2013 年第 14 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 44 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2012 年 11 月 17 日
9：30~12：30
考試時間：三小時

《注意事項》

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器。

2013 年第 14 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 44 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、假設由密度為 $\rho = 3000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ 的岩石所組成的山，若岩石所能承受的最大壓力為 300 MPa，則山的最大可能高度為__(1)__公尺。

二、一細長扁平浮針浮在水面上之橫切面圖，如圖 1 所示。假設浮針寬為 w、長為 ℓ、厚度可不計，已知水的表面張力為 Γ，密度為 ρ，重力加速度為 g，經測量發現浮針之底部的深度為 h，與浮針接觸點接觸之水面與水平面之夾角為 $\pi/6$，若浮針兩頭之水面與水平面之夾角亦為 $\pi/6$，由此可推知浮針之重量為__(2)__。

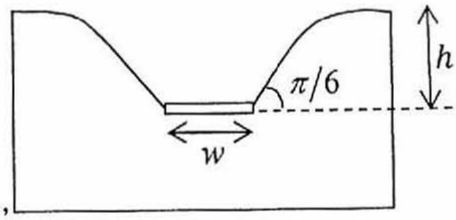


圖 1

三、有一 10kg 之物體在一與水平面夾 30° 之斜面上運動，該物體與斜面之動摩擦係數為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。令起始之瞬時該物體之速率為 10 m/s 向上運動。則 5 秒後：(a)該物體之速度為__(3)__m/s；(b)該物體相對於起始點位置之距離為__(4)__公尺。(設重力加速度量值為 $10\mathrm{m/s^2}$)

四、參觀台北 101 大樓時，可以搭乘快速電梯上景觀台眺望台北景色。快速電梯內裝著一個顯示板，顯示著上升過程中任一時間之瞬時速度。某生在搭乘時好奇的對著顯示板錄影，直到電梯到達觀景台。該生回家後擷取錄影中的訊息，將上升中的電梯速度對時間作圖，結果如圖 2 所示，其中電梯最快的速度為 16.8m/s。當時電梯加上載人後的總重量為 2000kg 重，則電梯從開始到停止之過程中上升__(5)__公尺；若忽略任何損耗，由圖 2 的數據計算電動機驅動電梯在上升過程中所輸出最低的平均功率為__(6)__W。(設重力加速度量值為 $g = 10\mathrm{m/s^2}$)

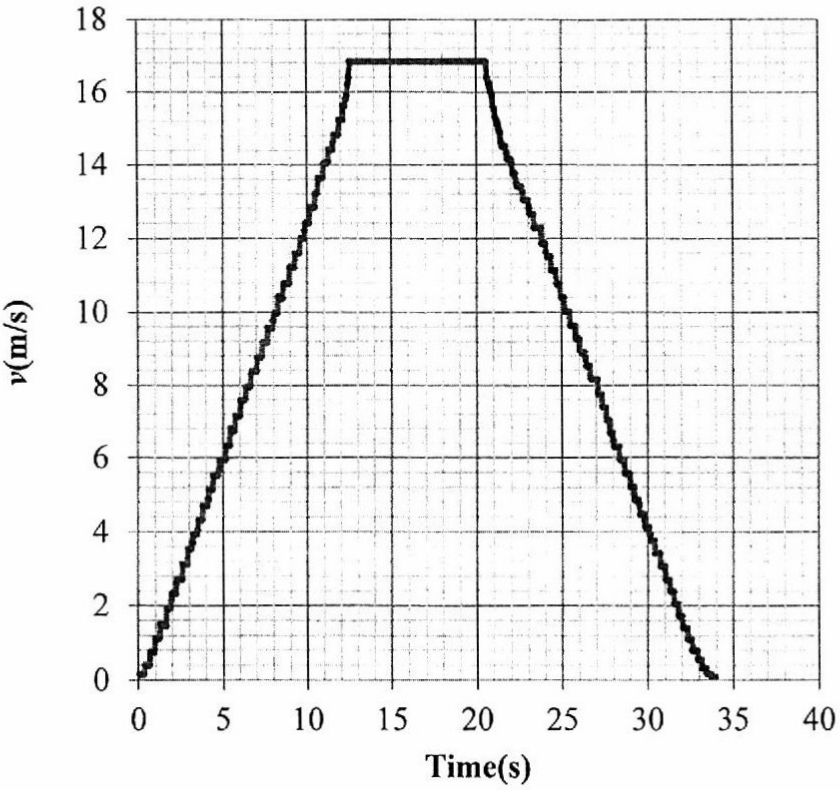


圖2

五、 某人坐在遊樂場中水平面上旋轉的木馬上，其距離轉軸 8 公尺。木馬每 32 秒轉一圈，同時某人騎乘之木馬還以 $2\sin[t/(4秒)]$ 公尺的位移方式上下移動，其中 t 為時間。在旋轉過程中，此人相對於其座騎不動。若此人質量為 64 公斤，則木馬轉一圈的過程中，某人所受最大淨力為__(7)__牛頓。(設重力加速度為 $10\ \text{m/s}^2$)

【註】：$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ，$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ 。

六、 一「水銀連通管」之同半徑長短兩管內通以相同氣壓為 P 之理想氣體，然後封閉上端開口如圖 3。此時兩液面等高，但左管空氣柱長 50 cm，右管空氣柱長 30 cm。如果提升底部連通的汞杯，並在杯中注入 10 cm^3 的汞之後，左管液面上升 6 cm，右管液面上升 4 cm。假設過程中溫度保持不變，則原氣體壓力 P 為__(8)__公分汞柱高。

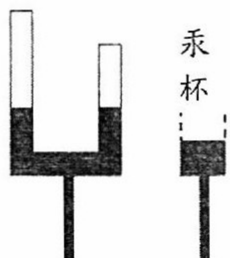


圖 3

七、 如圖 4 所示，將一質點由斜坡上的 O 點，以初速率 v 與拋射角 θ ($\tan\theta \geq 0$)拋射出去，使其在空中飛行並降落於下坡 A 點處，O 點與 A 點之間的垂直與水平距離分別為 H 與 L。若重力加速度為 g，且不限定 v 與 θ (但 $\tan\theta \geq 0$)的量值，則質點由 O 點飛行到 A 點所需的最短時間為__(9)__，而可能的最小初速率為__(10)__。

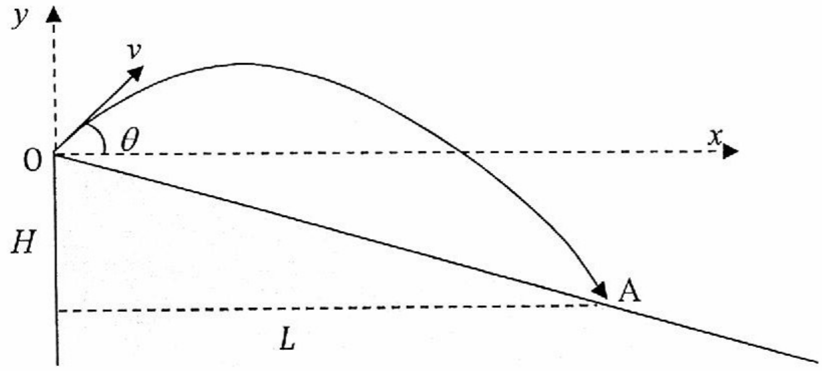


圖 4

八、 第一位登上月球的美國太空人阿姆斯壯(Neil Armstrong)在今年(2012 年) 8 月 25 日過世。他當年(1969 年)登陸月球的太空任務代號是阿波羅 11(Apollo 11)。下列表一中所紀錄的是阿波羅 11 火箭飛離地球，在火箭熄火後所測得的結果。

表一：阿波羅 11 火箭飛離地球熄火後，測得之其與地心之距離和其所對應的地心的相對速度。

太空船與地心之距離(單位：10^6m)	太空船與地心的相對速度（單位：m/s）
11.0	8406
26.3	5374
54.4	3653
95.7	2619
169.9	1796
209.2	1532
240.6	1356

已知太空船的總質量為$m = 4.4\times10^4$kg，重力常數$G = 6.67\times10^{-11}\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$。利用以上數據，求出地球之質量___(11)___kg (註月球對太空船的引力可以忽略不計)。若不做任可修正，此太空船可航行至離地球最遠的距離為___(12)___m。

【註】: 解題時如需方格紙，可以使用在附錄中的方格紙。

九、 如圖 5 所示，一細繩纏繞過圓筒，細繩與圓筒接觸之部份所張的角度為θ，假設細繩與圓筒間之靜摩擦係數為μ，繩的左端之張力固定為T_0。

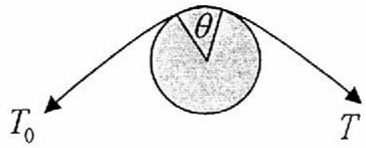


圖 5

(a) 若$\theta \ll 1$時，在繩的右端施以張力，使繩子向右滑動最小所需之張力為T，已知繩的質量可

被忽略，則近似到θ的一次方時，張力T等於___(13)___。(b) 若纏繞過圓筒的角度不再很小而是$\theta=\pi$，利用(a)所得到的小角度結果組成有限角度的算式，則此時T等於___(14)___。

【註】：(i)當$\theta \ll 1$，$\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ (ii)當$x \ll 1$時 $\rightarrow$ $\frac{1}{1-\mathrm{x}} \approx 1+\mathrm{x}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$，其中 $e = 2.718\ldots$。

十、 如圖 6 所示，一半徑為 a 之均勻實心球放置在一寬為 a 之平形軌道上。整個軌道再放置在傾角為θ的斜面上。實心球由靜止釋放作純滾動運動，已知實心球相對球心的轉動慣量為$2ma^2/5$，則球心高度下降 h 時，球心的速率為___(15)___。

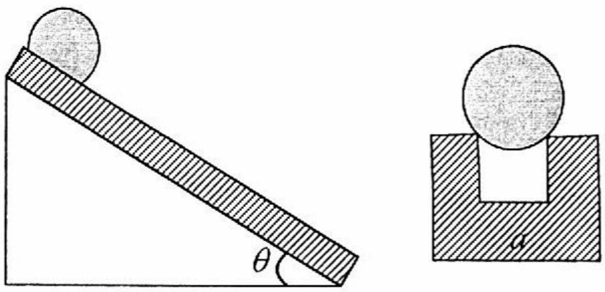


圖 6

十一、一個靜止的水平圓盤，在表面布滿小炮竹後的轉動慣量為I_0。若在時間$t=0$時，使圓盤在固定的力矩τ_0作用下，開始繞通過其中心的鉛直軸轉動，並點燃炮竹，使炮竹沿圓盤的半徑方向發射出去，以致圓盤的轉動慣量以固定的時變率β減小，亦即圓盤在$t \geq 0$時的轉動慣量為$I = I_0 - \beta t$，則在$t = I_0/(2\beta)$時，此圓盤的轉動動能為___(16)___，角加速度為___(17)___。

十二、一個垂直置放在水平面上的圓柱氣室，氣室上端有一質量為$2m$的活塞。氣室內有n莫耳之單原子理想氣體，氣室外為真空。在平衡狀態下，活塞距離氣室底部的高度為ℓ_0，此時氣室內氣體的溫度$T_0=$___(18)___(用以上參數及氣體常數 R，重力加速度g表示之)。現有一質量為m之小球自活塞之上ℓ_0的高度自由落下，與活塞產生彈性碰撞，小球與活塞發生一次碰撞後就被移走。設活塞與氣室內壁的摩擦力可以不計，且活塞及氣室壁均為絕熱材質，則活塞下降至距離氣室底部之最小高度ℓ可由下列方程式求得：$18(\ell/\ell_0)^{5/3} - c(\ell/\ell_0)^{2/3} + 27 = 0$。此式中$c=$___(19)___。

【註】：你也許會用到積分公式：$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，其中$[n \neq -1]$。

十三、有一工程師為了設計雲霄飛車而製作了一個滑軌模型，並進行測試，滑軌設計如圖 7。今將一個體積可忽略之小鋼珠由 A 點自靜止釋放，順著一個與水平面呈 45 度斜角的長直軌道滑到 B 點後，即相切接上半徑為 R 的圓弧形軌道，經繞轉 9/8 圈後在最低點 C 點處進入水平軌道。若鋼珠與滑軌間的摩擦力可忽略，要確保鋼珠可以完成以上的路徑，且與滑軌間在整個過程中接觸不分離，則 A 點離地的高度必須高於 ___(20)___ 才行。已知當在最小高度時，鋼珠連續兩次通過 C 點（亦即繞行半徑為 R 的圓環一圈）所需的時間為 $\int_0^{2\pi}\left[\frac{R}{2g(a+\cos\theta)}\right]^{1/2}d\theta$，其中 g 為重力加速度，則式中 a 的數值等於 ___(21)___。

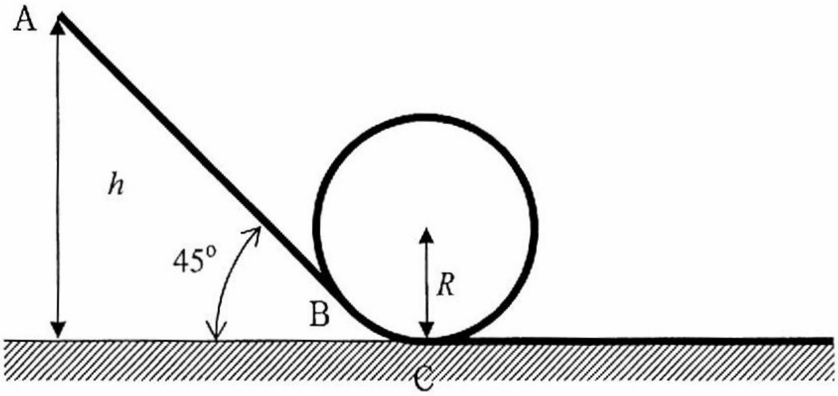


圖 7

十四、長度為 L 的細繩，其一端固定，另一端連接於長度為 L 的細棒，細繩細棒所組成的系統長度為 $2L$，如圖 8 所示。已知細棒不是均質，但質量為 M，但是質心位置恰在棒子的中間，且細棒質心轉動慣量為 $I=1/4\,ML^2$（轉軸垂直於棒長，並穿過質心）。

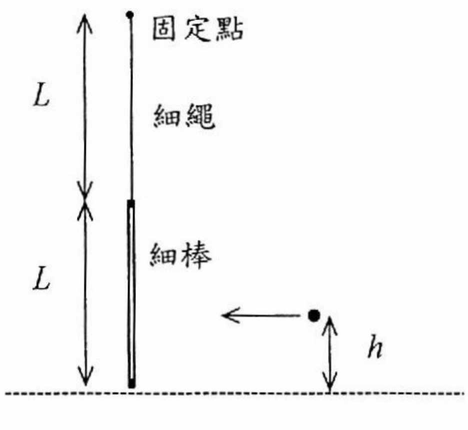


圖 8

若細繩質量可忽略；今有一質點自右以水平方向撞擊細棒，撞擊點距離尾端的高度為 h，如圖所示，碰撞後質點反向離開。若細繩細棒系統在剛撞擊後的瞬間，其運動狀態是細繩與細棒成一直線進行擺動的狀態，則撞擊點的高度 h 等於 ___(22)___。

十五、假設一質量為 M 的汽車可簡化為密度均勻，長寬高分別為 a、b、c 的長方體，如圖 9 所示。當突然緊急剎車，使得速度在極短的時間內降為零，則在剎車瞬間，

車子產生相對於地面的角速度 $\omega_0 =$ ___(23)___。當速度超過 v_0 時，會因為突然緊急

剎車造成向前翻滾，則 $v_0 =$ ___(24)___。

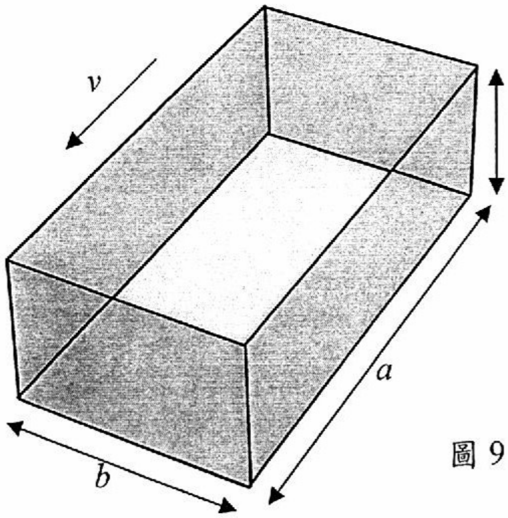


圖 9

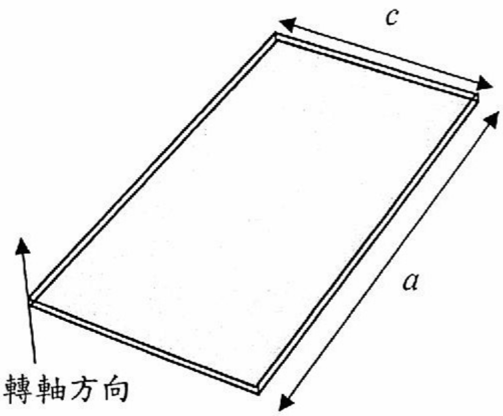


圖 10

【註】：已知質量為 m，密度均勻分布且邊長為 l，w 的長方形，相對於其頂點的轉動慣量為 $\frac{1}{3}m(a^2+c^2)$，如圖 10 所示。

十六、一太空船繞行一質量為 M 的星球，其軌道半徑為 r_0。太空船的火箭在某瞬間噴發，給予太空船一速度增量 $\Delta\vec{v}$，其方向與原速度夾角為 θ。計算能夠使太空船脫離該星球之最小速度增量的角度 $\theta =$ ___(25)___ 與量值 $\Delta v_{\min} =$ ___(26)___。(設萬有引力常數為 G。)

十七、許多歐美建築的暖氣設備都是以恆溫的熱水通過環繞室內之熱水管，利用熱水將熱傳導到室內以達到加熱室內的目的。已知某一建築當室外為 -10°C 時，室內為 20°C，而室外為 -30°C 時，室內為 10°C。設熱輻射與對流皆可忽略，則當室外為 0°C 時，室內溫度約為 ___(27)___ $^{\circ}$C。

十八、在室溫、一大氣壓下，以 1 莫耳空氣進行兩個實驗。

(1)在壓力保持固定的加熱過程中，測得 1 莫耳空氣溫度升高 1 $^{\circ}$C 需要輸入 29.19 焦耳的熱量；

(2)在體積保持固定的加熱過程中，測得 1 莫耳空氣溫度升高 1 $^{\circ}$C 需要輸入 20.85 焦耳的熱量。

空氣的狀態方程式為 $PV = nRT$，其中 P、V、T 和 n 各為氣體壓力、體積、溫度和莫耳數，由上述兩個實驗可以得到狀態方程式中等效 R 值等於 ___(28)___ J/K·mol。

十九、太平洋的馬里亞納海溝底部，距海平面的深度為 10.9km。已知在海平面處的海水密度為 $\rho_0 = 1050\ \mathrm{kg/m^3}$ ，由於海水很難壓縮，海水密度隨水深的變化量很小，因此海水的密度可視為不變。回答下列問題：

(a)在該海溝底部的海水靜液壓力是海平面大氣壓力的__(29)__倍 。

(b)為探測馬里亞納海溝，設計一可以深潛至該海溝底部的圓球形空心容器，其通過球心的剖面形狀如圖 11 所示，其內半徑 $r = 1.5\ \mathrm{m}$ ，鋼壁的厚度為 t 。若鋼的楊氏係數 $Y = 2.0\times10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$，且鋼材可維持彈性的線性應變量的上限為 $\Delta\ell/\ell = 0.0050$ ，則該深潛容器的鋼壁厚度的最小值為__(30)__公分。

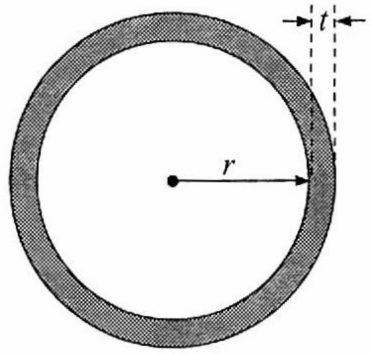


圖 11

【註】：楊式係數的定義為應力與應變的比值，即： $Y = \dfrac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$ 。

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、一維的移動與振盪運動(15 分)

有兩個方塊，A 木塊質量為 8.00 kg，B 木塊質量為 2.00 kg，靜止置於一個無摩擦的水平面上。兩者以一個力常數為 $k = 40\mathrm{N/m}$ 的彈簧連接，彈簧維持其自然長度 $L = 0.5\,\mathrm{m}$ 的狀態。在時間 $t = 0$ 時， B 木塊開始受到一個向右的力 F 作用，且 $F = 10.0\mathrm{N}$ 。系統自靜止狀態開始運動。回答下列問題：

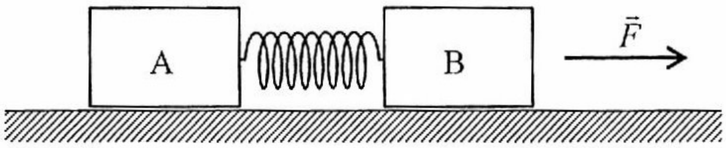


圖 12

(1) 開始受力 F 作用後的運動過程中，求以質心坐標系觀察到 A 木塊的振盪頻率為多少赫？ (3 分)

(2) 開始受力 F 作用後的運動過程中，兩木塊間距離的最大值為多少公尺?(4 分)

(3) 當時間 $t = 0.42\mathrm{s}$ 時，此時 B 木塊的位置與其起始位置的距離為多少公尺？(4 分)

(4) 在 $t = 0.42\mathrm{s}$ 時，外力 F 對於整個系統所施的瞬間功率是多少瓦？（正值表示作功，負值表示被作功）。(4 分)

二、小孔的水柱高

一超大型蓄水池水位高度為 H，水池底部外接一出水管，水管維持水平。水管共有兩段前後連接；前段的截面積 A_1 比較大，後段的截面積 A_2 比較小；後段的出水端置有一閥門開關，可以調節水流。A_1 及 A_2 皆遠小於蓄水池的面積，且 H 皆遠大於 $\sqrt{A_1}$ 與 $\sqrt{A_2}$。今前段水管的上方忽然產生一小孔，小孔的面積遠小於 A_1 及 A_2，如圖 13 所示。水會自小孔噴出，且噴出小水柱的高度 h 會與閥門的開關狀態有關；若水可以視為理想流體(無黏滯，且不可壓縮)，則：

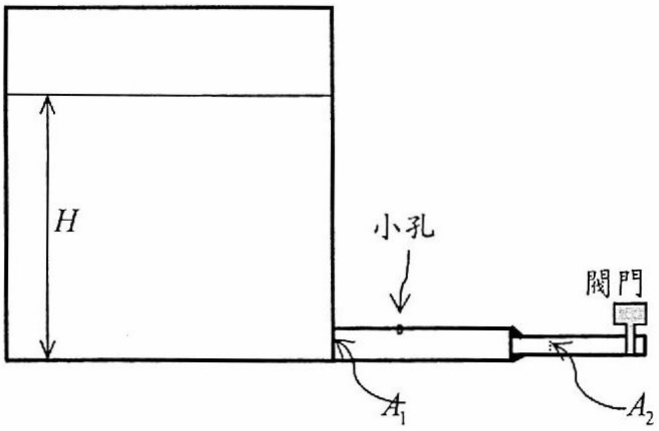


圖 13

(1) 當閥門完全閉鎖時，自小孔噴出的水柱高度 h 為何? (4 分)

(2) 當閥門完全開啟時，自小孔噴出的水柱高度 h 為何? (6 分)

(3) 若閥門完全閉鎖時與完全開啟時水柱高度的比值為3，試求 A_1/A_2 的比值為何? (5 分)

附錄：方格紙

(暫定版)

2013 年第 14 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 44 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選試題參考解答

一、 (1) 10204 m

解：

因為壓力為：$p=\rho gh$，因此$h=p/\rho g$，代入數值得：$h=p/\rho g=10204$ m

二、 (2) $\Gamma(w+\ell)+\rho ghw\ell$

解：

表面張力向上的合力為$2(w+\ell)\Gamma\sin\pi/6$，而浮針所受之浮力來自底部的壓力，為$\rho ghw\ell$，故浮針之重量為$\Gamma(w+\ell)+\rho hw\ell g$。

三、 (3) 0 m/s

(4) 4

解：

上升過程中之運動方程式為：

$$ma=\sum F_g+f_k=-mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta$$
$$\Rightarrow a=-g(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)=-12.5m/s^2$$

令上升到停止的距離為 S，所需時間為τ，由方程式

$$v_f^2=v_i^2+2aS$$
$$\Rightarrow v_i^2=2g(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)S$$

可以推得$\Rightarrow S=4m$

由 $v_f^2=v_i^2+2aS\Rightarrow v_i^2=2g(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)S\Rightarrow S=4m$

$v_f=v_i+at\Rightarrow\tau=v_i/g(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)\Rightarrow\tau=\frac{4}{5}s$

5s 後表示到頂後還有 $\frac{21}{5}s$

但是，物體到頂後顯示摩擦力大於斜面向下之重力分量$g\sin\theta<\mu_k\cos\theta$，因此該物體在到頂後會保持靜止狀態。

因此，5s 後：(a)該物體速度 0 m/s；(b)該物體距離起始點之上 4m 處

四、 (5) 347.6 公尺

解：

上升高度 h，因為 $v=\frac{dy}{dt} \Rightarrow \int dy = h = \int v dt$

因此曲線下面的面積 A 為上升高度 h，由附圖可以分三段面積算。

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\times 16.4\times 12.5 + 8\times 16.8 + \frac{1}{2}\times 16.4\times 13.5 = 102.5 + 134.4 + 110.7 = 347.6m$$

給分標準，由附圖計算，在 340m 到 355m 之間都可以(2%範圍內)。

註：實際上升高度為 $357m$

(6) $P_{avg} = 2.05\times 10^5 watt$

解：

求平均功率時，可以先算出所作功 W（分三段算），再除以上升時間 34 秒。

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= M\left[g + \frac{16.4}{12.5}\right]\times 102.5 + Mg\times 134.4 + M\left[g - \frac{16.4}{13.5}\right]\times 110.7 \\ &= 6.95\times 10^6 J \end{aligned}$$

平均功率 $P_{avg} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{6.95\times 10^6}{34} = 2.05\times 10^5$ 瓦。

另解：總功可以用位能 Mgh 計算，再除以 34 秒，可得平均功率為：

$$P_{avg} = \frac{Mgh}{\Delta t} = \frac{2000\times 10\times 347.6}{34} = 2.05\times 10^5 \text{ 瓦。}$$

五、 (7) $\sqrt{\pi^4/4+64}$

解：

旋轉木馬的角速率為：

$$\omega = 2\pi/32 = \pi/16 \text{ (Hz)}，$$

因為人相對於木馬靜止，有相同的角速率，故水平方向所受向心加速度為：

$$a_c = \omega^2 r = (\pi/16)^2 8 = \pi^2/32 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

木馬也在鉛直方向上運動，其的加速度為：

$$a_v = \frac{d^2}{dt^2}\left(2\sin[t/4]\right) = \frac{-1}{8}\sin[t/4] \text{ (m/s}^2\text{)}$$

故鉛直方向上的最大加速度量值為 $\frac{1}{8}$ m/s^2，故此人所受最大淨力為兩者向量和，

即：

$$F = m\left|\vec{a}_c + \vec{a}_v\right| = 64[(\pi^2/32)^2 + (1/8)^2]^{1/2} = \sqrt{\pi^4/4+64}\ \text{(N)}$$

六、 (8) 114.4 cmHg

解：

因為是等溫過程，假設左管截面積為 A，其內之理想氣體的莫耳數為 n_L，汞液面上升後的壓力為 P_{fL}，故依據想氣體方程式知：

$$n_L RT = 50AP = (50-6)AP_{fL}$$

設左管的壓力 P 和 P_{fL}，對等於 h 和 h_{fL} 的汞柱高，即 $P = \rho gh$ 和 $P_{fL} = \rho g h_{fL}$，ρ為汞密度。故 $50A\rho gh = (50-6)A\rho g h_{fL}$，即

$$25h = 22h_{fL}\text{，} \tag{1}$$

假設右管內理想氣體的莫耳數為 n_R，則

$$n_R RT = 30AP = 30A\rho gh = (30-4)A(\rho g h_{fL} + 2\rho g)\text{，}$$

即：

$$15h = 13h_{fL} + 26\text{，} \tag{2}$$

由(1)、(2)兩式得之：$h_{fL} = 130 \rightarrow$，故 $h = 114.4$ cmHg。

七、(9) $t_{\min} = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

解：

由拋射體運動公式：

$$x = (v\cos\theta)t \tag{1}$$

$$y = (v\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

將(1)式代入(2)式右邊第一項可得

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

因 A 位於$(L,-H)$，故由(3)式可得質點由 O 到 A 的時間 t 為

$$t^2 = \frac{2}{g}\left(H + L\tan\theta\right) \tag{4}$$

因 $90° \geq \theta \geq 0$，故由(4)式可看出，當 $\theta = 0$ 時質點的飛行時間最短，即

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{5}$$

(10) $v_{\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{L^2 + H^2} - H\right)}$

解：

另利用(1)式可將(2)式中的時間變數 t 消去，而得

$$y = \left(\tan\theta\right)x - \frac{g}{2\left(v\cos\theta\right)^2}x^2 \tag{6}$$

因質點通過 A 點，故由上式知

$$-H = \left(\tan\theta\right)L - \frac{g}{2v^2\left(\cos\theta\right)^2}L^2 \tag{7}$$

即

$$v^2 = \frac{gL^2}{2\left(H + L\tan\theta\right)\cos^2\theta} = \frac{gL^2}{2\left(H\cos\theta + L\sin\theta\right)}\frac{1}{\cos\theta} \tag{8}$$

若以 ϕ 代表斜坡的傾斜角，即 $\tan\phi = H/L$ ，則上式可改寫為

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{gL^2}{2\sqrt{L^2 + H^2}\left(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta\right)}\frac{1}{\cos\theta} \\ &= \frac{gL^2}{2\sqrt{L^2 + H^2}\sin(\theta + \phi)\cos\theta} \\ &= \frac{gL^2}{\sqrt{L^2 + H^2}\left\{\sin(2\theta + \phi) + \sin\phi\right\}} \end{aligned} \tag{9}$$

由上式可看出當 $\sin(2\theta + \phi) = 1$ 時，初速率為最小，即

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL^2}{\sqrt{L^2 + H^2}\left\{1 + \frac{H}{\sqrt{L^2 + H^2}}\right\}}} = \sqrt{\frac{gL^2}{\left\{\sqrt{L^2 + H^2} + H\right\}}} = \sqrt{g\left\{\sqrt{L^2 + H^2} - H\right\}} \tag{10}$$

另解：最小初速亦可用微分方式求出如下：

$$v^2=\frac{gL^2}{2\left(H+L\tan\theta\right)\cos^2\theta}=\frac{gL^2(1+\tan^2\theta)}{2\left(H+L\tan\theta\right)} \tag{8'}$$

當初速為最小時，速率平方v^2對$\tan\theta$的微分為零：

$$\frac{dv^2}{d(\tan\theta)}=\frac{gL^2}{2}\left[\frac{2\tan\theta}{\left(H+L\tan\theta\right)}-\frac{(1+\tan^2\theta)\cdot L}{\left(H+L\tan\theta\right)^2}\right]=0 \tag{9'}$$

上式經整理可得

$$2\left(H+L\tan\theta\right)\tan\theta=(1+\tan^2\theta)L \tag{10'}$$

$$L\tan^2\theta+2H\tan\theta-L=0 \tag{11'}$$

即

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{H^2+L^2}-H}{L} \tag{12'}$$

$$H+L\tan\theta=\sqrt{H^2+L^2} \tag{13'}$$

$$1+\tan^2\theta=1+\left(\sqrt{\frac{H^2}{L^2}+1}-\frac{H}{L}\right)^2=2\left(\frac{H^2}{L^2}+1-\frac{H}{L}\sqrt{\frac{H^2}{L^2}+1}\right) \tag{14'}$$

將以上結果代入(8')式：

$$\begin{aligned}\left(v^2\right)_{\min}&=\frac{gL^2(1+\tan^2\theta)}{2\left(H+L\tan\theta\right)}\\&=\frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}}\left(\frac{H^2}{L^2}+1-\frac{H}{L}\sqrt{\frac{H^2}{L^2}+1}\right)\\&=gL\left(\sqrt{\frac{H^2}{L^2}+1}-\frac{H}{L}\right)\\&=g\left(\sqrt{H^2+L^2}-H\right)\end{aligned} \tag{15'}$$

故結果與(10)式相同。

八、(11) 5.94×10^{24}

解：

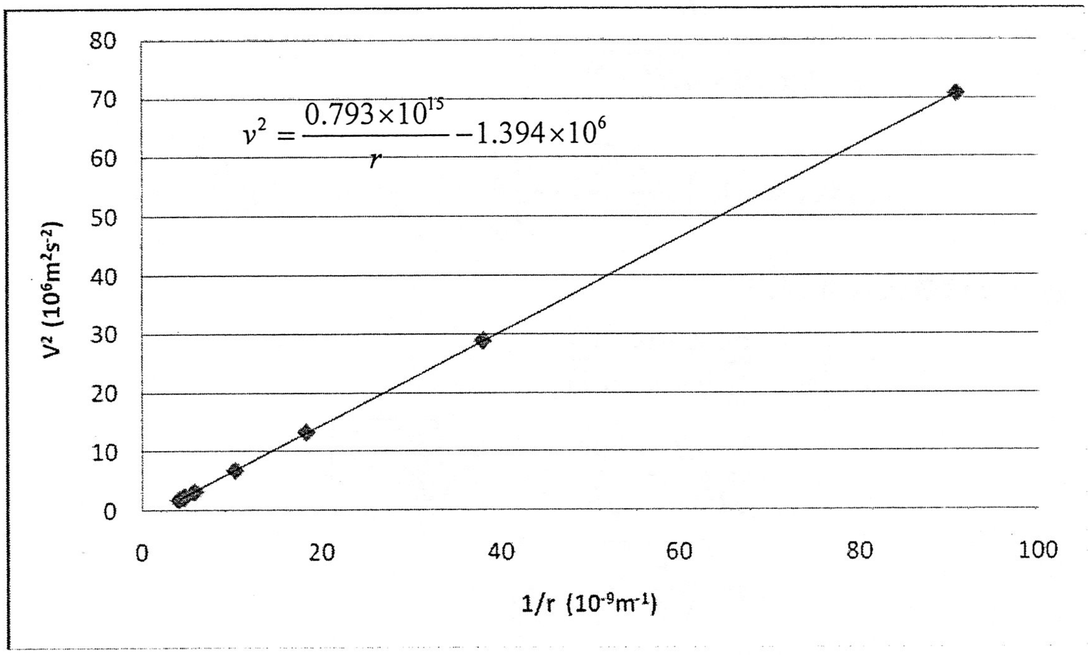
由能量守恆可得 $\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=E$，$E$為總機械能，$M$、$m$、$v$分別為地球的質量，火箭的質量和速率。整理後，可得：

$$v^2=\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}\,, \tag{1}$$

由上列數據，改成v^2與$\frac{1}{r}$如下

$v^2\left(10^6 m^2 s^{-2}\right)$	$\frac{1}{r}\left(10^{-9} m^{-1}\right)$
70.66	90.91
28.88	38.02
13.34	18.38
6.859	10.45
3.226	5.886
2.347	4.780
1.839	4.156

在方眼紙上作v^2-1/r之圖如下頁：



由上途中斜率得知：$2GM=0.793\times10^{15}$：，故地球質量M為

$$M=\frac{0.793\times10^{15}}{2\times6.67\times10^{-11}}=5.94\times10^{24}kg \quad 。$$

(12) $\underline{\quad 5.69\times10^{8} \quad}$

解：

太空船可航行至離地球最遠的距離時，其速率等於零，由(1)式代入$v^2=0$與作圖所得的數據，得：

$$r=\frac{0.793\times10^{15}}{1.394\times10^{6}}=5.69\times10^{9}m=5.69\times10^{8}m \quad 。$$

九、(13) $\underline{T_0(1+\mu\theta)}$

解：

因為正向力為$(T_0+T)\sin\theta/2\approx(T_0+T)\theta/2$，故摩擦力等於$\mu(T_0+T)\theta/2$；而切線的合力為$(T-T_0)\cos\theta/2\approx(T-T_0)$。當切線合力等於摩擦力時，細繩才有可能向右滑動，即$(T+T_0)\theta/2\approx(T-T_0)$，故：

$$T=\left(\frac{1+\mu\theta/2}{1-\mu\theta/2}\right)T_0\approx\left(1+\mu\theta/2\right)^2T_0\approx(1+\mu\theta)T_0$$

(14) $\underline{e^{\mu\pi}T_0}$

解：

對有限角度$\theta=\pi$，可將π角拆為n等份，且$n\to\infty$，則：

$T=T_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mu\pi}{n}\right)^n=e^{\mu\pi}T_0$其中　$e=2.718...$。

十、 (15) $\underline{\sqrt{\frac{30gh}{23}}}$

解：

實心球對與軌道接觸之兩點連線作純滾動，而球心與兩點連線之距離為$\sqrt{3}a/2$，故相對兩點連線之轉動慣量為$I=\frac{2ma^2}{5}+3ma^2/4$，由能量守恆$I\omega^2/2=mgh$，可得$a\omega=\sqrt{\frac{40gh}{23}}$，因為球心的速率為$\sqrt{3}a\omega/2$，故球心的速率為$\sqrt{\frac{30gh}{23}}$。

另解：

由能量守恆知道移動動能與轉動動能的和是等於位能的變化，即：

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}ma^2\cdot\omega^2,$$

解得　$a\omega=\sqrt{\frac{40gh}{23}}$。因為球心的速率為$\sqrt{3}a\omega/2$，故球心的速率為$\sqrt{\frac{30gh}{23}}$。

十一、(16) $\underline{\frac{I_0{\tau_0}^2}{4\beta^2}}$

解：

因炮竹沿圓盤的半徑方向發射出去（即其動量沿著徑向），對圓盤不產生力矩，而由 0 到 t 時段的角衝量 $\tau_0 t$ 必等於角動量的變化量，因圓盤最初為靜止，故可得

$$\tau_0 t = I\omega - 0 = (I_0 - \beta t)\omega \qquad (1)$$

即

$$\omega = \frac{\tau_0 t}{I_0 - \beta t} \qquad (2)$$

由(2)式可得圓盤在 $t = I_0/(2\beta)$ 的轉動動能

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{(\tau_0 t)^2}{I_0 - \beta t} = \frac{I_0 \tau_0{}^2}{4\beta^2} \qquad (3)$$

(17) $\alpha = \dfrac{4\tau_0}{I_0}$

解：

將(2)式對時間微分可得角加速度 α 為

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_0}{I_0 - \beta t} + \frac{\beta \tau_0 t}{(I_0 - \beta t)^2} = \frac{I_0 \tau_0}{(I_0 - \beta t)^2} \qquad (4)$$

故圓盤在 $t = I_0/(2\beta)$ 的角加速度 α 為

$$\alpha = \frac{4\tau_0}{I_0} 。 \qquad (5)$$

十二、(18) $\dfrac{2mg\ell_0}{nR}$

解：

在平衡狀態下，$2mg = P_0 A$ 此處 A 為活塞面積，P_0 為氣體壓力。

$$\because P_0(A\ell_0) = nRT_0$$

$$\therefore 2mg = \frac{nRT_0}{\ell_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2mg\ell_0}{nR}$$

(19) 53

解：

在碰撞發生之前瞬間，小球的初速為 $v_0 = \sqrt{2g\ell_0}$ ，活塞的初速為 0。碰撞之後瞬間，設小球反彈之速率為 v，活塞向下的初速為 u，由彈性碰撞的條件，可得聯立方程式

$$\begin{cases} mv_0 = 2mu - mv \\ \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}(2m)u^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 = 2u - v & (1) \\ v_0^2 = 2u^2 + v^2 & (2) \end{cases}$$

由(1)式 $v = 2u - v_0$ 代入(2)，可得 $u = \dfrac{2}{3}v_0$ ，$v = \dfrac{1}{3}v_0$

由絕熱壓縮過程，可知

$$PV^{5/3} = P_0V_0^{5/3}$$

當活塞降至最低點時，由絕熱過程作功得：

$$W = -\int_{V_0}^{V} PdV = \int_{V}^{V_0} \frac{P_0V_0^{5/3}}{V^{5/3}} dV = \frac{P_0V_0^{5/3}}{V^{2/3}}\left(-\frac{3}{2}\right)\Bigg|_{V}^{V_0} = \frac{3P_0V_0}{2}\left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1\right),$$

活塞的動能及其重力位能將變成對氣體所做之功 W'為

$$W' = \frac{1}{2}(2m)u^2 + 2mg(\ell_0 - \ell),$$

由能量守恆知：$W = W'$，故

$$m\frac{4}{9}v_0^2 + 2mg(\ell_0 - \ell) = \frac{3P_0A\ell_0}{2}\left(\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{2/3} - 1\right),$$

$$m\frac{8}{9}g\ell_0 + 2mg(\ell_0 - \ell) = 3mg\ell_0\left(\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{2/3} - 1\right),$$

$$\frac{8}{9} + 2\left(1 - \frac{\ell}{\ell_0}\right) = 3\left[\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right)^{-2/3} - 1\right],$$

經整理後得 $18(\ell/\ell_0)^{5/3} - 53(\ell/\ell_0)^{2/3} + 27 = 0$，故 $c = 53$。

另解：

由絕熱壓縮過程，可知

$$PV^{5/3} = P_0V_0^{5/3}$$

$$nRTV^{2/3} = nRT_0V_0^{2/3}$$

$$T\ell^{2/3} = T_0\ell_0^{2/3}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\ell_0^{2/3}}{\ell^{2/3}}$$

由能量守恆，可得

$$\frac{1}{2}(2m)u^2 + 2mg(\ell_0 - \ell) = \frac{3}{2}nR(T - T_0)$$

$$\frac{8}{9}mg\ell_0 + 2mg\ell_0(1 - \frac{\ell}{\ell_0}) = \frac{3}{2}nRT_0\left(\frac{T}{T_0} - 1\right)$$

$$\frac{8}{9}mg\ell_0+2mg\ell_0\left(1-\frac{\ell}{\ell_0}\right)=3mg\ell_0\left(\frac{T}{T_0}-1\right)$$

$$\frac{8}{9}+2\left(1-\frac{\ell}{\ell_0}\right)=3\left(\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{2/3}-1\right)$$

$$18(\ell/\ell_0)^{5/3}-53(\ell/\ell_0)^{2/3}+27=0$$

十三、(20) $\underline{\frac{5}{2}R}$

若要確保鋼珠在全程不會脫離滑軌，則必須要求它在圓形軌道的最高點時(令為D點，如下圖)，其所受重力要小於或等於所需的圓周運動向心力，當A的高度為最小時（令之為 h)，D點所受重力即等於所需的向心力：

$$\frac{v_D^2}{R}=g$$

再者，此時的動能即來自從A點降下的重力位能，也就是：

$$mg(h-2R)=\frac{1}{2}mv_D^2$$

聯立以上二式可得：

$$mg(h-2R)=\frac{1}{2}mRg\Rightarrow h-2R=\frac{1}{2}R\Rightarrow h=\frac{5}{2}R$$

(21) $\underline{3/2}$

解：

考慮連續兩次通過C點所經時間，亦即由C→D→C共繞一圈的時間。當鋼珠在圓軌上的某處時，如下圖，其連心線與鉛直線呈有向角θ，則依能量守恆可得：

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2=mgR\left(\frac{3}{2}+\cos\theta\right)\Rightarrow v_\theta=\left[gR(3+2\cos\theta)\right]^{1/2}$$

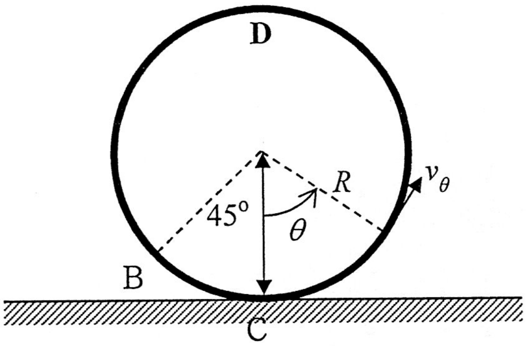
藉此可得夾角 θ 和時間 t 的關係，如下：

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega_\theta=\frac{v_\theta}{R}=\left[\frac{g}{R}(3+2\cos\theta)\right]^{1/2}\Rightarrow t=\int\left[\frac{g}{R}(3+2\cos\theta)\right]^{-1/2}d\theta$$

因此，由C→D→C所需的時間為：

$$t_{CDC}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{g}{R}(3+2\cos\theta)\right]^{-1/2}d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{R}{2g(3/2+\cos\theta)}\right]^{1/2}d\theta$$

故可得 $a=3/2$。



十四、(22) $\underline{L/3}$

解：

設剛撞擊後細棒質心的速度為 V(沿水平方向，向左)，因此撞擊的衝量就為 MV 。

以座標設原點長棒的尾端，則衝量所帶來的角動量為MVh，即：

$$MVL/2 - I\omega = MVh，$$

ω為細棒剛撞擊後的角速度(順時鐘轉動方向為正)。

因此 $$\omega = \frac{2V}{L}\left(1 - 2h/L\right)。$$

若要細棒與細繩成一直線進行擺動的狀態，$V = (L + L/2)\Omega = 3L/2\ \Omega$，其中$\Omega$為細繩的角速度。

因此 $\Omega = 2V/3L$ 。

細棒與細繩成一直線進行擺動，也必須有$\omega = \Omega$，因此

$$2V/L\ \left(1 - 2h/L\right) = 2V/3L \quad ，$$

故得

$$h = L/3 。$$

十五、(23) $\underline{\dfrac{3}{2}\dfrac{cv}{\left(a^2 + c^2\right)}}$

解：

以汽車前端與地面的接觸點為參考點，地面對汽車的摩擦力不會產生力距。地面作用在汽車的正向力與重力的效應恰好抵消，因此角動量守恆。故

$$-b/2 \le x \le b/2,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le c 。$$

剎車前汽車速度為$-v\hat{y}$ ，角動量$\vec{L} = \frac{1}{2}Mcv\hat{x}$ 。x 軸轉動慣量$I = \frac{1}{3}M\left(a^2 + c^2\right)$ 。

由角動量守恆知 $I\omega_0 = L \Rightarrow \omega_0 = \frac{3}{2}\frac{cv}{\left(a^2 + c^2\right)}$ 。

(24) $\sqrt{\dfrac{4g}{3c^2}(a^2+c^2)\left(\sqrt{a^2+c^2}-c\right)}$

解：

轉動動能 $E_k=\dfrac{L^2}{2I}=\dfrac{M^2c^2v^2/4}{2M\left(a^2+c^2\right)/3}=\dfrac{3Mc^2v^2}{8\left(a^2+c^2\right)}$ 。

要造成翻車動能必須能克服位能: $E_k+\dfrac{1}{2}Mgc\geq\dfrac{1}{2}Mg\sqrt{a^2+c^2}$ ，

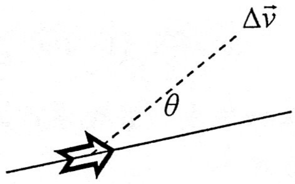
$v\geq v_0=\sqrt{\dfrac{4g}{3c^2}(a^2+c^2)\left(\sqrt{a^2+c^2}-c\right)}$ 。

十六、(25) $\theta=0$

解：

已知總力學能 E 為 $E=\dfrac{-GMm}{2r_0}$ ，故動能 $\dfrac{1}{2}mv_0^2$ 等於：

$$K=\frac{GMm}{2r_0}$$



故得 $v_0^2=\dfrac{GM}{r_0}$

動能的增加量為：

$$\begin{aligned}\Delta K&=\frac{1}{2}m(\vec{v}_0+\Delta\vec{v})^2-\frac{1}{2}m(\vec{v}_0)^2\\&=\frac{1}{2}m(2\vec{v}_0\cdot\Delta\vec{v}+\Delta v^2)\\&=\frac{1}{2}m\left(2v_0\Delta v\cos\theta+\Delta v^2\right)\end{aligned}$$

由上式知：當 $\cos\theta=1$ 時，ΔK 有極大值，即 $\theta=0$ 。

(26) $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}$

解：

由上討論知：$\Delta K_{MAX}=\dfrac{1}{2}m(2v_0\Delta v+\Delta v^2)=\dfrac{GMm}{2r_0}$ ，故

$$\Delta v^2+2\dot{v}_0\Delta v-\frac{GM}{r_0}=0$$

由上式求得速度小的增量為：

$$\Delta v_{\min}=-v_0\pm\sqrt{v_0^2+\frac{GM}{r_0}}=-v_0+\sqrt{v_0^2+\frac{GM}{r_0}}=-\sqrt{\frac{GM}{r_0}}+\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

十七、(27) ___25___

解：

設熱水管與空氣之間的熱傳導率為k_1、建築與室外之間的熱傳導率為k_2、熱水溫度為T ℃，則

$$k_1\left(T-20\right)=\alpha k_2(20-\left(-10\right)) \tag{1}$$

$$k_1\left(T-10\right)=\alpha k_2(10-\left(-30\right)) \tag{2}$$

此處α為一與溫度無關之正比常數，由(1)/(2)可得熱水的溫度為$T=50$ °C，設室內溫度為x °C，則$k_1\left(T-x\right)=\alpha k_2 x$，由(1)除以此式可得$x=25$ °C。

十八、(28) ___8.34___

解：

方法一：

在等壓過程中的實驗 1.，可以由第一定律，$\Delta Q=\Delta U+P\Delta V$，得：

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P=\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P+P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P \tag{1}$$

其中下標 P，表示壓力為定值。因為狀態方程式為：$PV=RT$，故$\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P\cong\frac{R}{P}$，

且$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P=29.19$焦耳，故(1)式等於：

$$29.19\text{焦耳}=\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P+R \tag{2}$$

同理實驗 2.，可以得到

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V=\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_V=20.85\text{ 焦耳}, \tag{3}$$

其中下標 V 表示體積保持一定。因為空氣的狀態方程式與理想氣體同，顧：$\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P=\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_V$，因此由(2)式和(3)式可以得到 R 值等於：___8.34___ J/K·mol。

方法二：

由 Mayer's 方程式：$c_p-c_v=R$，(莫耳定壓比熱和莫耳定容比熱的差值等於 R)，

實驗的結果得知$c_P=29.19$焦耳，$c_v=20.85$焦耳，故由第一定律得 R 值為：

$$28.62-20.50=8.34\text{ J/K}\cdot\text{mol}。$$

十九、(29) <u>1110</u>

解：

(a)由於海水密度可視為不變，因此在海溝底部的海水靜液壓力為

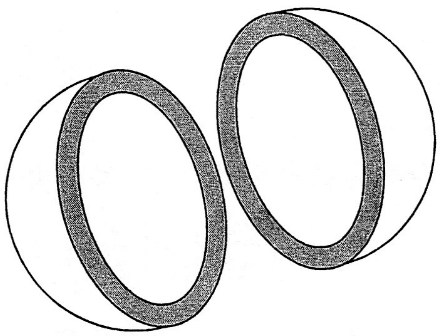
$$P(H)=\rho_0 gH=(1050\times9.80\times10.9\times10^3)=1.12\times10^8\ \text{Pa}$$

在海平面處的大氣壓力為1.01×10^5 Pa，可知在馬里亞納海溝底部的海水壓力約為大氣壓力的 1110 倍。

(30) <u>9.4</u>

解：

(b)為分析深潛容器鋼壁所受的應力，可將該球形容器視為由兩個半球形容器貼合構成，如右圖所示。設在這兩個半球面鋼壁上，彼此互相推擠的力為 F，鋼壁的截面積為 A，球殼上所受的海水壓力為 $P(H)$，則



$$F=P(H)\times\pi(r+t)^2$$

按楊氏係數的定義，可得

$$\frac{F}{A}=Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{P(H)\times\pi(r+t)^2}{\pi(r+t)^2-\pi r^2}=Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{(r+t)^2}{2rt+t^2}=\frac{Y}{P(H)}\frac{\Delta\ell}{\ell}=\frac{2.0\times10^{11}}{1.12\times10^8}\times0.0050=8.7$$

設 $x=t/r$，上式可改寫為

$$1+2x+x^2=8.9(2x+x^2)$$

$$\Rightarrow\quad 7.9x^2+15.8x-1=0$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{-15.8+\sqrt{15.8^2+4\times7.9}}{2\times7.9}=0.063$$

$$\Rightarrow\quad t=0.061r=0.061\times1.5=0.094\ \text{m}=9.4\ \text{cm}$$

為免被海水擠壓而致永久變形，該深潛容器的鋼壁厚度的最小值為 9.4 cm。

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、外力作用下的一維彈簧運動

(1) 質心位於距 A 木塊 0.1m 處，因為外力是一個定值，因此質心作等加速度運動：

$$a_{\mathrm{CM}}=\frac{10}{10}=1.0\ \mathrm{m/s^2}\ 。\tag{1}$$

質心至 A 木塊段的彈簧，其的有效彈力常數為：

$$k_A=200\ \mathrm{N/m}\ 。\tag{2}$$

在質心座標系中觀察時，A 木塊除了彈力外，在定力 F 作用下，會感覺受到一個向左虛力。此虛力為常數，如同重力對向下彈簧的影響，並將 A 方塊振盪平衡點沿虛力方向（向左）移動：$\dfrac{m_A a_{\mathrm{CM}}}{k_A}=0.04\mathrm{m}$。若以質心為原點，水平軸為 x 軸，在質心座標系觀察時，A 方塊會以 $x=-0.14\mathrm{m}$ 為平衡點，以 0.04m 為振幅，自靜止出發向左作簡諧運動，其頻率為：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{8}}=\frac{5}{2\pi}\mathrm{Hz}\ 。\tag{3}$$

(2) 以(1)討論同理，B 木塊距離質心 0.4m，所受總力等於 F 和扣除彈簧之拉力，即 $10-2\times1=8\mathrm{N}$ 向右。

質心至 B 木塊段的彈簧，其的有效彈力常數為：

$$k_B=50\ \mathrm{N/m}\ 。\tag{4}$$

因此 B 木塊振盪之平衡點因此力向右移動：$\dfrac{8}{k_B}=0.16\mathrm{m}$，因此 B 木塊會以 $x=0.56\mathrm{m}$ 為平衡點，以 0.16m 為振幅，自靜止出發向右作簡諧運動，頻率：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50}{2}}=\frac{5}{2\pi}\mathrm{Hz}\ 。\tag{5}$$

注意 A、B 兩者簡諧運動的頻率相等。故最大距離處即當兩方塊同時到達反方向的極點，即最大距離為：$0.56+0.14+0.16+0.04=0.9\mathrm{m}$。

(3) 依據(1)和(2)的討論，B 木塊位置與時間的關係式為：

$$x(t)=0.56+0.16\cos(5t)\ 。\tag{6}$$

代入 $t=0.42\mathrm{s}$，得 B 方塊位置為

$$x(0.2)=0.56+0.16\cos(5\times0.42)=0.47\mathrm{m}\ ，\tag{7}$$

此時質心移動到：$\dfrac{1}{2}a_{\mathrm{CM}}t^2=0.08\mathrm{m}$，所以此時 B 位置為 0.55m，而 B 的起點為 0.4m，故移動 0.15m。

(4) 力是施於 B 之上，而瞬時功率為 $P=F\cdot v_B$，其中：

$$v_B(t)=-0.8\sin(5t)+a_{\mathrm{CM}}t\ 。\tag{8}$$

在 $t=0.42\mathrm{s}$ 時，速率等於：$v_B(t=0.42)=-0.27\mathrm{m/s}$。

故功率等於：$P=F\cdot v_B=-2.7\mathrm{J/s}$。

二、小孔的水柱高

(1) 在開關閥為關閉的情形底下，小洞水柱的高度為 h_1；根據 Bernoulli 方程，

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v^2$， v 為水柱自小洞噴射出的鉛錘速度，並且

$v^2 = 2gh_1$ ， h_1 為水柱的高度。

因此 $h_1 = H$。

(2) 在開關閥為全開的情形底下，出水端的水流速度為 $v_2 = \sqrt{2gH} = v$。

而在前段水管中的水流速度（忽略自小洞噴射出的水流），利用連續方程，可得

$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$， 即

$v_1 = v_2 \dfrac{A_2}{A_1}$。

在小洞處，根據 Bernoulli 方程，可得

$\rho g H = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_\perp^2)$， $v_\perp$ 為水柱自小洞噴射出的鉛錘速度，因此

$$v_\perp^2 = v_2^2 - v_1^2 = v_2^2\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] = v^2\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] = 2gH\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]。$$

另外，水柱的高度與鉛錘速度的關係為 $v_\perp^2 = 2gh_2$，故

$$h_2 = H\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

(3) 由(1)和(2)知 $h_2/h_1 = 1-(A_2/A_1)^2$ ，故

$A_2/A_1 = \sqrt{1-h_2/h_1} = \sqrt{2/3}$。