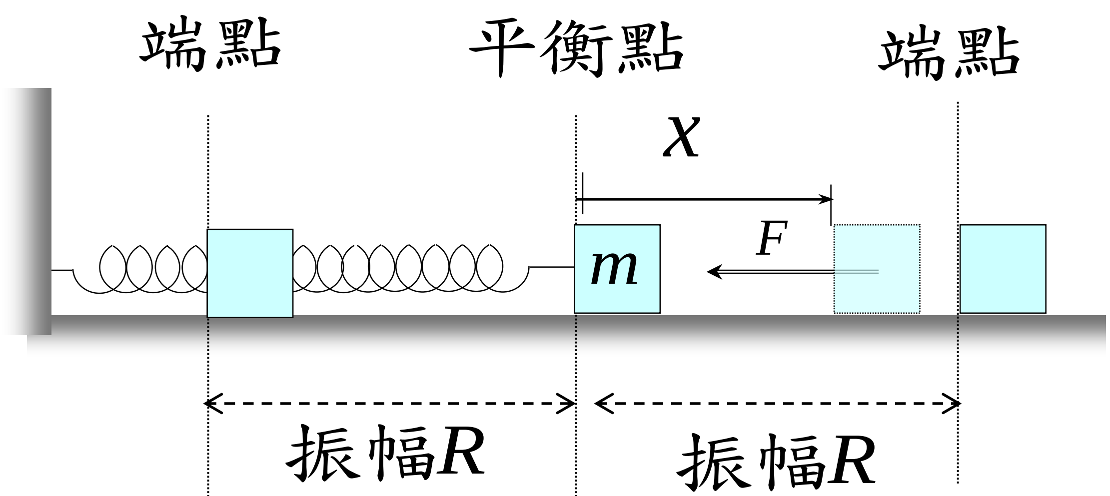
# 單元二：簡諧運動（*Simple Harmonic Motion* ： *S.H.M*）

## 一、簡諧運動：最簡單的週期性規律的來回振動，為直線運動。

**1.** 定義：以平衡點為原點，物體運動時，若所受合力和位置向量量值成正比 ，而合力方向恆和位置向量方向相反【合力方向指向原點】時之運動。

**2.** 公式： $\boxed{\vec{F}=-k\vec{x}}$ $k$：力常數（單位：$N/m$）

【型式】物體運動以平衡點為中心，在兩端點間做來回對稱的往復週期性運動，如：彈簧的振動。



***3.*** 名詞定義：

(1) 平衡點($O$)：簡諧運動體所受合力為零之點。

(2) 位置向量($x$)：以平衡點為原點運動體之位置。

(3) 端點：簡諧運動體速度為零的位置：

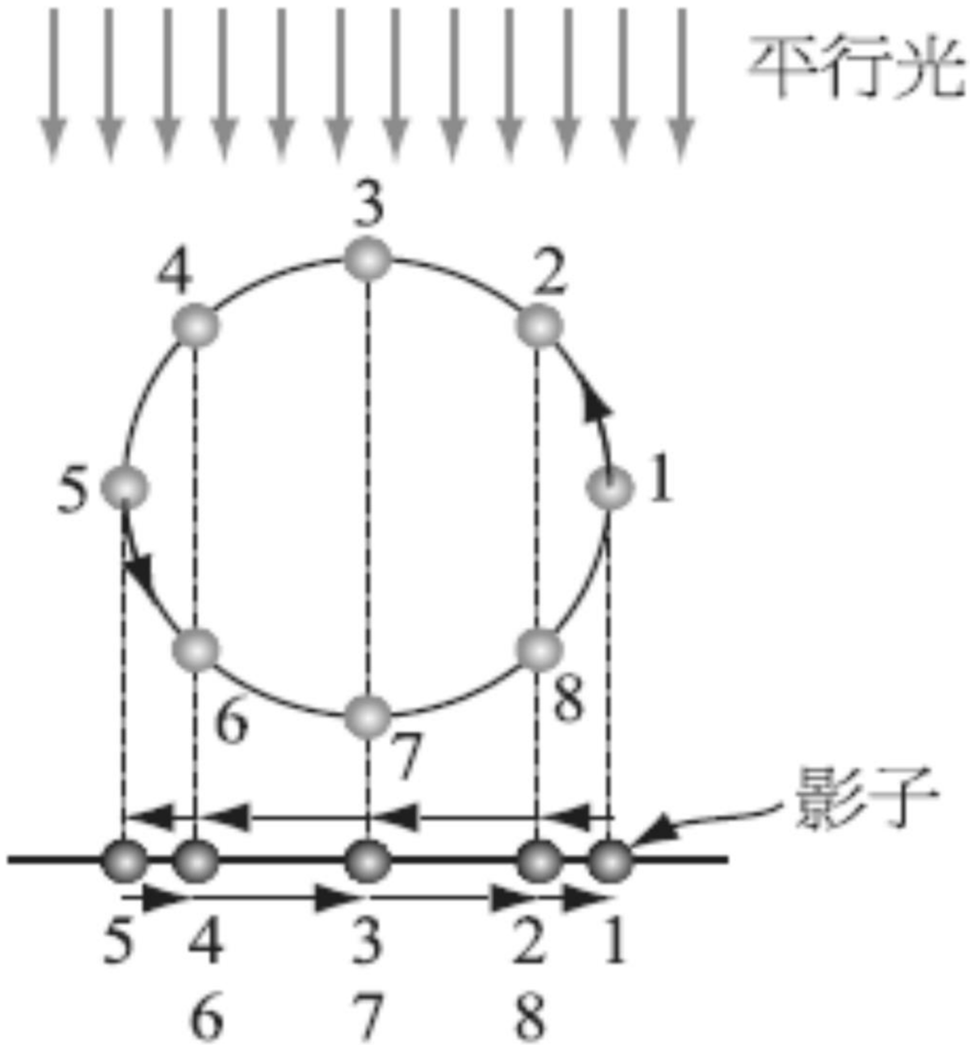
(4) 振幅($R$)：由平衡點到端點之距離。

(5) 週期($T$)：在直線上往返一次所需的時間。

註：

簡諧運動為直線運動、變速度運動、變加速度運動、變力運動。

**二、簡諧運動的分析：** 利用等速率圓周運動的“參考圓”在直徑方向上的投影來分析簡諧運動。



## 簡諧運動的"參考圓"：

等速率圓周運動在直徑方向上的投影，就是簡諧運動。

1 若一作簡諧運動的物體質量$m$，以$O$點(平衡點)為中心，振幅$R$，週期$T$。

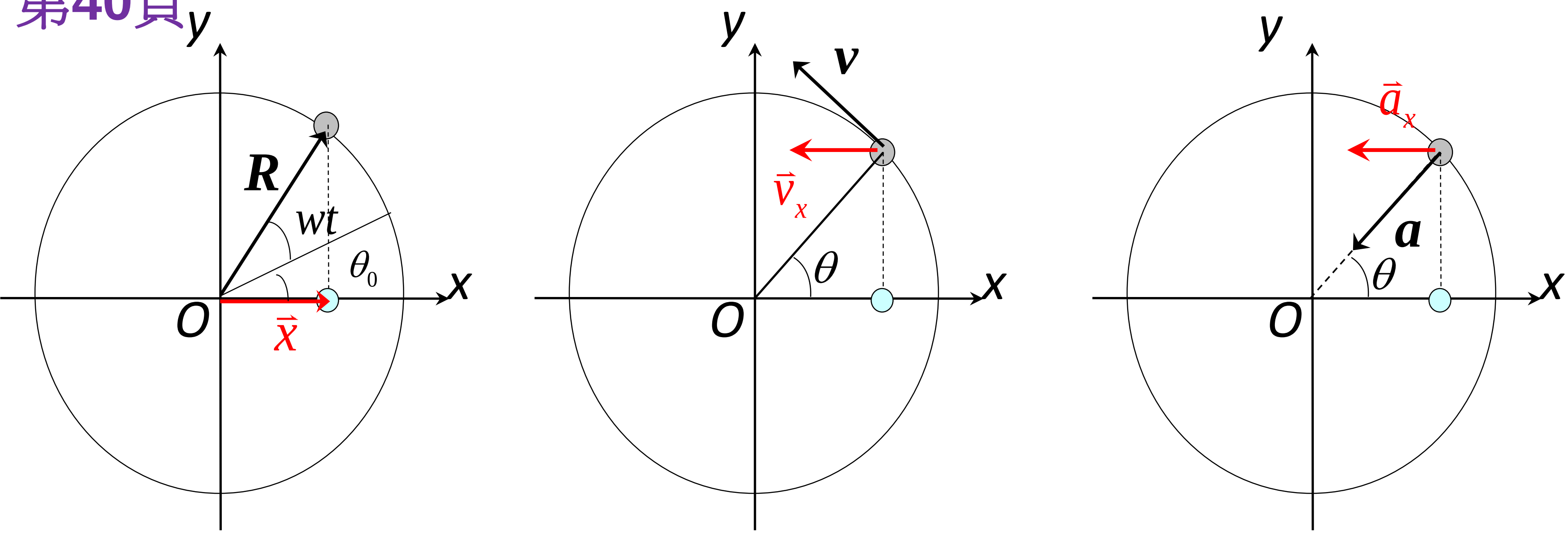
。

2 則其"參考圓"的半徑$R$（＝振幅$R$）、週期$T$、(角速率$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$、速率 $v=R\omega=\dfrac{2\pi R}{T}$ )、做**<u>逆時針旋轉</u>**，以圓心$O$為座標原點。

3 **<u>相位角</u>** $\theta$：時間 $t$ 時，物體對應圓周運動位置向量與+x軸夾角

**<u>初始相位角</u>** $\theta_0$ ：時間$t=0$時，物體對應圓周運動位置向量與+x軸夾角，又稱為<u>相位常數</u>）

∴.時間t時的<u>相位角</u> $\theta=\omega t+\theta_0$




$$\vec{x}=R\cos\theta\vec{i}=R\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i}$$

$$\overrightarrow{v_x}=-v\sin\theta\vec{i}=-R\omega\sin\theta\vec{i}=-R\omega\sin(\omega t+\theta_0)\vec{i} \qquad \left[R\omega=\frac{2\pi R}{T}\right]$$

$\theta$=90°、270°（平衡點）有最大值$v_x=R\omega$

$$\overrightarrow{a_x}=-a_C\cos\theta\vec{i}=-R\omega^2\cos\theta\vec{i}=-R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i} \qquad \left[R\omega^2=\frac{4\pi^2R}{T^2}\right]$$

$\theta$=0°、180°（端點）有最大值$a_x=R\omega^2$

$$\overrightarrow{a_x}=-\omega^2\vec{x} \Rightarrow F=-m\omega^2x=-kx$$

$m$、$\omega$、$k$為常數，

∴ 為S.H.M。

**2.** 簡諧運動的特性：:

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{x} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{x}}$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{x} = -k\vec{x} \quad \boxed{\text{力常數 } k = m\omega^2}$$

簡諧運動的週期： $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

[說明]　簡諧運動的週期即為“參考圓”的週期： $T = \frac{2\pi}{\omega}$

找到簡諧運動的受力 *F* 與位移 *x* 的比例常數 *k*，即可得週期：

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{x} = -k\vec{x} \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**3.** 其他關係：

（1）位移與速度關係：$\dfrac{x^2}{R^2}+\dfrac{{v_x}^2}{R^2\omega^2}=1$

（2）速度與加速度關係：$\dfrac{{v_x}^2}{R^2\omega^2}+\dfrac{{a_x}^2}{R^2\omega^4}=1$

（3）作用力與時間關係：$F=-kx=-kR\cos\left(\omega t+\theta_0\right)$

【 $F$-$t$ 關係圖軌跡為正(餘)弦函數圖，
$F$-$x$ 關係圖軌跡為通過原點斜直線 】

**4.** 討論：

（1）SHM的平衡點：（$\theta$=90°、270°）位移為零、速度最大

加速度為零、受合力為零。

$$\boxed{v_{max} = \frac{2\pi R}{T} = R\omega}$$

（2）SHM的端點：（$\vartheta$=0°、180°）位移最大R、速度為零、

加速度最大、受合力最大

$$\boxed{a_{max} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = R\omega^2}$$

$$\boxed{f = kR = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} = mR\omega^2}$$

（3）SHM的振福：等於“參考圓”的<u>半徑</u>。
SHM的周期：等於“參考圓”的<u>週期</u>。
SHM的角頻率：等於“參考圓”的<u>角速度</u>。

**（4）SHM合力或加速度方向恆指向原點。**

註：

（1）解簡諧運動題目，先想辦法找出力與位移關係，求出 $k$ 值。

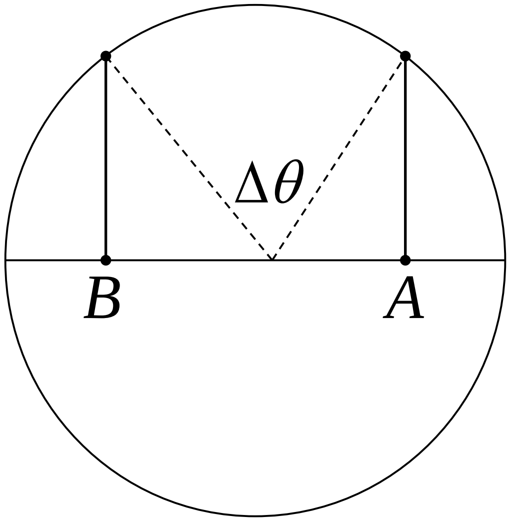
（2）畫"參考圓"瞭解各物理量的關係：

$$\begin{cases} \text{對應圓半徑} R = \text{振幅} R \\ \text{對應圓角速度} \omega \left( k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \right) \\ \text{週期} T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$

（3）求時間:

$$t = \frac{\Delta\theta[rad]}{\omega[rad/s]}$$

$$\text{或 } t = \frac{\Delta\theta[rad]}{2\pi} \times T = \frac{\Delta\theta[°]}{360} \times T$$



***1.***一物體作簡諧運動（*S.H.M.*），其位置與時間的關係為

$$X(t)=2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

，其中*X*與*t*的單位為公尺與秒，則：

（A）此簡諧運動的週期為？振幅為？

（B）*2*秒末物體的位置為？物體的速度為？

（C）物體最大加速度的量值為？

（D）若物體的質量為*1*公斤，則受力與位置關係為？

[解析]

$$X(t)=2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow v(t)=-2\times 2\pi\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a(t)=-2\times(2\pi)^2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\vec{x}=R\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i}$$

$$\vec{v_x}=-R\omega\sin(\omega t+\theta_0)\vec{i}$$

$$\vec{a_x}=-R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i}$$

$(A)$ $R=2[m]$

$$\omega=\mathbf{2}\pi[m/s]\rightarrow T=\frac{\mathbf{2}\pi}{\omega}=\mathbf{1}[s]$$

$(B)$

$$x(2)=2\cos\left(2\pi\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=1[m]$$

$$v(2)=-2\times 2\pi\sin\left(2\pi\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}\pi[m/s]$$

[解析]

$$X(t)=2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow v(t)=-2\times 2\pi\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a(t)=-2\times(2\pi)^2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$(C)$

$$a_{max}=R\omega^2=\boldsymbol{2}\times(\boldsymbol{2}\pi)^2=\boldsymbol{8}\pi^2\left[m/s^2\right]$$

$(D)$

$$\left[F=-m\omega^2 x\right]$$

$$F=-1\times(2\pi)^2 x=-4\pi^2 x$$

$$\left[F=ma\right]$$

$$F(t)=1\times\left[-2\times(2\pi)^2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-8\pi^2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)[N]$$

**2.**一質點作簡諧運動，位置與時間關係為

$$x = 10\,sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

（$x$：cm；$t$：$s$），則此質點：（A）振幅為？振動的週期為？（B）振動的最大速率為？最大加速度為？（C）速度與時間關係為？　　（D）加速度與時間關係為？

[解析]

$$x = 10\ \sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow x = 10\ \cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 10\ \cos\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

***1.***某質點作*S.H.M.*，其振幅為*15* cm、週期為*4 s*，求：

（1）速度及加速度之最大值？

（2）質點由平衡位置移至*12* cm處之最短時間？

（3）質點離開平衡位置*9* cm處時之速度及加速度量值？

（4）質點由平衡位置歷 $\frac{1}{8}$ 週期時之速度值？

[解析]

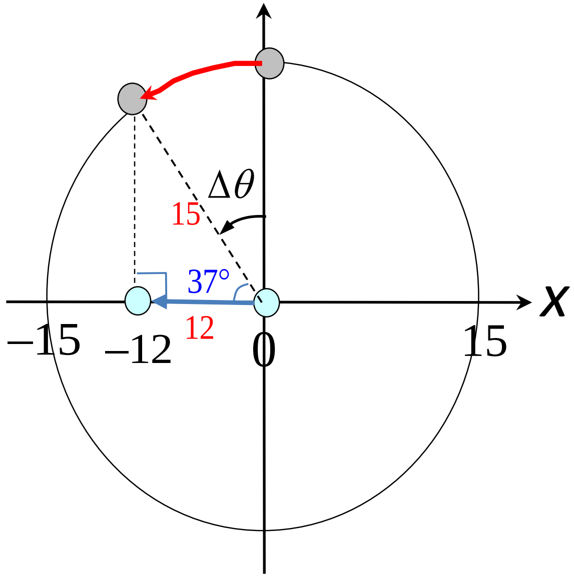
(1) $R=15[cm]$ $T=4[s]\rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}[s]$

$$v_{max}=\frac{2\pi R}{T}=R\omega=15\times\frac{\pi}{2}=\frac{15\pi}{2}[cm/s]$$

$$a_{max}=\frac{4\pi^2R}{T^2}=R\omega^2=15\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{15\pi^2}{4}[cm/s^2]$$

[解析]

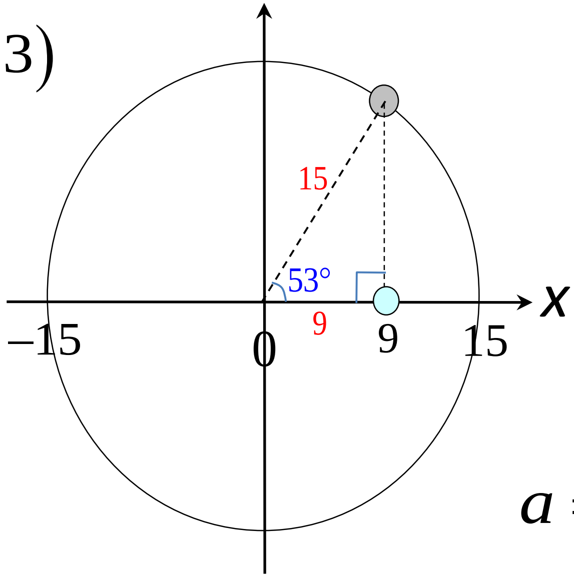
(2)




$$\Delta\theta = 90° - 37° = 53°$$

$$\Delta t = \frac{53}{360} \times T = \frac{53}{90}[s]$$

(3)



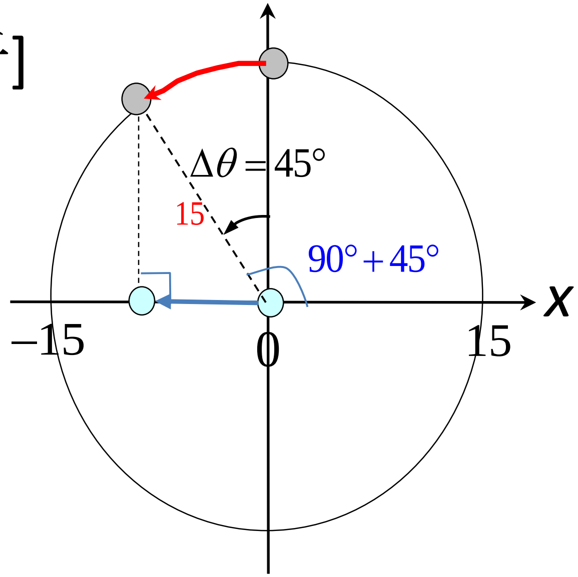

$$\theta = 53°$$

$$v = v_{\max} \sin\theta = \frac{15\pi}{2} \sin 53° = 6\pi[m/s]$$

$$a = a_{\max} \cos\theta = \frac{15\pi^2}{4} \cos 53° = \frac{9}{4}\pi^2 [cm/s]$$

[解析]

(4)




$$\Delta\theta = \frac{1}{8} \times 360° = 45°$$

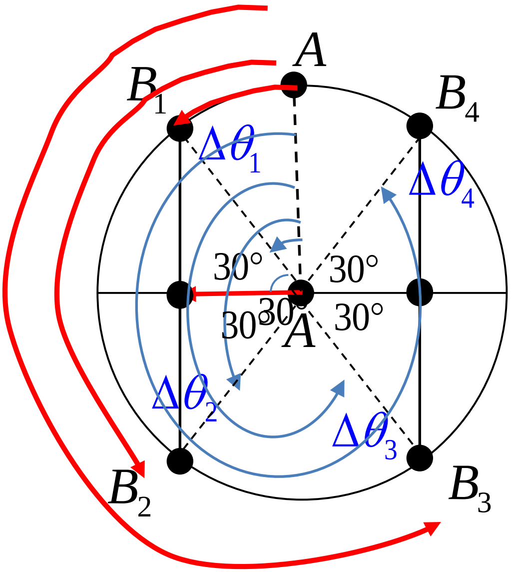
$$\theta = 90° + 45°$$

$$v = v_{\max} \sin\theta = \frac{15\pi}{2} \sin\left(90° + 45°\right) = \frac{15\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}\pi}{4} [cm/s]$$

***2.*** 一物作簡諧運動，週期為 $T$，其速率由最大值變為最大值的一半時可能費時：

[解析]

$$v = v_{\max}\sin\theta \rightarrow \frac{v_{\max}}{2} = v_{\max}\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ$$




$$\Delta\theta_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

最短時間$\Delta t_1 = \dfrac{60}{360} \times T = \dfrac{T}{6}$

$$\Delta t_1 = \left(n + \frac{1}{6}\right)T \quad n = 0, 1, 2....$$

$$\Delta\theta_2 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

最短時間$\Delta t_2 = \dfrac{120}{360} \times T = \dfrac{T}{3}$

$$\Delta t_2 = \left(n + \frac{1}{3}\right)T \quad n = 0, 1, 2....$$

$$\Delta\theta_3 = 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

最短時間$\Delta t_3 = \dfrac{240}{360} \times T = \dfrac{2T}{3}$

$$\Delta t_3 = \left(n + \frac{2}{3}\right)T \quad n = 0, 1, 2....$$

$$\Delta\theta_4 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 300^\circ$$

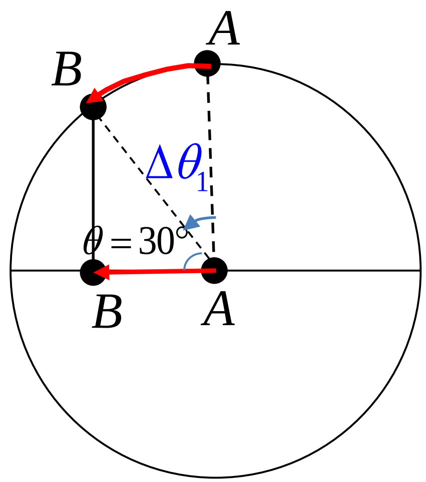
最短時間$\Delta t_4 = \dfrac{300}{360} \times T = \dfrac{5T}{6}$

$$\Delta t_4 = \left(n + \frac{5}{6}\right)T \quad n = 0, 1, 2....$$

# 第40頁

[解析]

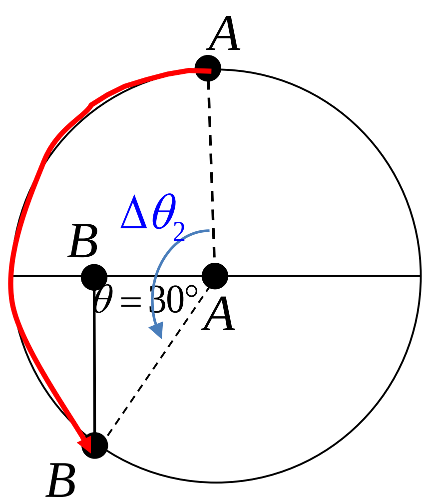
$$v = v_{max}\sin\theta \rightarrow \frac{v_{max}}{2} = v_{max}\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30°$$




$$\Delta\theta_1 = 90° - 30° = 60°$$

$$最短時間\Delta t_1 = \frac{60}{360}\times T = \frac{T}{6}$$

$$\Delta t_1 = \left(n + \frac{1}{6}\right)T \quad n = 0,1,2....$$



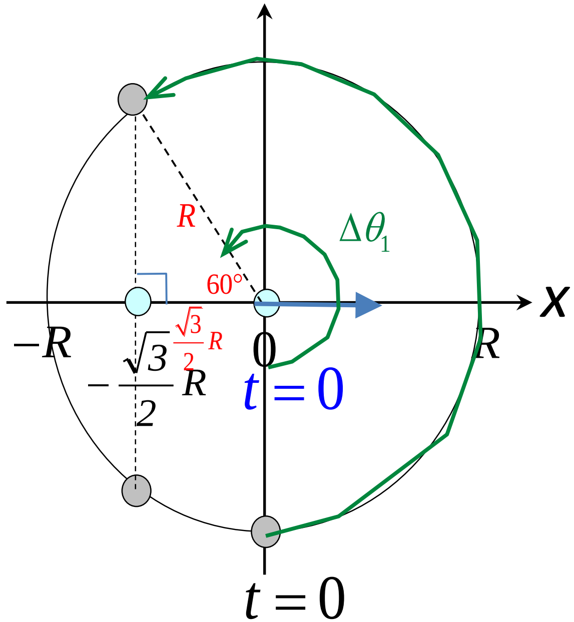

$$\Delta\theta_2 = 90° + 30° = 120°$$

$$最短時間\Delta t_2 = \frac{120}{360}\times T = \frac{T}{3}$$

$$\Delta t_2 = \left(n + \frac{1}{3}\right)T \quad n = 0,1,2....$$

某物作簡諧運動，週期為6秒，振幅$R$，當$t = 0$時，位移為0，而速度為正，則在何時其位移為 $-\frac{\sqrt{3}}{2}R$

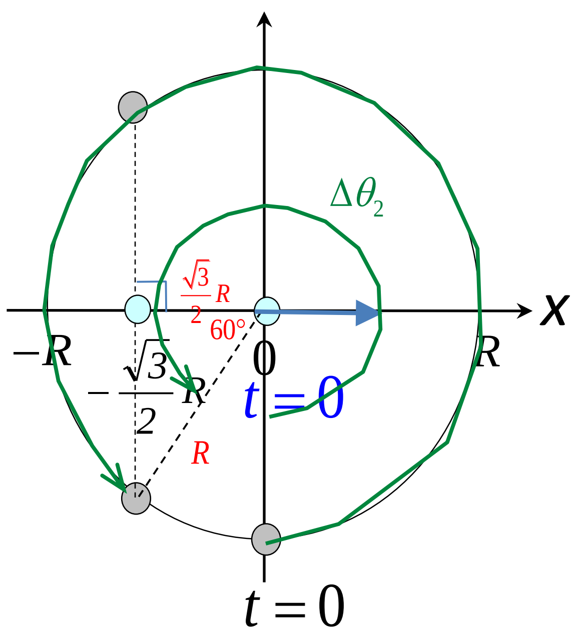
[解析]




$$\Delta\theta_1 = 180° + 30° = 210°$$

$$最短時間\Delta t_1 = \frac{210}{360}\times 6 = \frac{7}{2}[s]$$

$$\Delta t_1 = \frac{7}{2} + 6n \quad n = 0,1,2....$$




$$\Delta\theta_2 = 270° + 30° = 300°$$

$$最短時間\Delta t_2 = \frac{300}{360}\times 6 = 5[s]$$

$$\Delta t_2 = 5 + 6n \quad n = 0,1,2....$$

一質點作*S.H.M.*當距平衡點*4* m時其速率為*6* m / s，距平衡點*3* m時其速率為*8 m / s*，求：（1）振幅（2）週期（3）最大加速度量值（4）自距平衡點*4* m運動至*3* m所歷之最短時間？

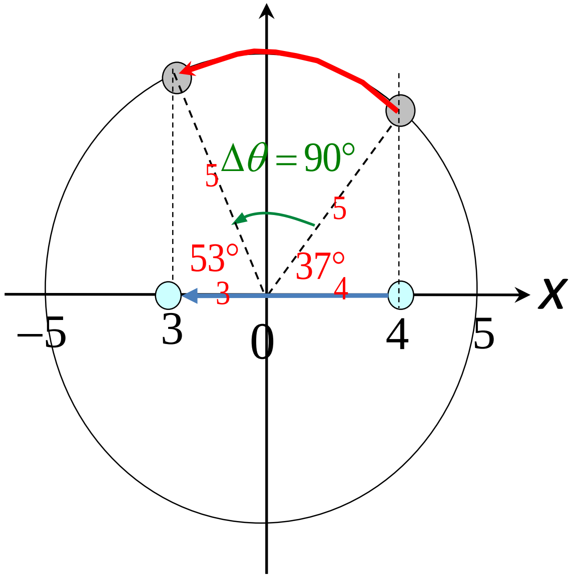
[解析]

$$(1)(2)\frac{x^2}{R^2}+\frac{v_x{}^2}{R^2\omega^2}=1 \qquad \begin{cases}\dfrac{4^2}{R^2}+\dfrac{6^2}{R^2\omega^2}=1\\[2ex] \dfrac{3^2}{R^2}+\dfrac{8^2}{R^2\omega^2}=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}R=5[m]\\ \omega=2[rad/s]\end{cases}$$

$$(3)a_{max}=R\omega^2=5\times2^2=20\left[m/s^2\right]$$

[解析]

(4)

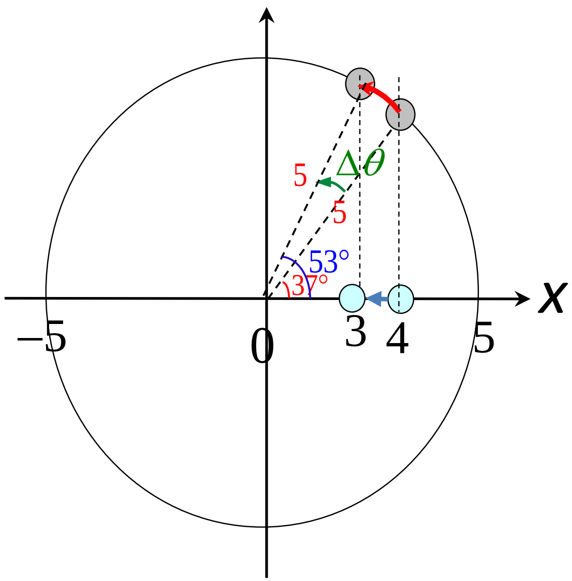



$$\Delta\theta = 90°$$

$$最短時間\Delta t = \frac{90}{360} \times \pi = \frac{\pi}{4}[s]$$

[解析]

(4)



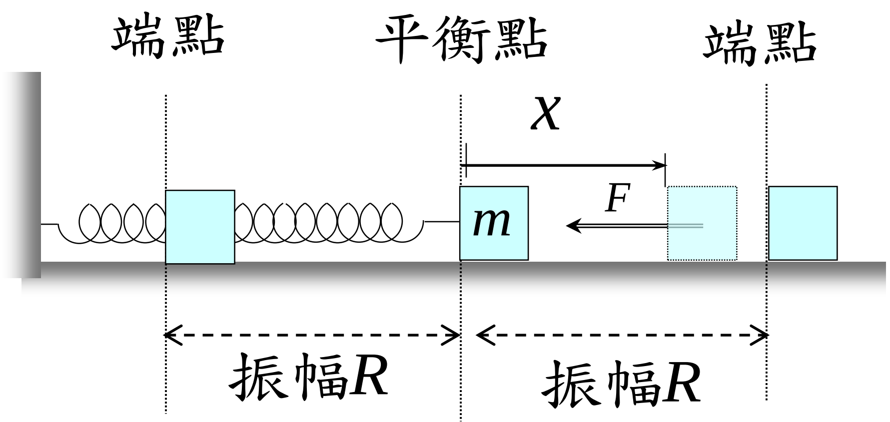

$$\Delta\theta = 53° - 37° = 16°$$

$$\text{最短時間}\Delta t = \frac{16}{360} \times \pi = \frac{2\pi}{45}[s]$$

## 三、常見的簡諧運動：

### *1.* 彈簧的簡諧振盪－<u>水平彈簧</u>：

已知理想彈簧力常數 $k$，一端繫於牆壁上，另一端繫一質量物體 $m$ 之物體，置於光滑無摩擦的桌面上。當物體於平衡點位移x（→），則彈簧產生恢復力F（←），依虎克定律$F=kx$，且方向相反，得証為 *S.H.M.*，比例常數恰為彈簧力常數。



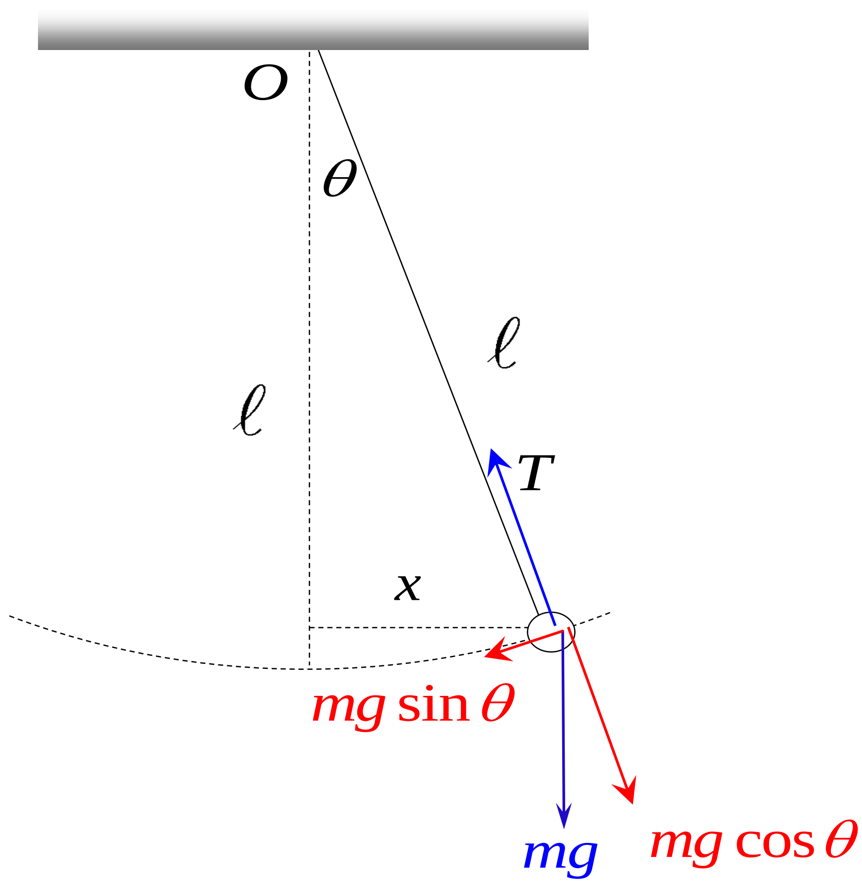
## 2 小角度的單擺振盪：（擺幅θ＜5°）

若單擺的擺幅θ＜5°時，
單擺的週期只與擺長有關，與擺錘重量無關。
擺角很小，*m*可視為在水平方向作直線運動，
其所受的水平方向恢復力

$$f = -mg\sin\theta \approx -mg\frac{x}{\ell} = -kx$$

$$\Rightarrow k = \frac{mg}{\ell}$$ 為簡諧運動

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



*2.*地震時，如果地面運動的加速度太大，地面上的建築物會被破壞，某建築物可以承受的最大地面水平加速度為*0.32 g*（*g*為重力加速度=$9.8m/s^2$），假設地震時，該建築物基地的運動可視為水平簡諧運動，則角頻率為*5.6*弧度/秒的地震發生時，此建築物可承受的最大地面水平振幅為__cm。

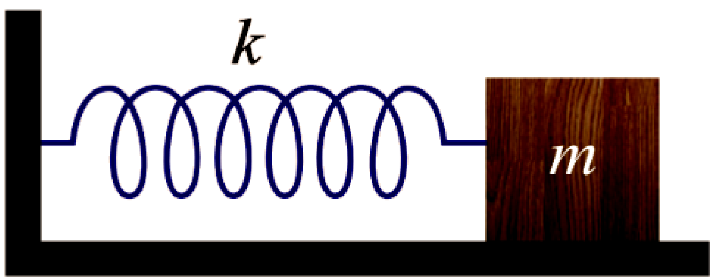
[解析]

$$\omega = 5.6\left[rad / s\right]$$

$$a_{max} = R\omega^2 \rightarrow 0.32 \times 9.8 = R \times 5.6^2$$

$$\rightarrow R = 0.1\left[m\right] = 10\left[cm\right]$$

如圖，在光滑水平面上，將彈性常數$k = 400$牛頓/公尺的彈簧左端固定於牆上，右端連接質量$m = 25$公斤的物體，於平衡位置將彈簧壓縮100公分後釋放，則此物體作簡諧運動，求：(1)週期為_____秒。
(2)角頻率為_____弧度/秒。
(3)物體自平衡點向左移動100公分，所需時間為_____秒。
(4)當物體速率為2公尺/秒時，彈簧回復力為_____牛頓。

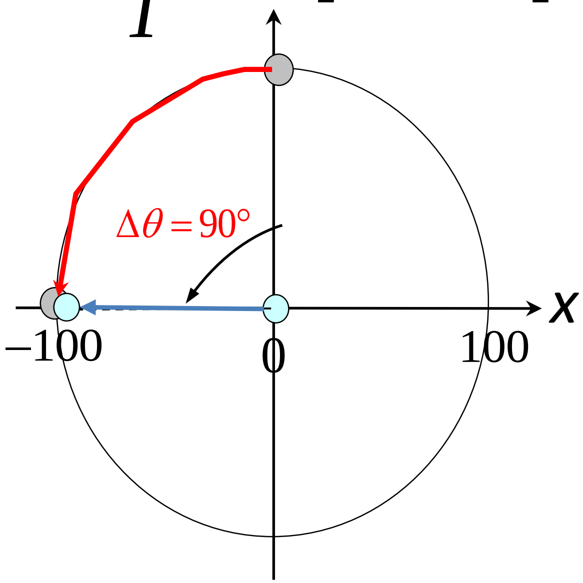


[解析]

$$(1)\,T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{400}} = \frac{\pi}{2}[s]$$

$$(2)\,\omega = \frac{2\pi}{T} = 4[rad/s]$$

(3)




$$\theta = 90°$$

$$\Delta t = \frac{90}{360} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}[s]$$

$$(4)\,v = v_{\max}\sin\theta \rightarrow 2 = 1\times 4\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30°$$

$$[F = ma]$$

$$F = mR\omega^2\cos\theta = 25\times 1\times 4^2\cos 30° = 200\sqrt{3}[N]$$

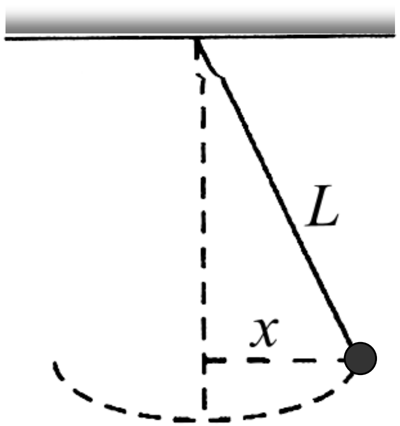
# 第40頁

***1.***一單擺之長為1.00公尺，週期為2.0秒。以此等數據算出的重力加速度為_____公尺/秒$^2$。（設$4π^2$=39.4）

[解析]

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\rightarrow g=\frac{4\pi^2\ell}{T^2}=\frac{4\pi^2\times 1}{2^2}=9.85\left[m/s^2\right]$$

***2.***圖中，擺長$L$的單擺，當擺自最低點的水平位移為$x$處釋放，且$x$遠小於$L$時，擺錘至最低點處的速度為？（重力加速度g）




[解析]

$$v_{max}=\frac{2\pi x}{T}=\frac{2\pi x}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}=x\sqrt{\frac{g}{L}}$$

## 單元三：物理量的因次(dimension)　物理特性

1.物理量包括『數字』及『單位』兩部分。
例：重力加速度g = 9.8 m/s$^2$ ，『9.8』是數字部分 ，『m/s$^2$』是單位部分。

2.『單位』可分『基本單位』及『導出單位』。而導出單位是由基本單位導出的。
例：功的單位 J = N-m = (kg•m/s$^2$)m = kg(m/s)$^2$ 是從長度單位(m)、質量單位(kg)、時間單位(s) 所導出的 。

3.力學物理量的基本單位是：長度、質量、時間。

4. km、m、cm、、、皆為長度單位，稱具有相同的『長度因次』以 L 表示

5. kg、g、mg、、、皆為質量單位，稱具有相同的『質量因次』以 M 表示

6. day、hr、min、s、、皆為時間單位，稱具有相同的『時間因次』以 T 表示

7.物理量的因次以【】來表示。在力學物理量的因次皆可寫成 $L^aM^bT^c$ 的冪次形式

例：加速度的因次為【a】$=LT^{-2}$

# 力學物理量的因次

| 物理量 | SI單位 | 因次 | 物理量 | SI單位 | 因次 |
|---|---|---|---|---|---|
| 位移 | m | L | 力 | N | $LMT^{-2}$ |
| 質量 | kg | M | 力矩 | N-m | $L^2MT^{-2}$ |
| 時間 | s | T | 動量 | N-s | $LMT^{-1}$ |
| 速度 | m/s | $LT^{-1}$ | 衝量 | N-s | $LMT^{-1}$ |
| 速率 | m/s | $LT^{-1}$ | 功 | J | $L^2MT^{-2}$ |
| 加速度 | $m/s^2$ | $LT^{-2}$ | 動能 | J | $L^2MT^{-2}$ |
| 角速度 | rad/s | $T^{-1}$ | 功率 | W | $L^2MT^{-3}$ |

# 第40頁

[例]：請用物理量的因次分析，找出單擺的週期P和擺長l、擺錘質量 m 、和重力加速度 g 之間有什麼關係？

[解]
1.假設單擺的週期 P可以寫成下列的形式：$P = kl^x m^y g^z$
式中k為一比例常數
2.代入上式各項物理量的因次，可得：$T = L^{x} M^{y} (LT^{-2})^{z} = L^{x+z} M^{y} T^{-2z}$
3.比較等式的兩邊要具有相同的因次的幕次 ，可得

$$\begin{Bmatrix} x+z=0 \\ y=0 \\ -2z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{週期}=k\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$