第39頁

第2章　平面運動

單元一：二維向量

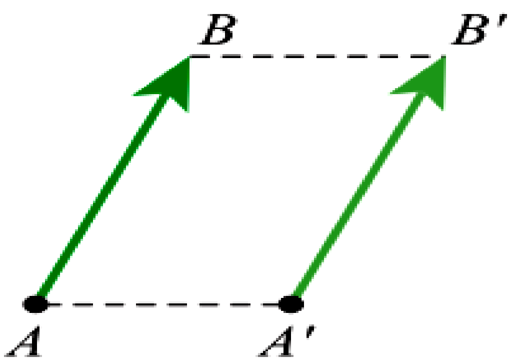
一、向量的性質

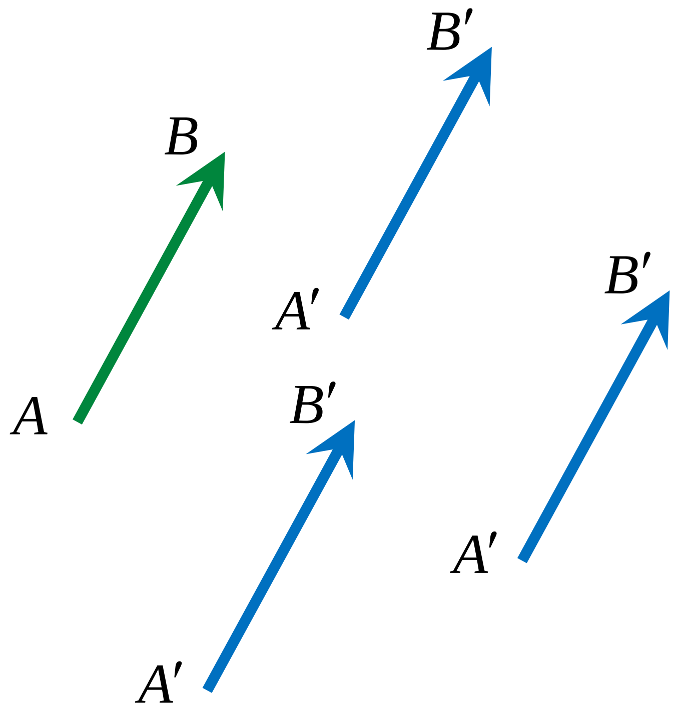
1.（1）向量：凡具有量值與方向的物理量
例如：位移、速度、加速度、力、動量、‧‧‧‧等。

（2）純量：只有量值，不須方向的物理量
例如：路徑長、時間、溫度、質量、‧‧‧‧等。

2. 向量的可平移性

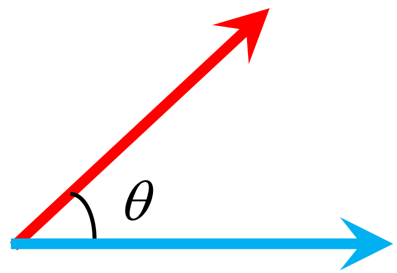
如右圖 $\overrightarrow{AB}$ 之 $\overrightarrow{A'B'}$ 與，將一向量平移至其他位置，則兩者不僅大小相等，方向也相同，故平移後的向量仍與原來之向量相等。因此我們可將向量任意平移至其他位置。

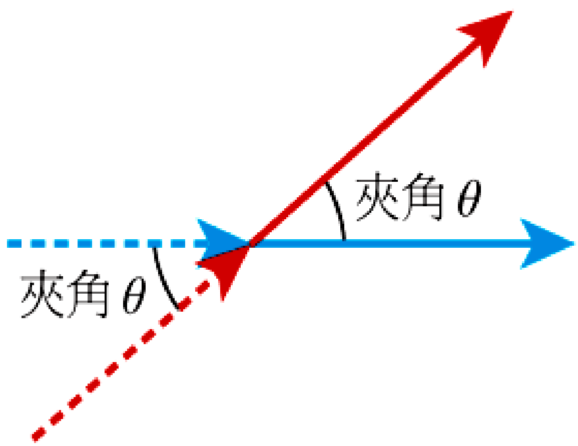


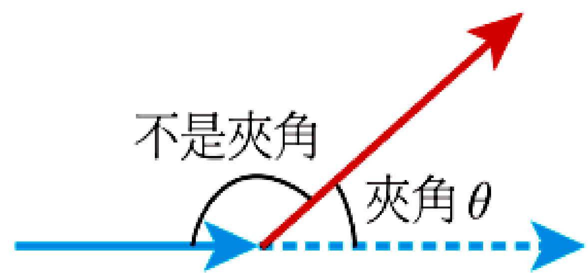


3. 向量的夾角

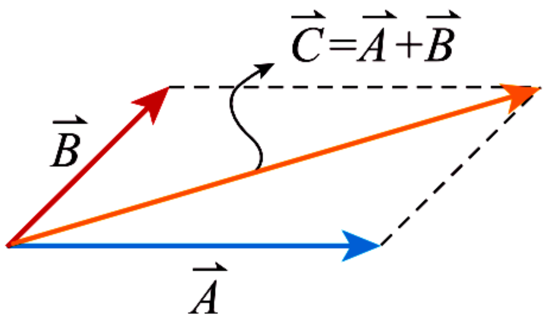
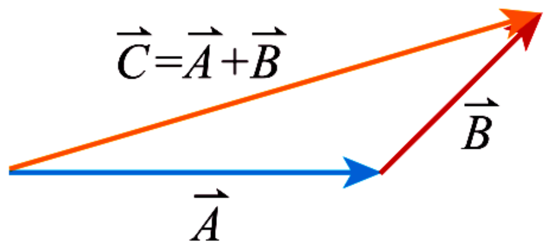
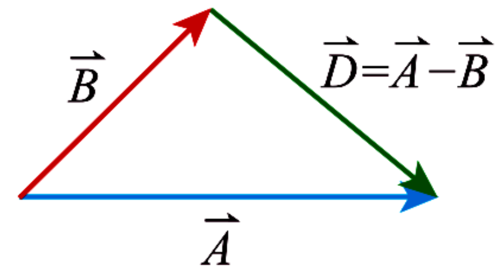
如圖所示，兩向量之夾角 θ，必須是二向量張開之角（即起點端接起點端或終點端接終點端）。





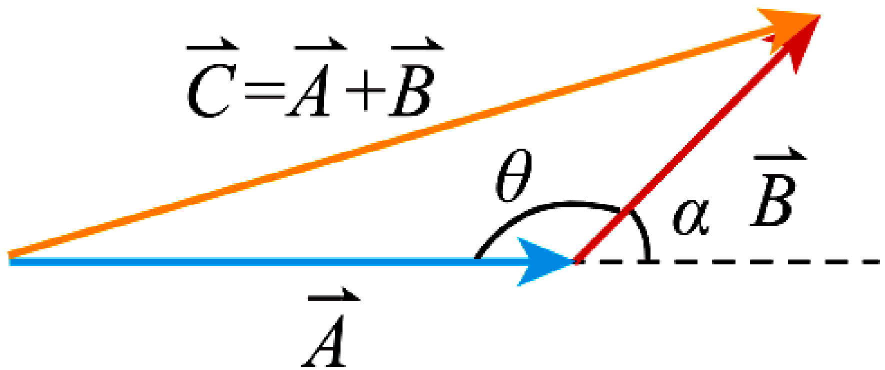


二、向量的加法與減法

加　　法		減　　法
 (a) 平行四邊形法	 (b) 三角形法	 三角形法

[延伸] 在三角形法中，我們常利用餘弦定理來求兩向量和的大小。

[說明]



$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \Rightarrow \left|\vec{C}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\pi - \alpha)$$

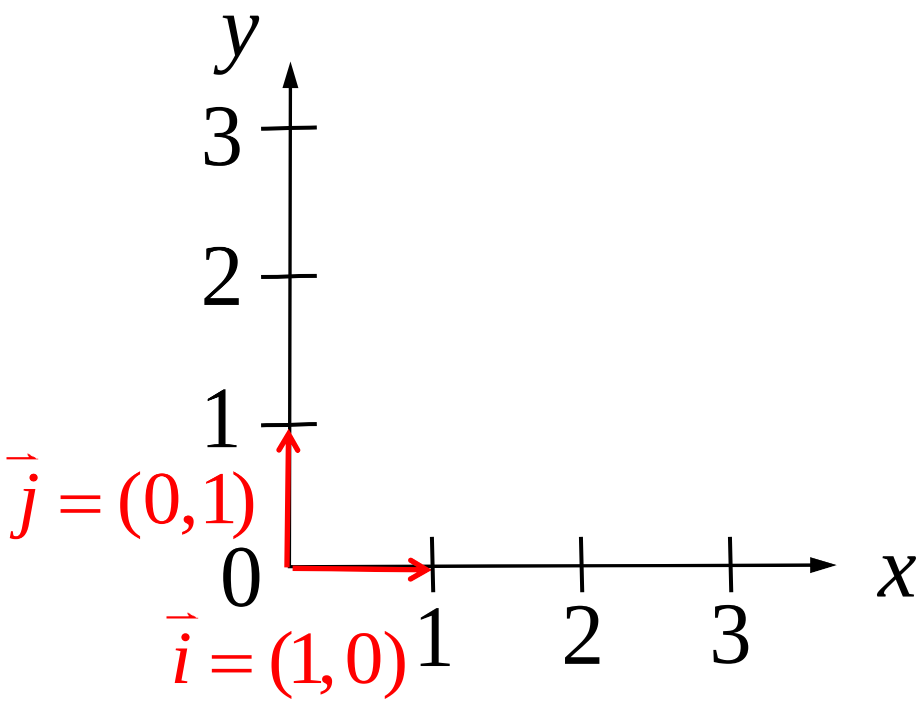
$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha \Rightarrow \left|\vec{C}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$$

三、坐標解析法

1．向量的直角坐標表示法

$\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$

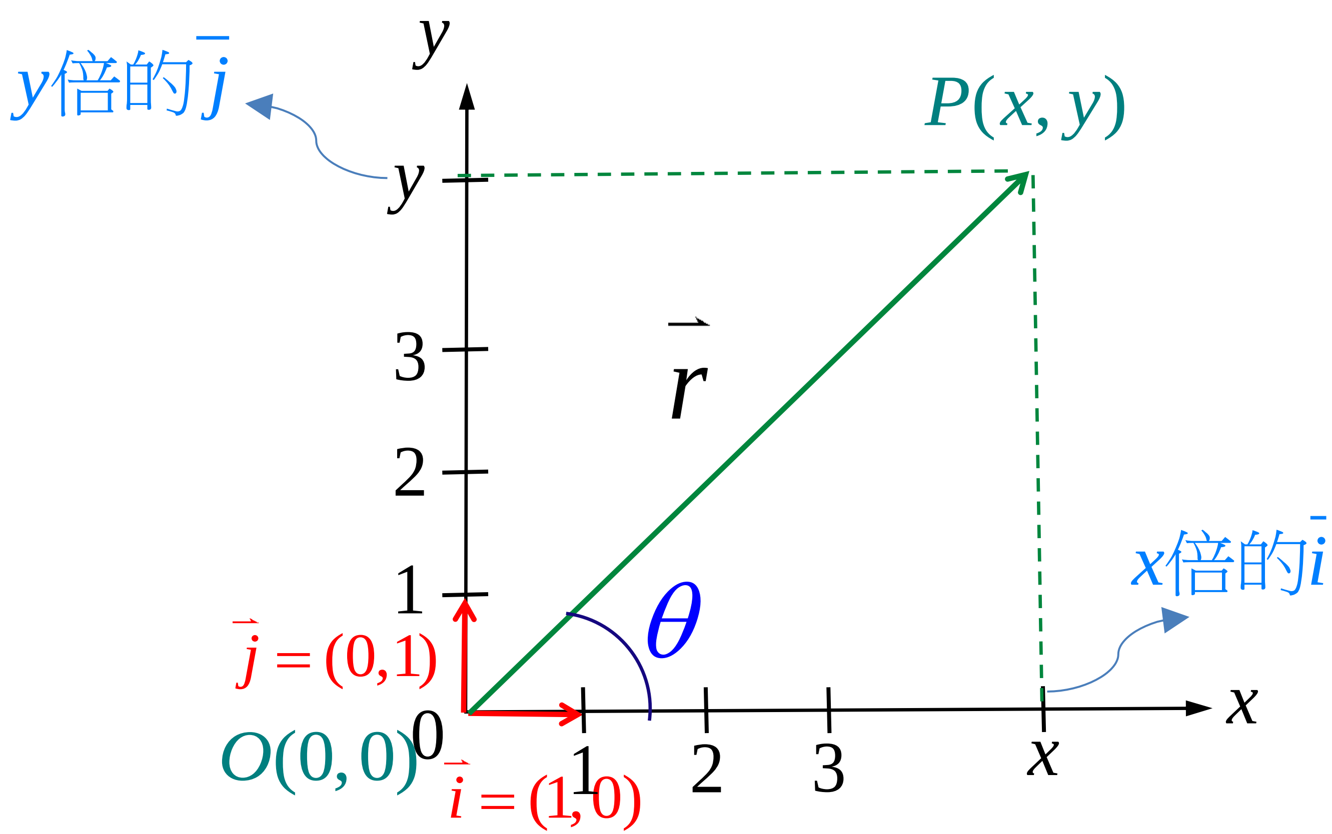
分別代表 x 軸及 y 軸的單位向量(長度皆等於1)



三、坐標解析法

1．向量的直角坐標表示法

$$\text{向量}\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$$



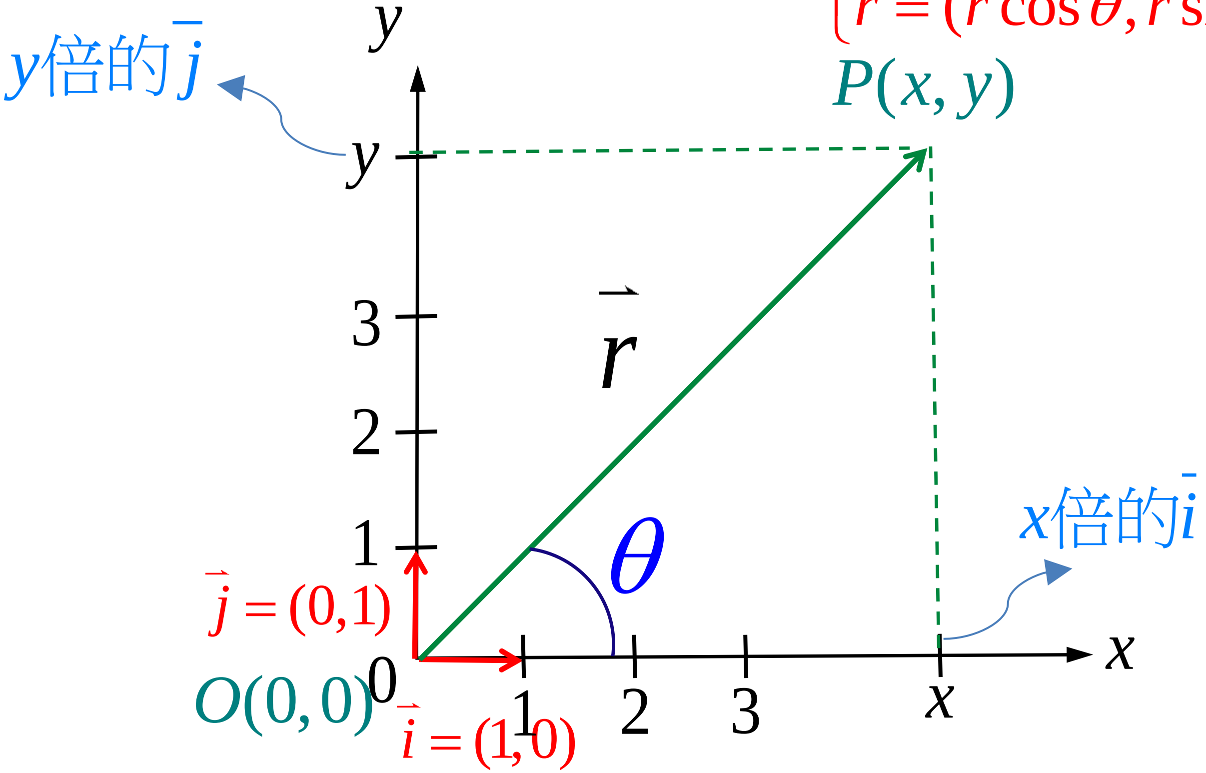
向量 $\vec{r}=\overline{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x,y)$

(1) 大小(量值):$\left|\vec{r}\right|=r=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) 方向角:$\overline{OP}$ 與 x 軸正向的夾角稱為 $\overline{OP}$ 的方向角

$(0\le\theta\le 2\pi)$

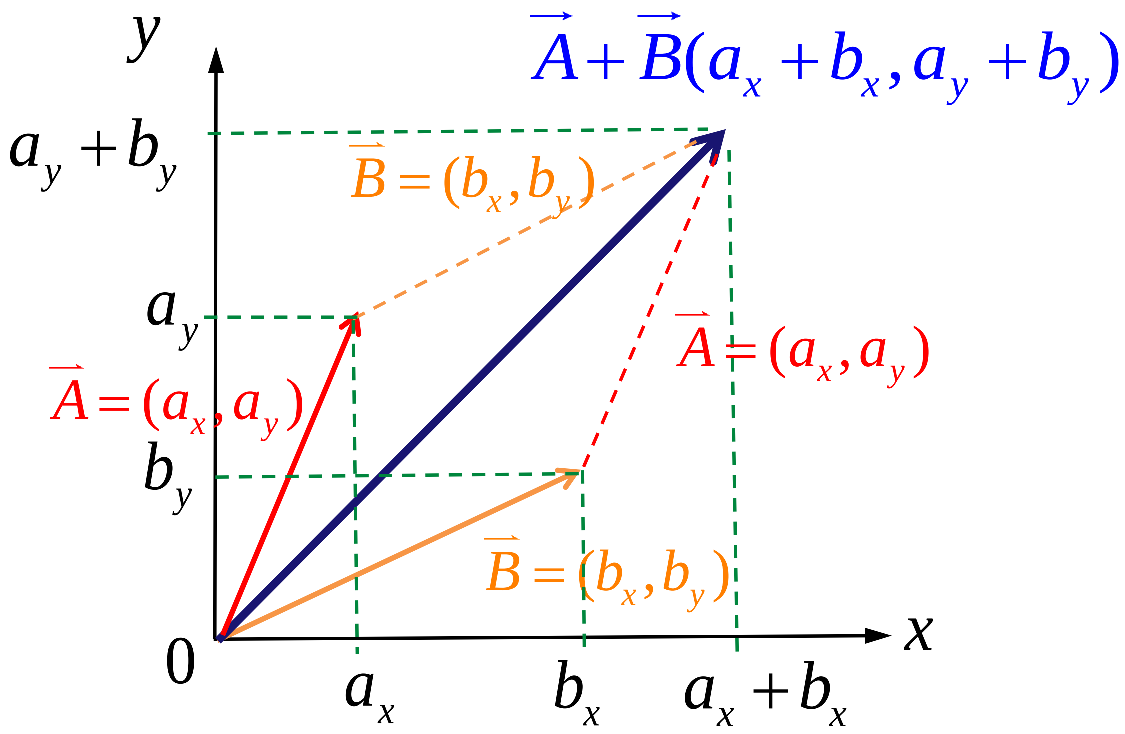
$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{y}{r}\text{、}\cos\theta=\dfrac{x}{r}\text{、}\tan\theta=\dfrac{y}{x}\\ \vec{r}=(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$$



2. 向量加減的直角坐標表示法

$$\begin{cases} \vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = (a_x, a_y) \\ \vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (b_x, b_y) \end{cases}$$

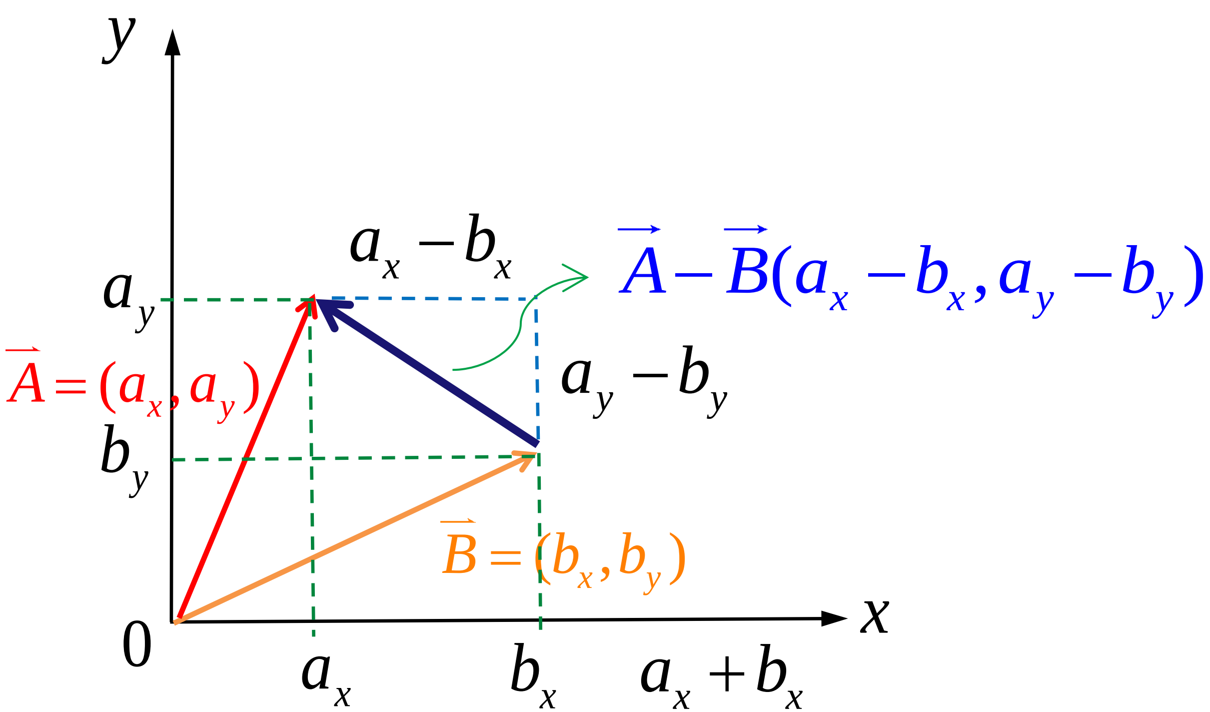
$$\rightarrow \vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$



2. 向量加減的直角坐標表示法

$$\begin{cases} \vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = \left(a_x, a_y\right) \\ \vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} = \left(b_x, b_y\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{A} - \vec{B} = \left(a_x - b_x\right)\vec{i} + \left(a_y - b_y\right)\vec{j} = \left(a_x - b_x, a_y - b_y\right)$$



2. 向量加減的直角坐標表示法

[例題] $\vec{A}=(3,4)$ ；$\vec{B}=(5,6)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{A}+\vec{B}=(3+5,4+6)=(8,10)=8\vec{i}+10\vec{j}\text{，}\\ \text{大小}|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{8^2+10^2}=\sqrt{164}\text{。}\\ \vec{A}-\vec{B}=(3-5,4-6)=(-2,-2)=-2\vec{i}-2\vec{j}\text{，}\\ \text{大小}|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}\text{。}\end{cases}$$

四、向量的內積、外積

1. 內積

(1) 兩向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的內積寫成$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}}$，讀作「$\vec{A}\ dot\ \vec{B}$」，其結果為一純量，故也常稱之為向量的純量積。其在物理上的應用甚廣，如功、環場積……等等。

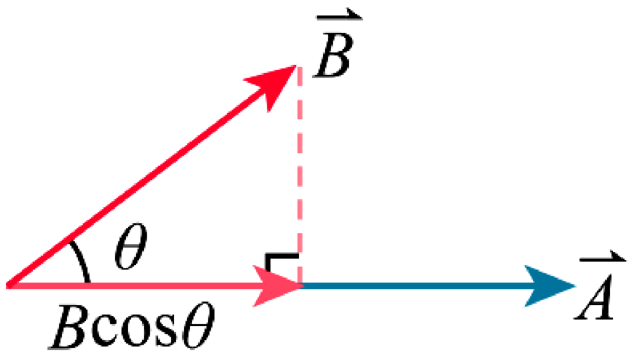
(2) 向量內積的定義為：$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta}$

其中θ為$\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角，且 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$。

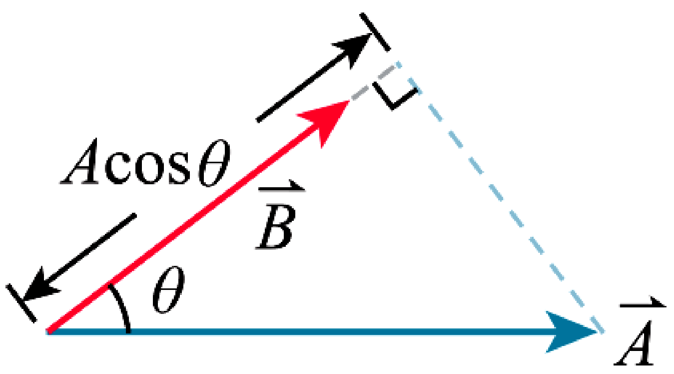
(3) 向量內積的幾何意義為：

① $\overline{A}$ 的大小乘以 $\overline{B}$ 在 $\overline{A}$ 方向上的投影量，如下圖(a)。

② $\overline{B}$ 的大小乘以 $\overline{A}$ 在 $\overline{B}$ 方向上的投影量，如下圖(b)。



(a)



(b)

(4) 坐標表示法：若 $\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ ；$\vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=a_xb_x+a_yb_y}$$

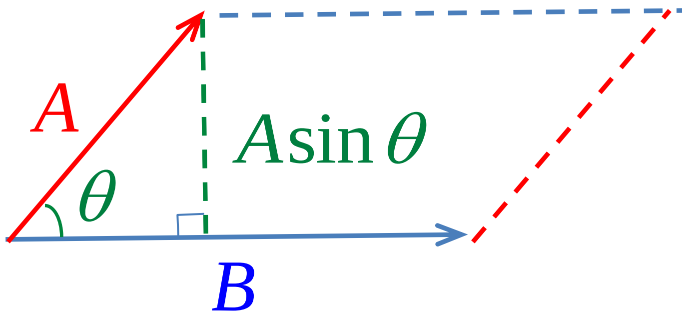
[例題] $\vec{A}=(3,4)$ ；$\vec{B}=(5,6)$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=3\times5+4\times6=39$$

1. 外積

(1) 兩向量$\overline{A}$和$\overline{B}$的外積寫成$\boxed{\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}}$，讀作「$\overrightarrow{A}$ *cross* $\overrightarrow{B}$」，其結果為一向量，故也常稱之為向量的有向積。其在物理上的應用亦甚廣，如力矩、帶電質點在磁場中的受力、載流導線在磁場中的受力……等等。

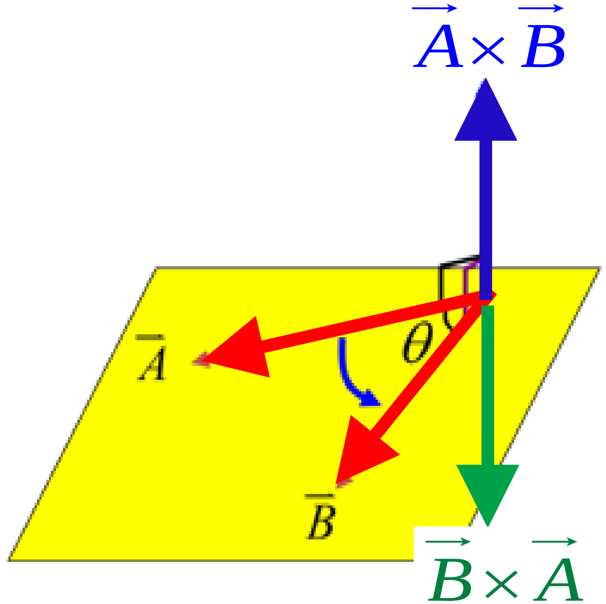
(2) 向量外積的定義：為向量，

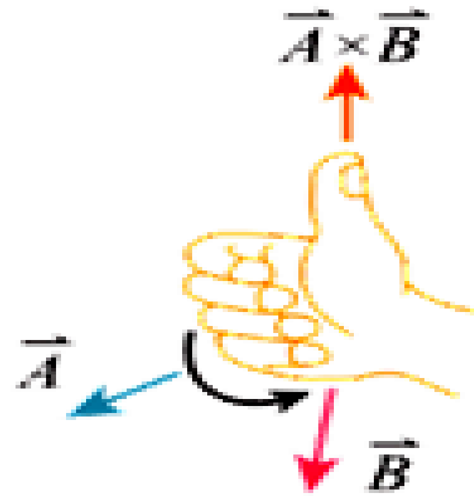


大小： $\boxed{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\theta}$

其中θ為$\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角，且 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$。

方向：**同時垂直於 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 兩向量**，依<u>右手螺旋定則</u>判定，



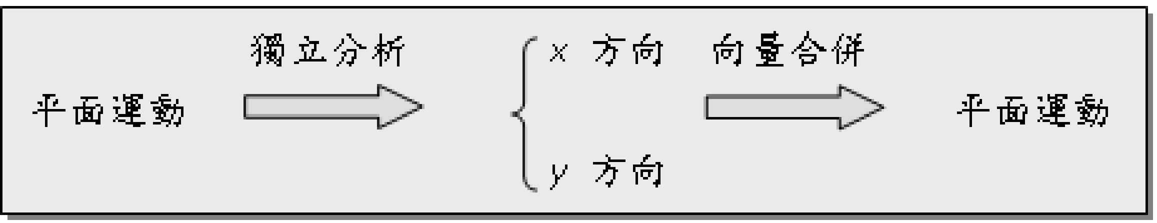


單元二：平面運動的位移、速度、加速度

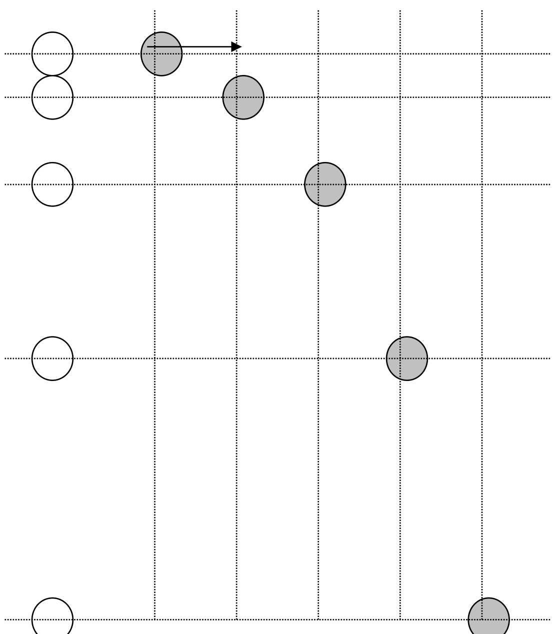
一、平面運動的描述：

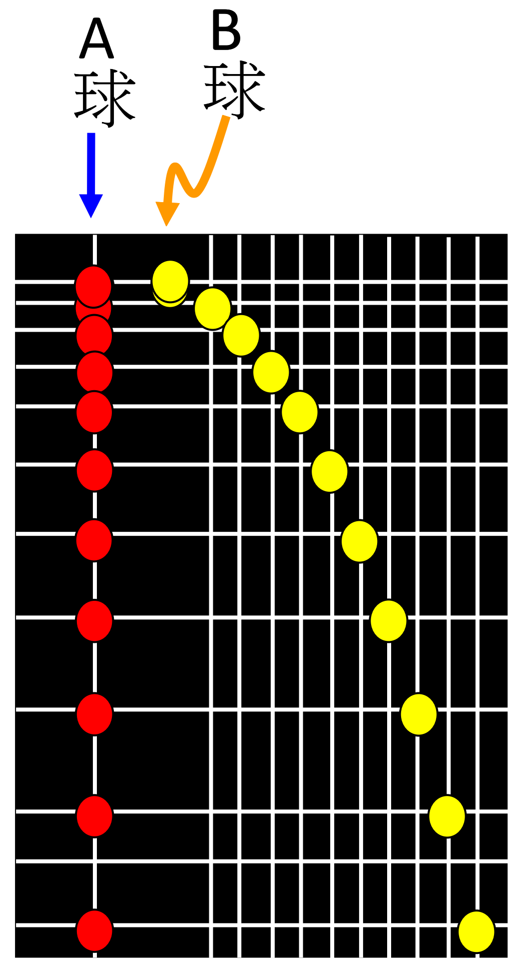
1. 運動的獨立性 ：

任何平面運動可以看成兩個**互相垂直的直線運動**之合成，例如 x 軸與 y 軸兩個方向；這兩個方向的運動彼此獨立。



自由落體　　水平拋射





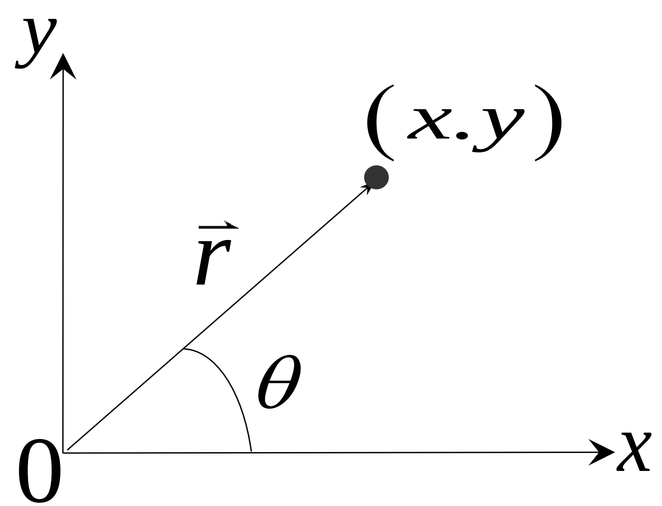
單元二：平面運動的位移、速度、加速度

一、平面運動的描述：

2. 位置向量： $\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (x, y)}$

大小： $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

與 +x 軸夾角θ ： $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



3. 位移與路徑長：

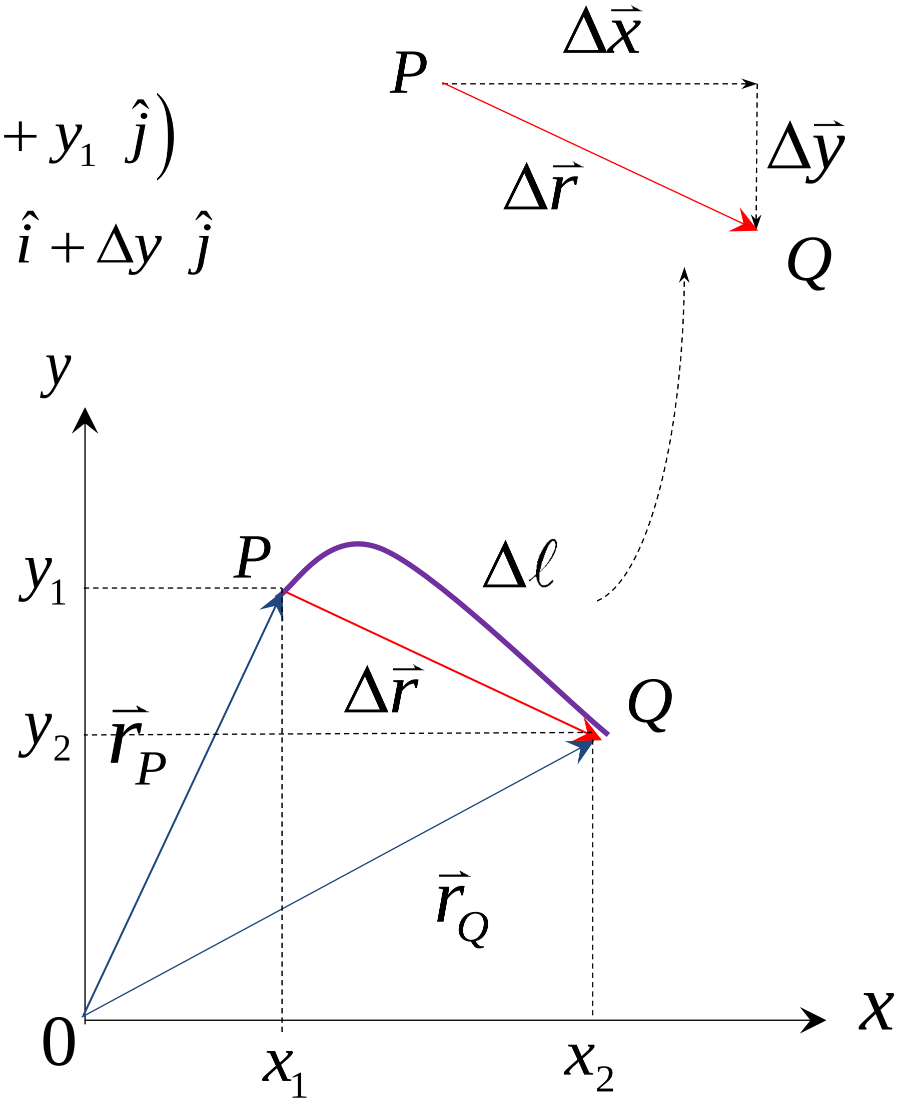
位移 $\Delta\vec{r}$ ：向量

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \left(x_2\ \hat{i} + y_2\ \hat{j}\right) - \left(x_1\ \hat{i} + y_1\ \hat{j}\right)$$

$$= \left(x_2 - x_1\right)\ \hat{i} + \left(y_2 - y_1\right)\ \hat{j} = \Delta x\ \hat{i} + \Delta y\ \hat{j}$$

路徑長 $\Delta\ell$：

實際軌跡的長度



4. 速度與速率：

平均速度 $$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\ \hat{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\ \hat{j}=\bar{v}_x\,\hat{i}+\overline{v_y}\ \hat{j}$$

（ $\vec{v}$ 的方向與 $\Delta\vec{r}$ 相同）

平均速率 $$v=\frac{\Delta\ell}{\Delta t}$$

瞬時速度 $$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\,\hat{i}+\Delta y\ \hat{j}}{\Delta t}=v_x\,\hat{i}+v_y\ \hat{j}$$

瞬時速率 $$v=\left|\vec{v}\right|$$ (就是**瞬時速度的量值**)

5. 加速度：

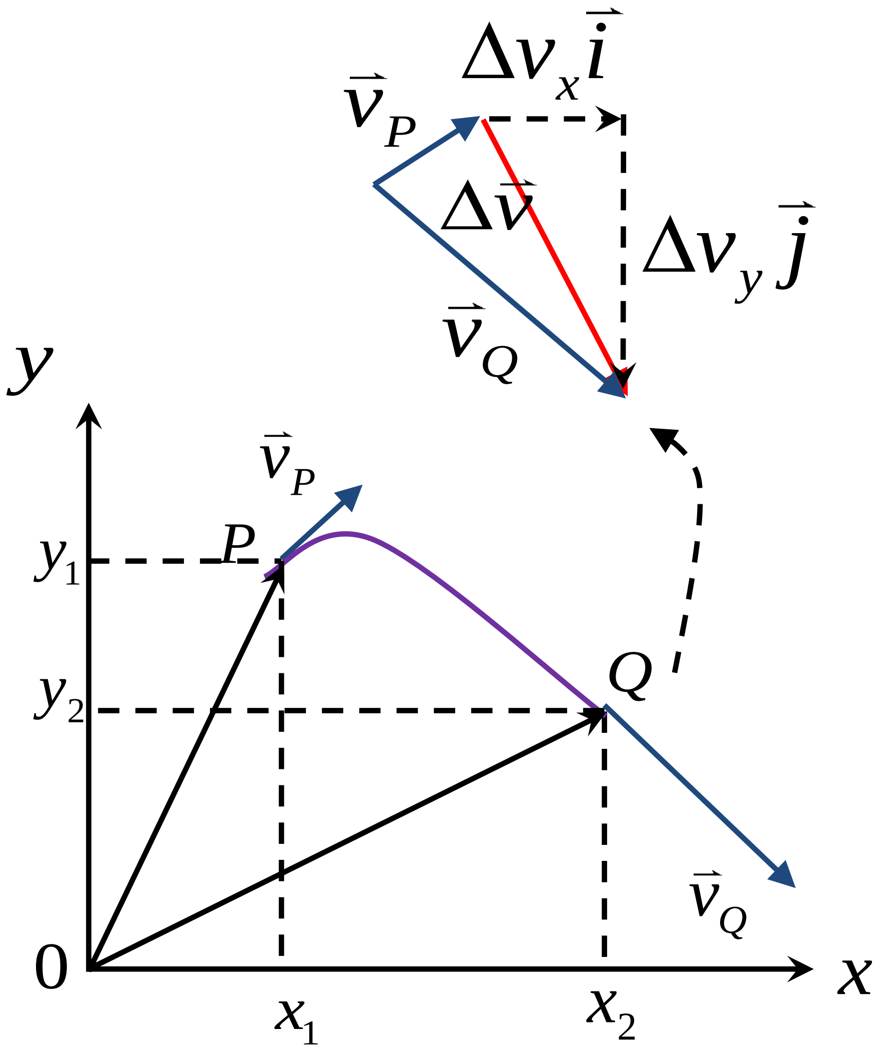
速度變化量 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta v_x\,\hat{i} + \Delta v_y\,\hat{j}$

平均加速度 $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} = \bar{a}_x\,\hat{i} + \bar{a}_y\,\hat{j}$

（平均加速度 $\vec{a}$ 的方向與速度變化量 $\Delta\vec{v}$ 的方向相同）

瞬時加速度 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta v_x\,\hat{i} + \Delta v_y\,\hat{j}}{\Delta t} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$


$\Delta v_x \vec{i}$
$\vec{v}_P$
$\Delta \vec{v}$
$\Delta v_y \vec{j}$
$\vec{v}_Q$
y
$\vec{v}_P$
P
y_1
y_2
Q
$\vec{v}_Q$
0
x_1
x_2
x

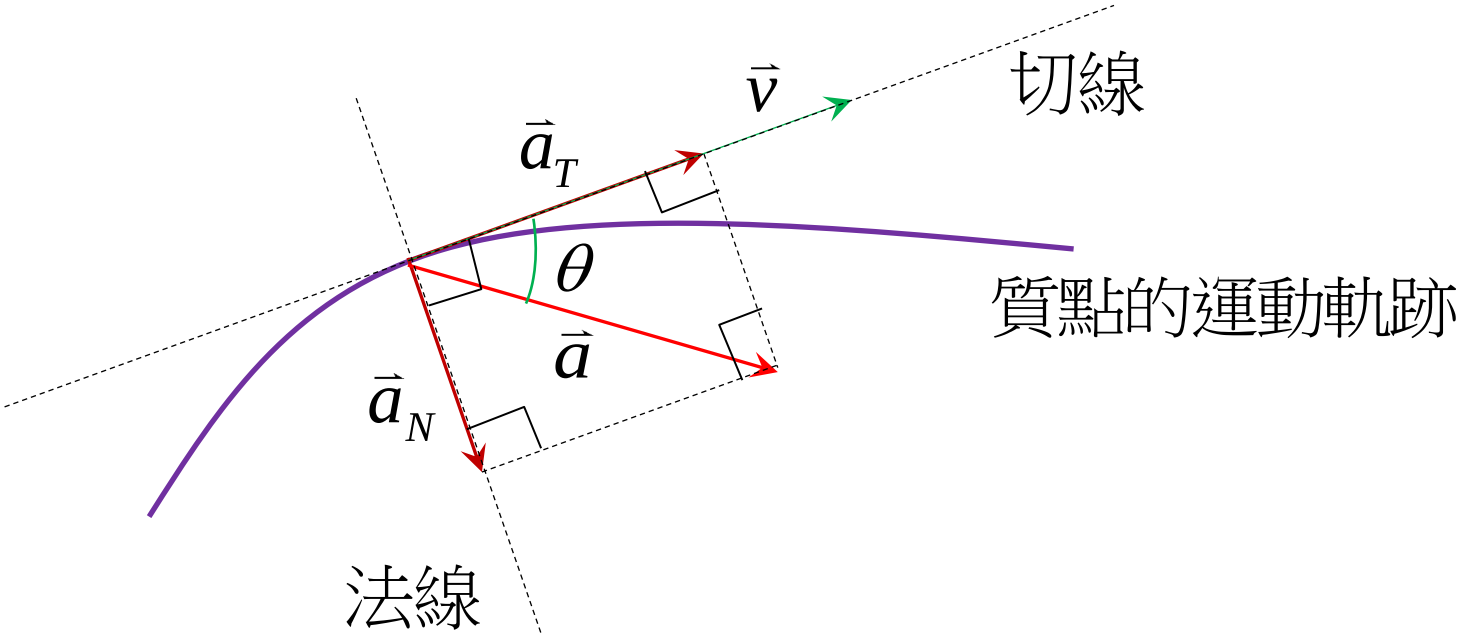
5. 加速度：

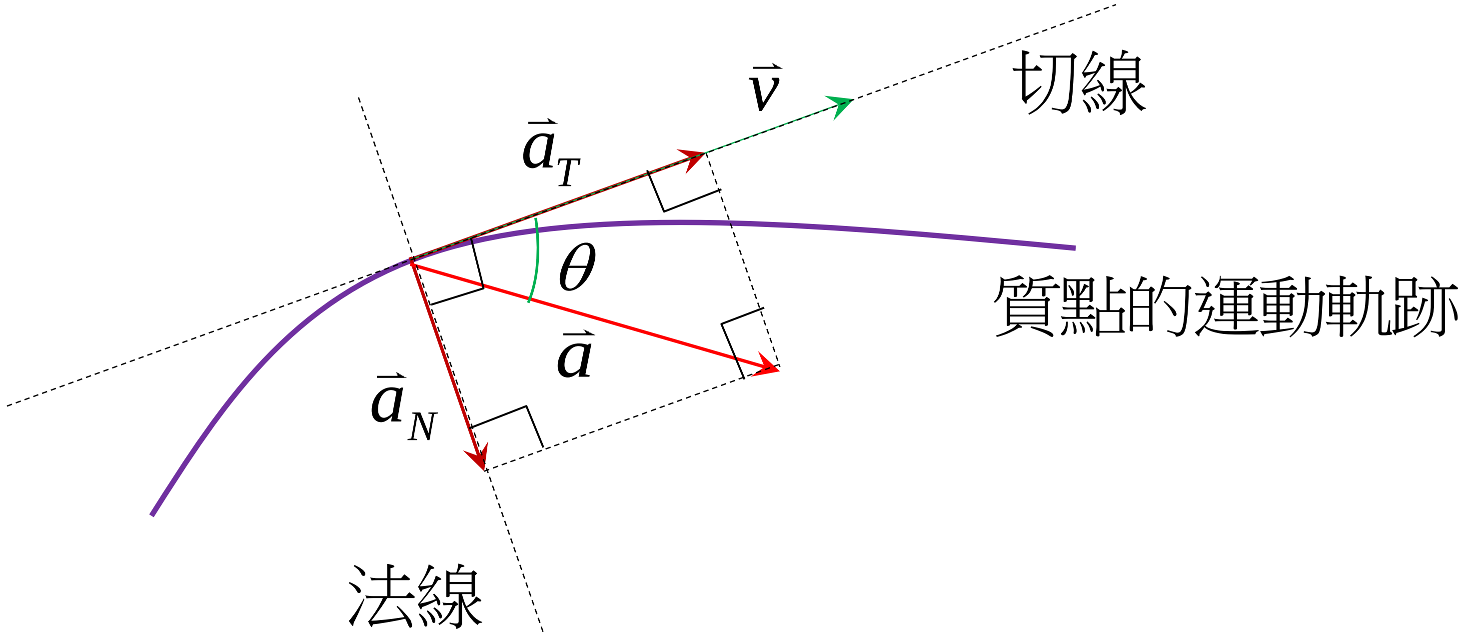
運動有獨立性，故加速度亦可分為兩互相垂直之
切線加速度、法線加速度。

切線加速度 $\overrightarrow{a_T}$	加速度在速度方向的分量，與 $\vec{v}$ 的方向<u>平行</u>，改變質點的<u>速率</u>。
法線加速度 $\overrightarrow{a_N}$	加速度在垂直速度方向的分量，與 $\vec{v}$ 的方向<u>垂直</u>，改變質點的速度<u>方向</u>。

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \qquad a_T = a\cos\theta \quad a_N = a\sin\theta$$

$\vec{a}$與$\vec{v}$夾角θ





$$
\begin{cases}
a_N = 0 \Rightarrow \text{則必為直線運動} \begin{cases} a_T = 0 \Rightarrow \text{等速率直線運動} \\ a_T \neq 0 \Rightarrow \text{變速率直線運動} \\ a_T = \text{定值} \Rightarrow \text{等加速度直線運動} \end{cases} \\
a_N \neq 0 \Rightarrow \text{則必為曲線運動} \begin{cases} a_T = 0 \Rightarrow \text{等速率曲線運動} \\ a_T \neq 0 \Rightarrow \text{變速率曲線運動} \end{cases}
\end{cases}
$$

第44頁

有一時鐘，秒針長 10 公分，則由 15 秒到 30 秒時間內，秒針針尖：

(1) 由 15 秒到 30 秒的位移的大小為__________公分。

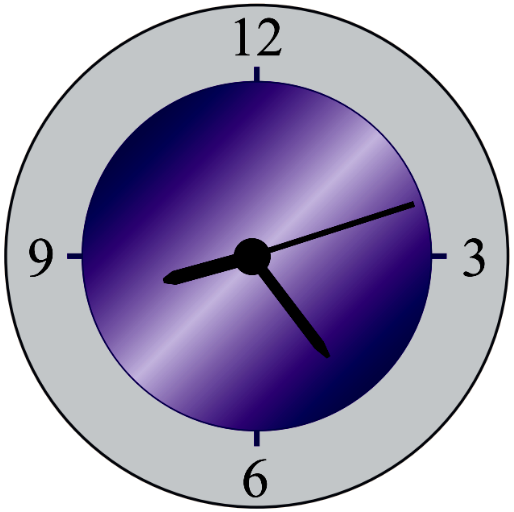
(2) 由 15 秒到 30 秒的平均速度的大小為__________公分/秒。

(3) 由 15 秒到 30 秒的平均速率為________公分/秒。

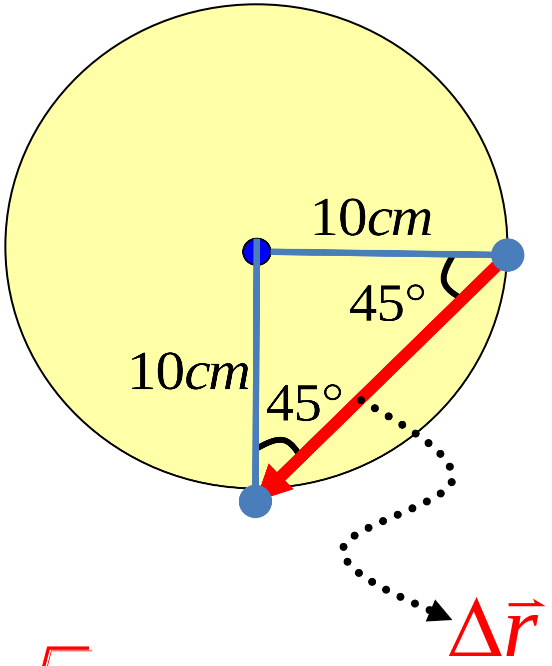
(4) 第15 秒瞬時速率為________公分/秒。

(5) 由 15 秒到 30 秒的平均加速度的大小為__________公分/秒^2。

(6) 由 0 秒到 10 秒時間內平均加速度的大小為__________公分/秒^2。



[解析]



(1)位移$\Delta\vec{r}=10\sqrt{2}(\text{cm})$。

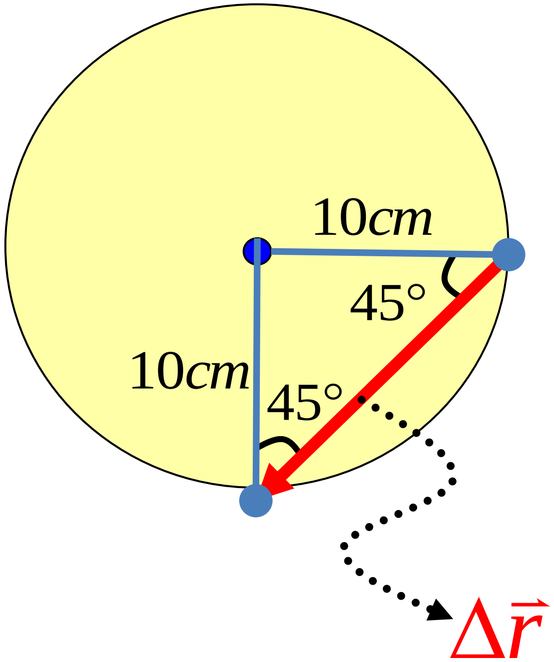
(2)平均速度$\vec{v}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{10\sqrt{2}}{15}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\text{cm/s})\swarrow$。

(3)路徑長$\Delta\ell=\dfrac{\text{圓周長}}{4}=\dfrac{2\pi\times10}{4}=5\pi(cm)$

$\Rightarrow$平均速率$v=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}=\dfrac{5\pi}{15}=\dfrac{\pi}{3}(\text{cm/s})$

第44頁

[解析]

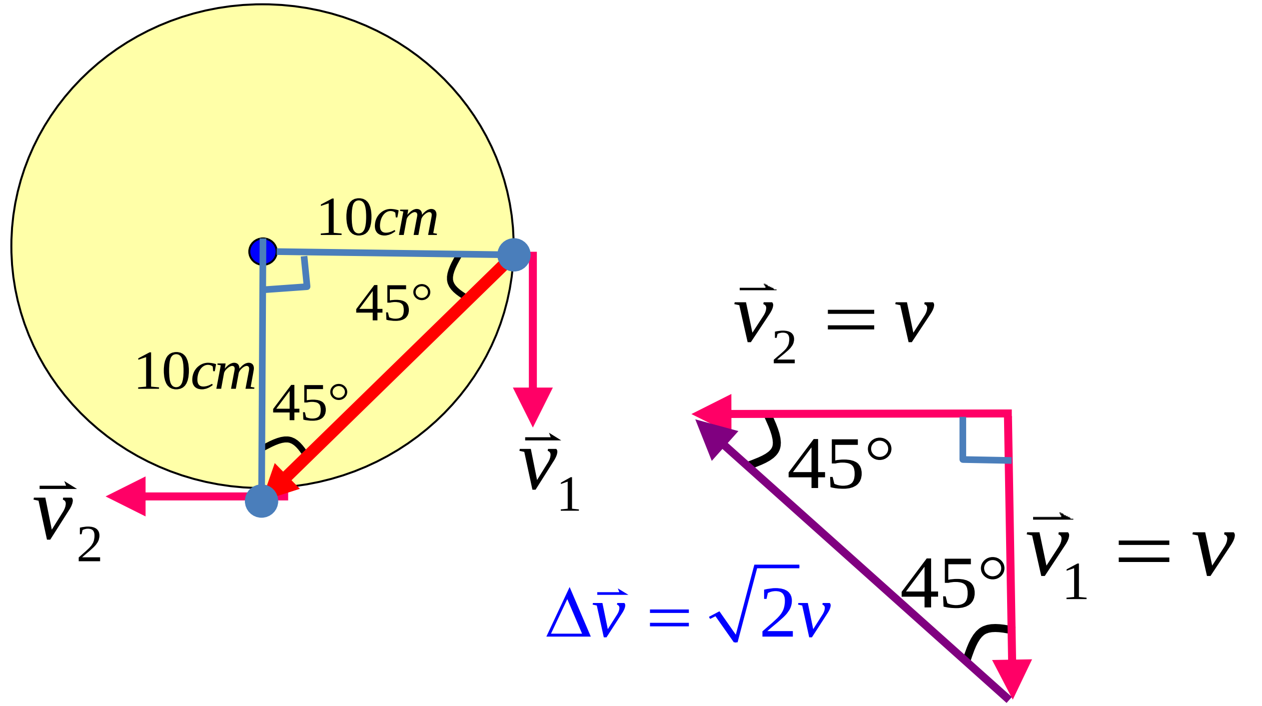


(4)

$$\boxed{\text{等速率圓周運動：平均速率=瞬時速率}}$$

$$\text{瞬時速率} = \text{平均速率} = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\times 10}{60} = \frac{\pi}{3}(cm/s)$$

[解析]

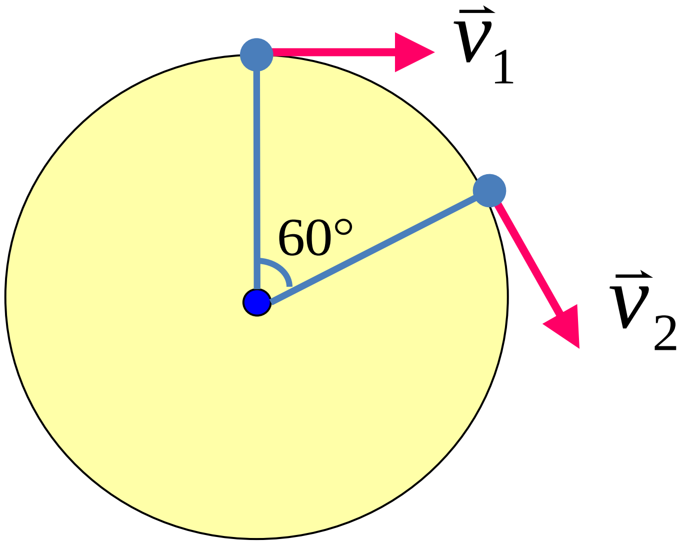


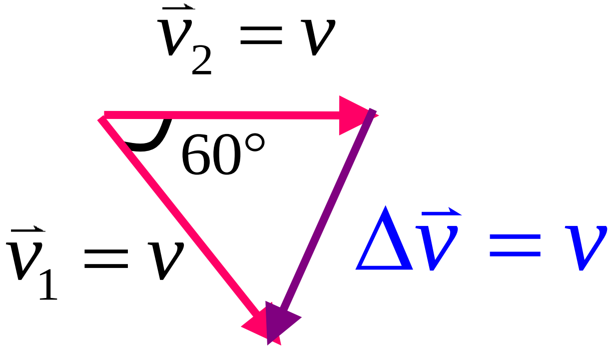
$$(5)\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{2}v = \sqrt{2}\times\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}(\text{cm/s})$$

$\Rightarrow$ 平均加速度的大小

$$\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{3}}{15} = \frac{\sqrt{2}\pi}{45}(\text{cm/s}^2)$$ 。

[解析]

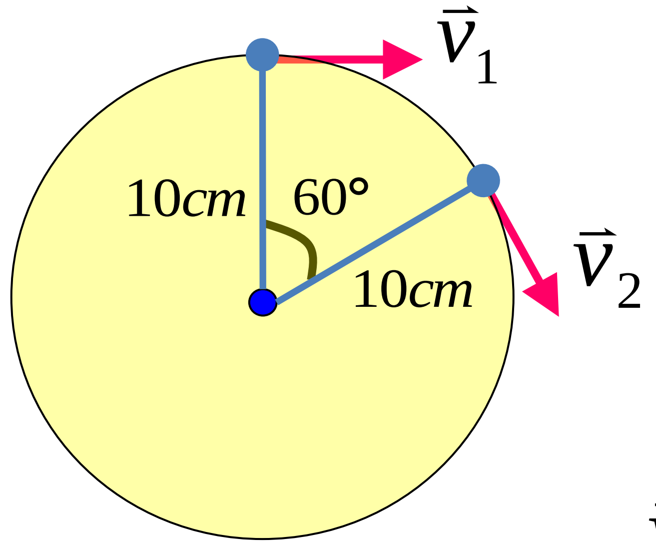




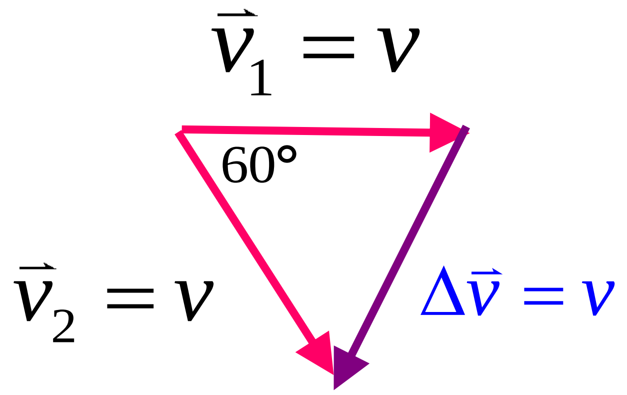
$$(6)\left|\Delta\vec{v}\right| = v = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(\text{cm/s})$$

$\Rightarrow$ 平均加速度的大小

$$\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{3}}{10} = \frac{\pi}{30}(\text{cm/s}^2)$$ 。



$\vec{v}_1$
$10cm$
$60°$
$\vec{v}_2$
$10cm$



$\vec{v}_1 = v$
$60°$
$\vec{v}_2 = v$
$\Delta\vec{v} = v$

第45頁

一個質點在平面上運動，其x分量與y分量分別為$x = -2t^2$，$y = 6t - 3$(SI制)，則質點

(a) 第3秒的位置為？

(b) 0~3 s間的位移為？ 大小?

(c) 第3秒的速度為？ 大小?

(d) 第3秒的加速度為？大小?

(e) 第3秒的切線加速度大小 ? 法線加速度大小 ？

(f) 移動的軌跡方程式為？

[解析] $x=-2t^2 \rightarrow v_x=-4t \rightarrow a_x=-4$

$$y=6t-3 \rightarrow v_y=6 \rightarrow a_y=0$$

(a) $t=3$時 $x_3=-2\times 3^2=\text{-}18$ $y_3=6\times 3-3=15$

$r_3=(-18,15)$ *or* $\text{-}18\vec{i}+15\vec{j}$

(b) $t=0$時 $x_0=-2\times 0^2=0$ $y_0=6\times 0-3=-3$

$r_0=(0,-3)$ *or* $\text{-}3\vec{j}$

$\Delta\mathrm{r}(0\rightarrow 3)=r_3-r_0=(-18,15)-(0,-3)=(-18,18)$

or $\Delta\mathrm{r}(0\rightarrow 3)=r_3-r_0=\left(-18\vec{i}+15\vec{j}\right)-\left(\text{-}3\vec{j}\right)-=-18\vec{i}+18\vec{j}$

大小$\left|\Delta\mathrm{r}(0\rightarrow 3)\right|=\sqrt{(-18)^2+(18)^2}=18\sqrt{2}$

[解析] $x=-2t^2 \rightarrow v_x=-4t \rightarrow a_x=-4$

$$y=6t-3 \rightarrow v_y=6 \rightarrow a_y=0$$

$(c)\ t=3$時 $v_{x3}=-4\times 3=\text{-}12 \quad v_{y3}=6$

$\therefore v_3=(-12,6)\ or\ \ \text{-}12\vec{i}+6\vec{j}$

大小$|v_3|=\sqrt{(-12)^2+(6)^2}=6\sqrt{5}$

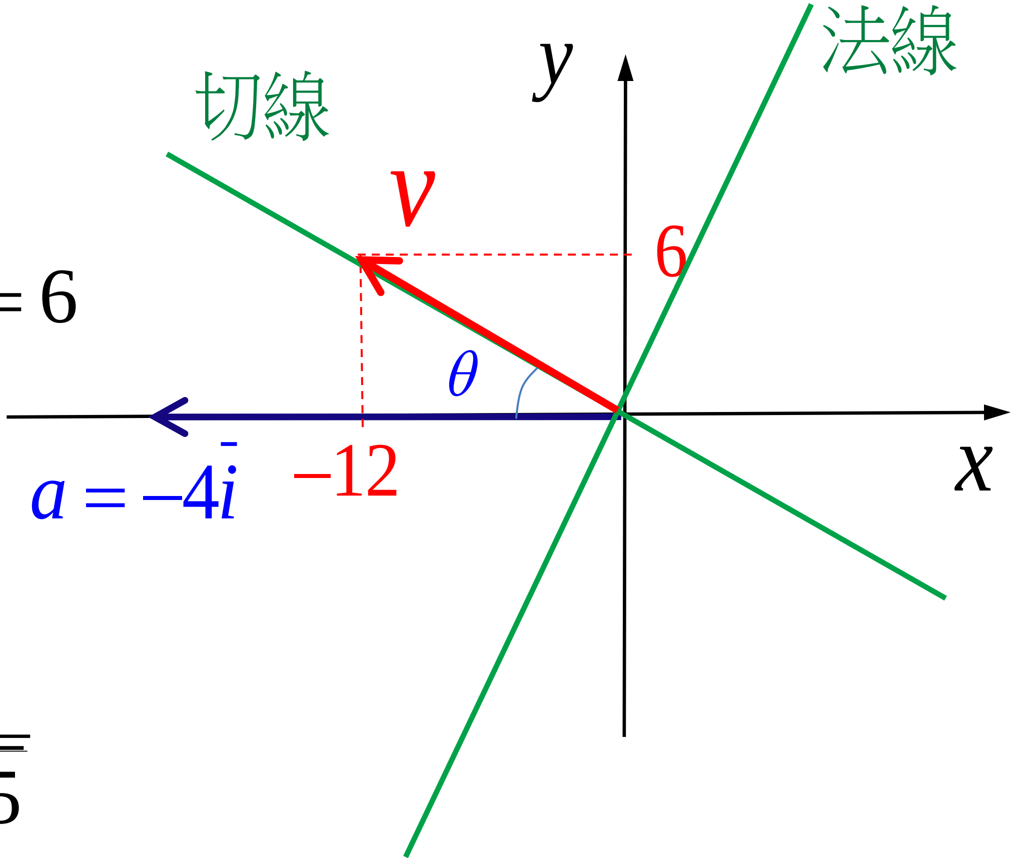
$(d)\ t=3$時 $a_{x3}=-4 \quad a_{y3}=0$

$\therefore a_3=(-4,0)\ or\ \ \text{-}4\vec{i}$

大小$|a_3|=\sqrt{(-4)^2+(0)^2}=4$

第45頁

[解析]



(*e*)由(*c*)知 $v_x = -12 \quad v_y = 6$

$$\tan\theta = \left|\frac{v_y}{v_x}\right| = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$a_T = a\cos\theta = 4\times\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$a_N = a\sin\theta = 4\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

[解析] $x=-2t^2 \to v_x=-4t \to a_x=-4$

$y=6t-3 \to v_y=6 \to a_y=0$

$(f)\ x=-2t^2 \quad y=6t-3 \to t=\dfrac{y+3}{6}$

代入$x=-2\times\left(\dfrac{y+3}{6}\right)^2=-\dfrac{y^2+6y+9}{18}$

軌跡方程式$x=-\dfrac{y^2+6y+9}{18}$

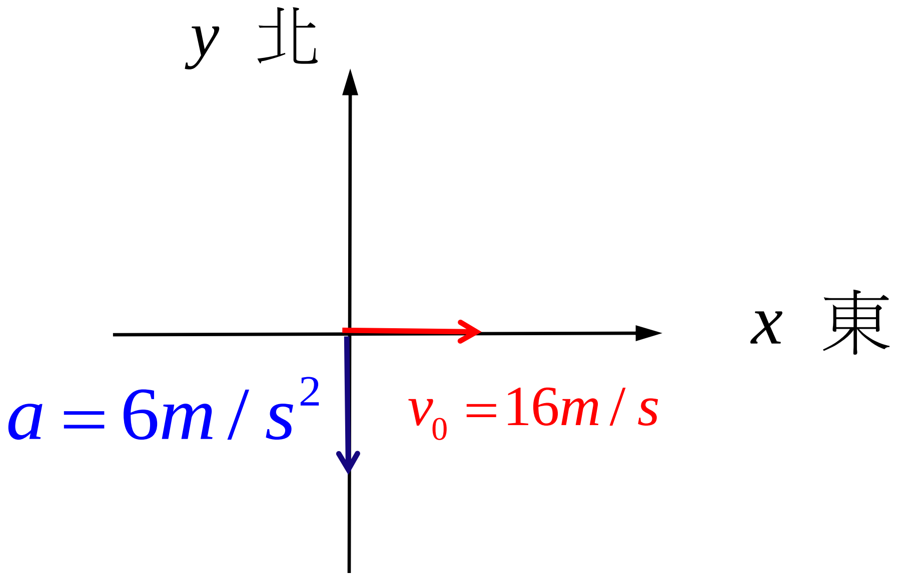
[練功題]

2. 某物初速度為16 m/s向東，若加速度為6 m/s^{2}向南，求：

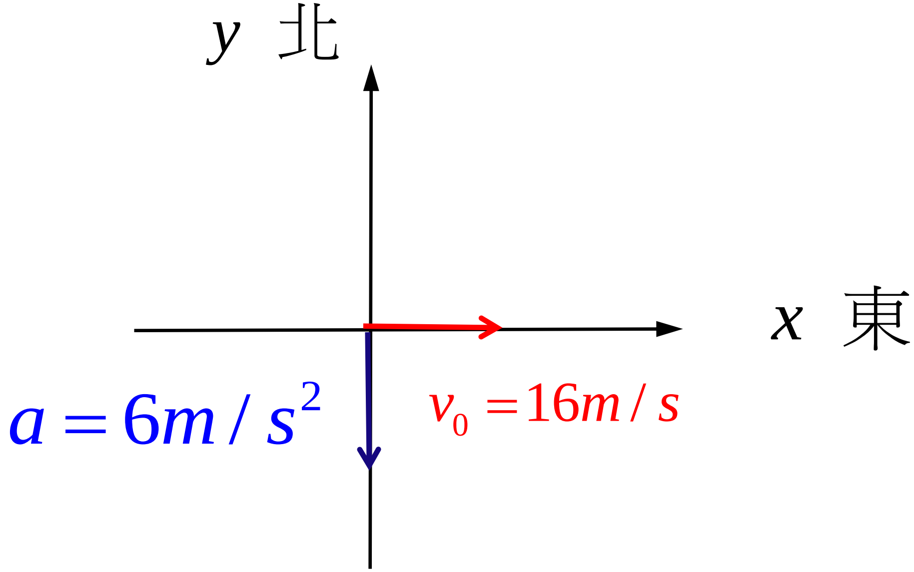
(a) 4 s內的位移之量值？

(b) 第4秒末之速度量值？

(c) 第4秒末切線加速度與法線加速度量值？



[解析]

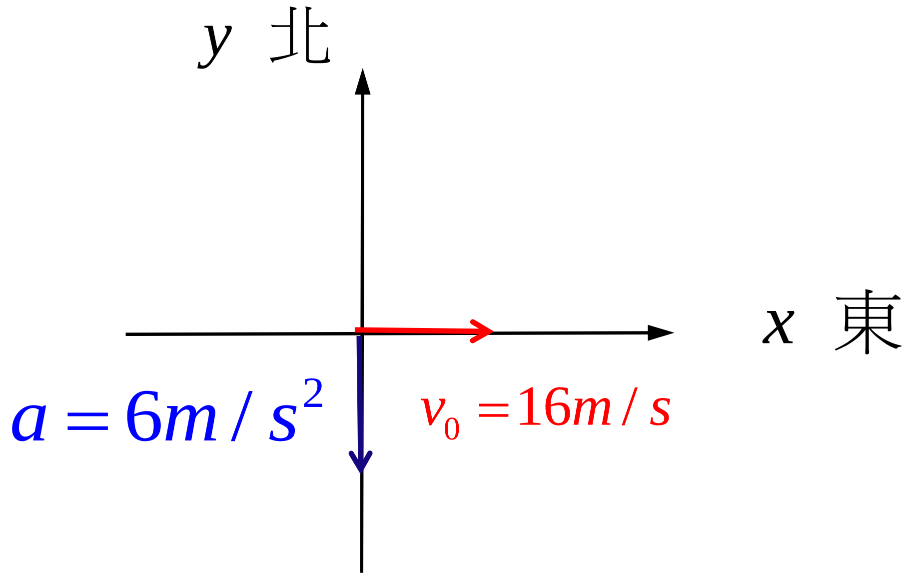


$$a_x=0\rightarrow v_x=16\rightarrow \Delta x=16t$$

$$a_y=-6\rightarrow \left[v=v_0+at\right]\ v_y=-6t$$

$$\rightarrow\left[\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right]\ \Delta y=-3t^2$$

[解析]



(a) $\Delta x = 16\times 4 = 64 \quad \Delta y = -3\times 4^2 = -48$

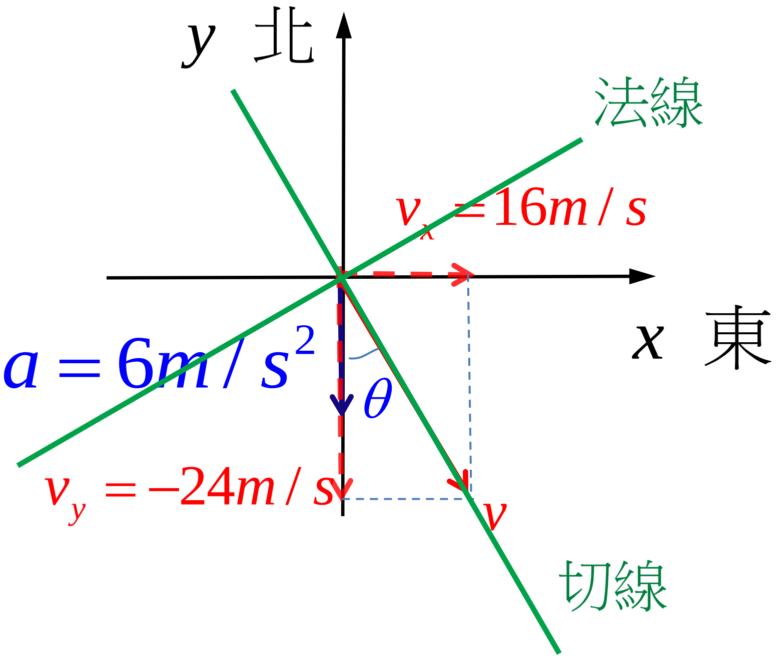
位移量值$=\sqrt{64^2+48^2} = 80$

(b) $v_x = 16 \quad v_y = -6\times 4 = -24$

速度量值$=\sqrt{16^2+(-24)^2} = 2\sqrt{13}$

[解析]

(c) 由(b)知 $v_x = 16 \quad v_y = -6\times 4 = -24$



$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

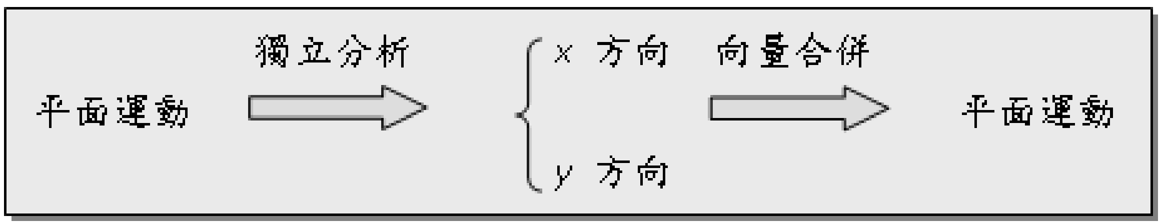
$$a_T = a\cos\theta = 6\times\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$a_N = a\sin\theta = 6\times\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

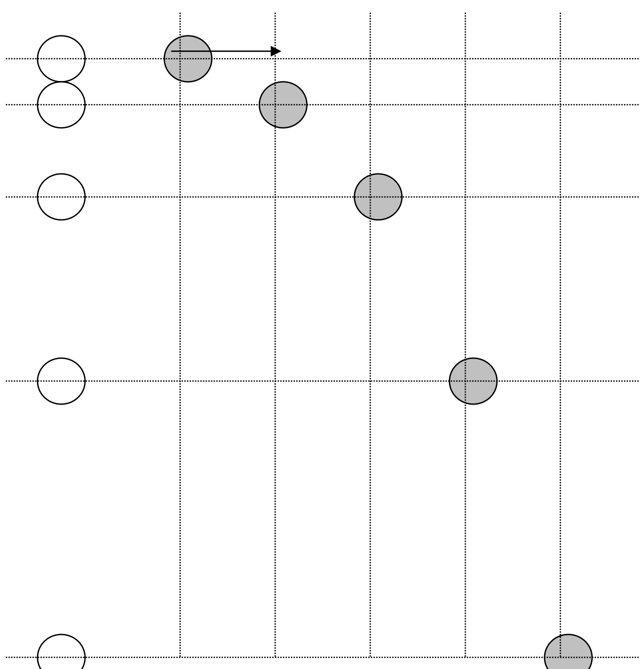
單元三：水平拋體運動

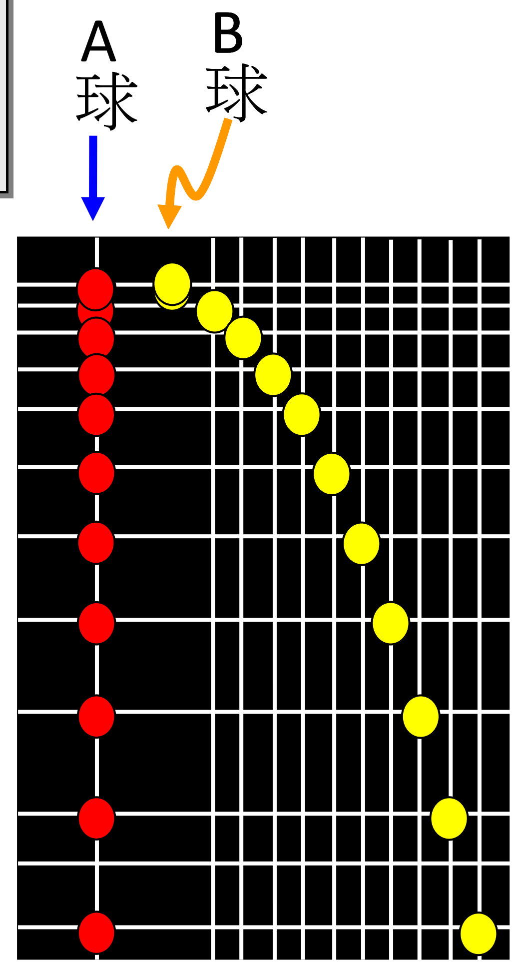
一、運動的獨立性：

任何平面運動可以看成兩個**互相垂直的直線運動**之合成，例如 x 軸與 y 軸兩個方向；這兩個方向的運動彼此獨立。



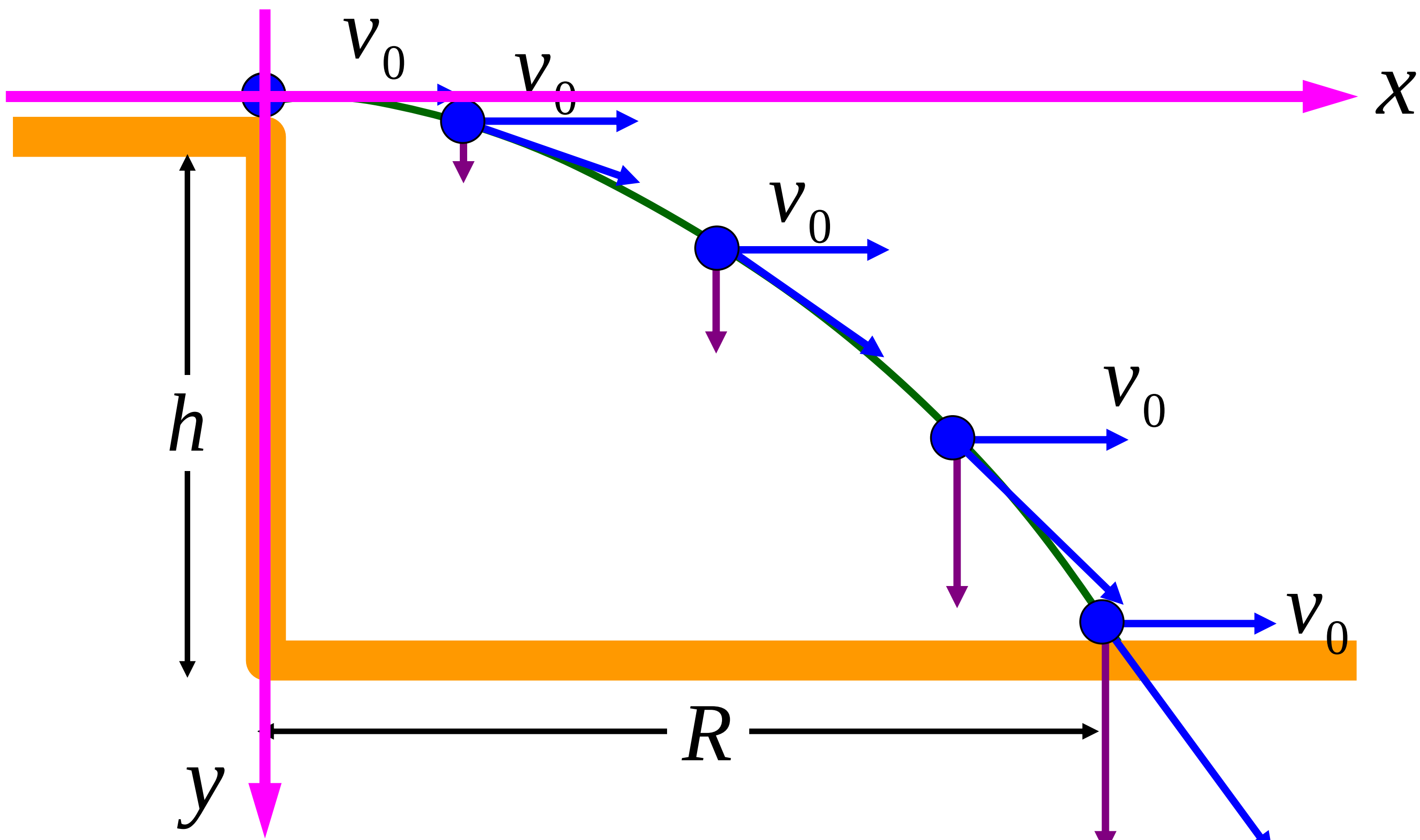
自由落體　　水平拋射





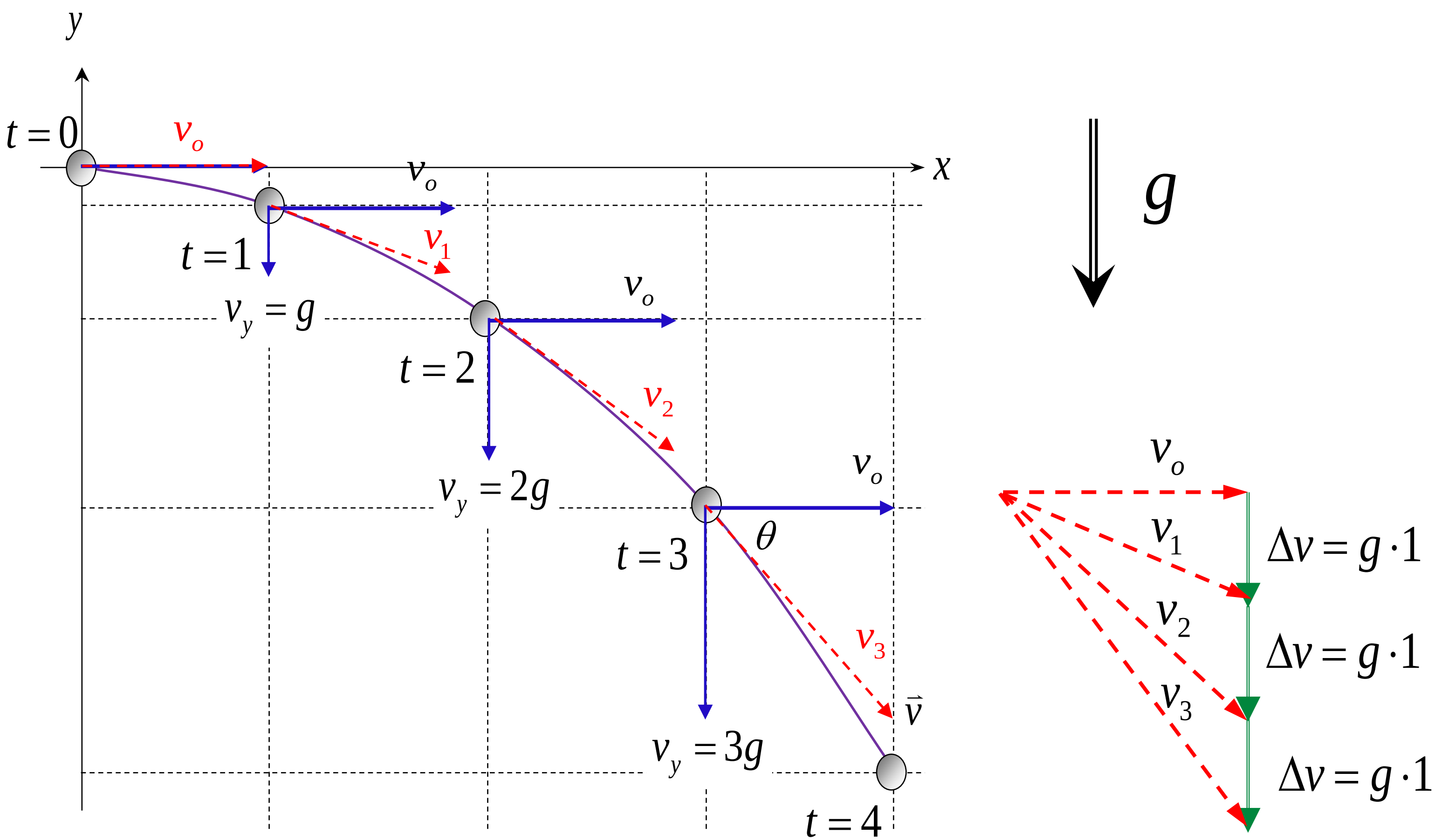
二、水平拋射：
- 水平方向：等速度運動
- 鉛直方向：自由落體運動

水平拋射的運動分析



二、水平拋射：$\begin{cases}\text{水平方向：等速度運動} \\ \text{鉛直方向：自由落體運動}\end{cases}$

初速度 v_0 (→)(沿水平方向拋出)之**曲線等加速度**運動。



（1）分析：已知初速度v_0 (→)，加速度 g (↓)，求 t 秒後之以出發點為原點，定向下、向右為正，並設離地高度為 H。

1 位置 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\boxed{\begin{cases} x: \text{等速度} \quad x = v_0 t \\ y: \text{等加速度} \quad y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(v_o t)^2 + (\frac{1}{2}gt^2)^2}$$

2 速度 (運動方向)

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$$\boxed{\begin{cases} x: \text{等速度} \quad v_x = v_0 \\ y: \text{等加速度} \quad v_y = gt \end{cases}}$$

$\tan\phi = \dfrac{v_y}{v_x}$ 運動方向與水平夾角ϕ

3 加速度 $\vec{a} = g\,\vec{j}$

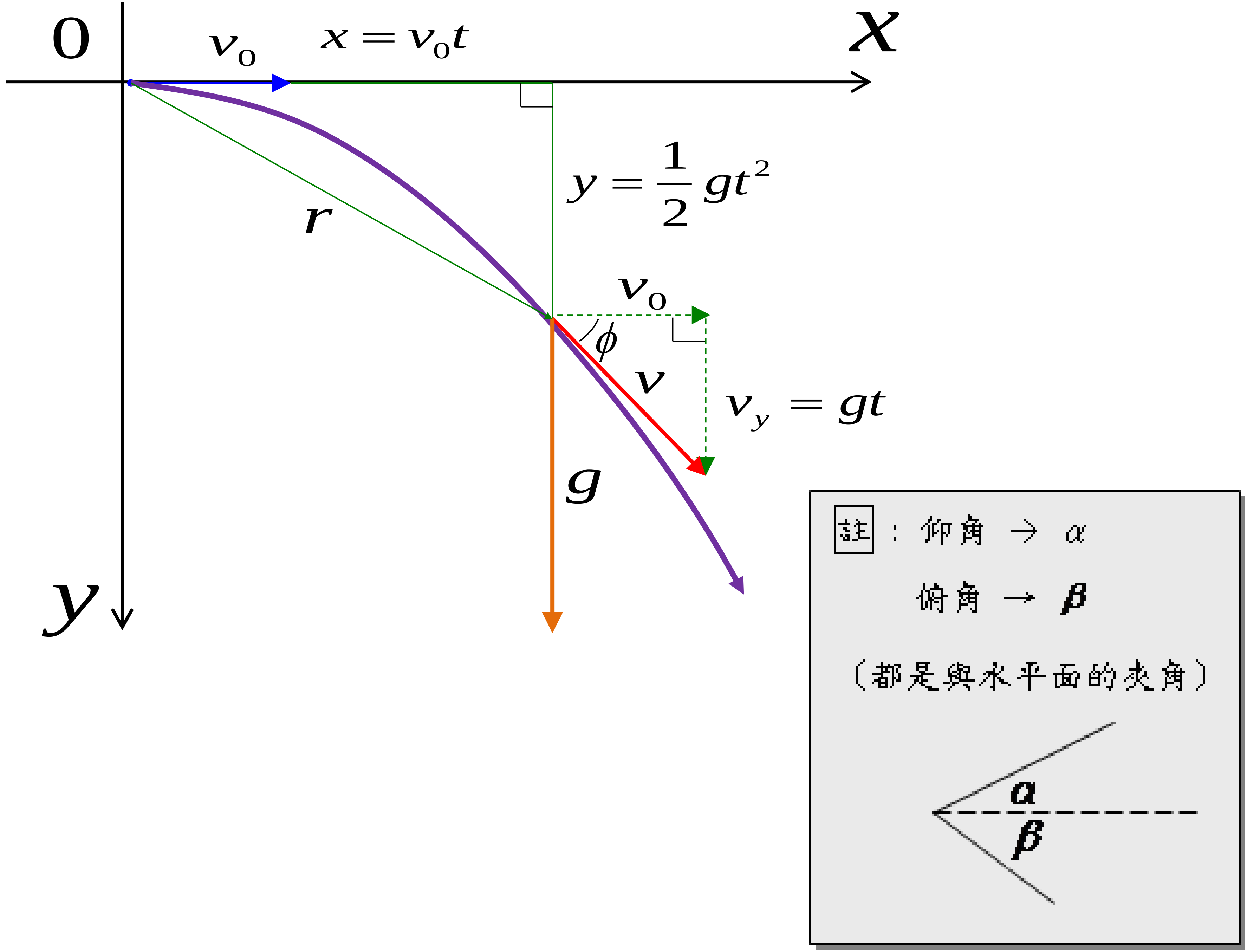
$$\boxed{\begin{cases} x: \text{等速度} \quad a_x = 0 \\ y: \text{等加速度} \quad a_y = g \end{cases}}$$

[補充] $\begin{cases} \text{法線加速度}: a_N = g\cos\phi \\ \text{切線加速度}: a_T = g\sin\phi \end{cases}$

4 軌跡方程式 $y = \dfrac{g}{2v_0^{\,2}}x^2$

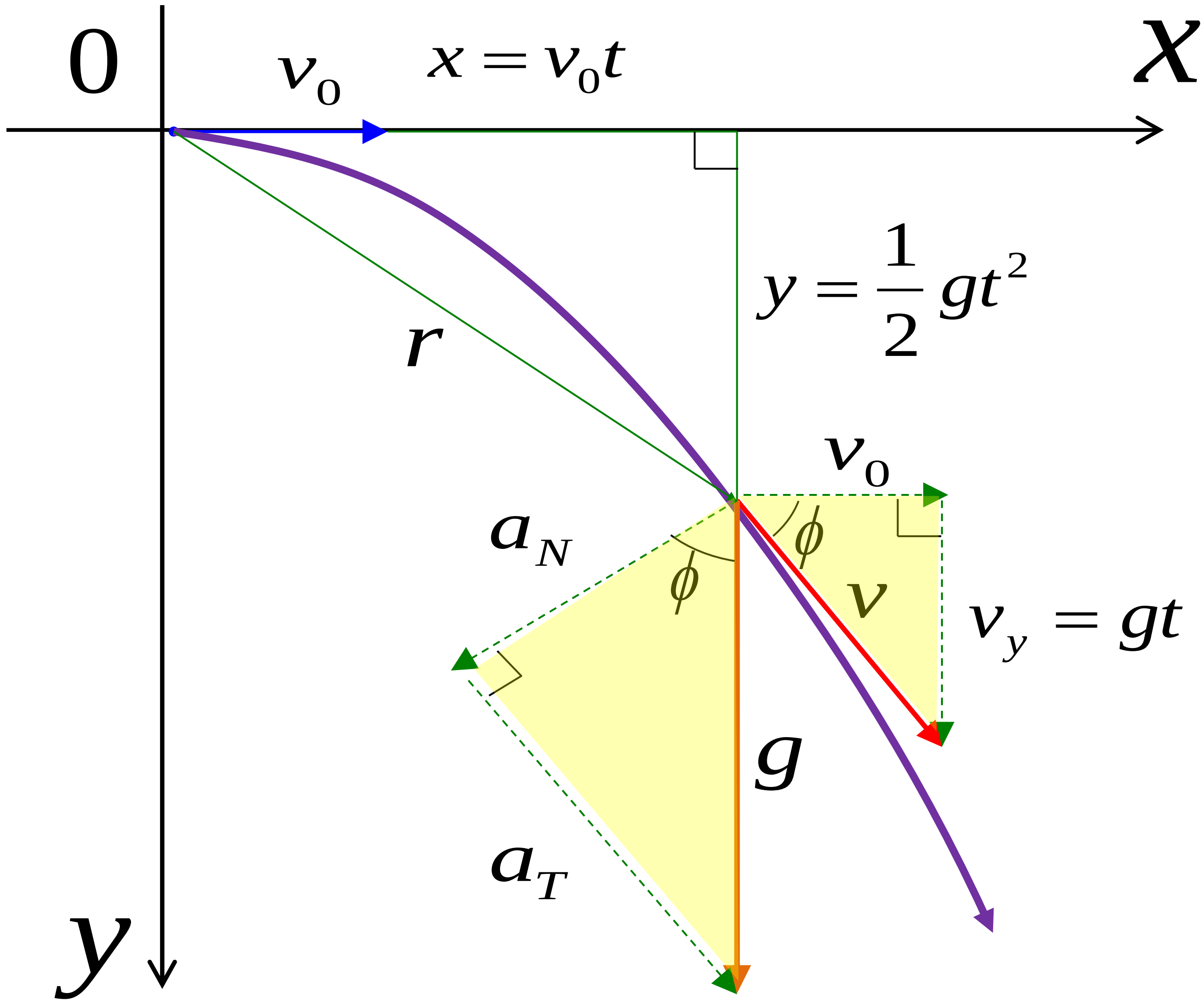
(開口朝下之拋物線)

[說明] $x = v_0 t \rightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$ 帶入 $y = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}g \times \left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^{\,2}}x^2$



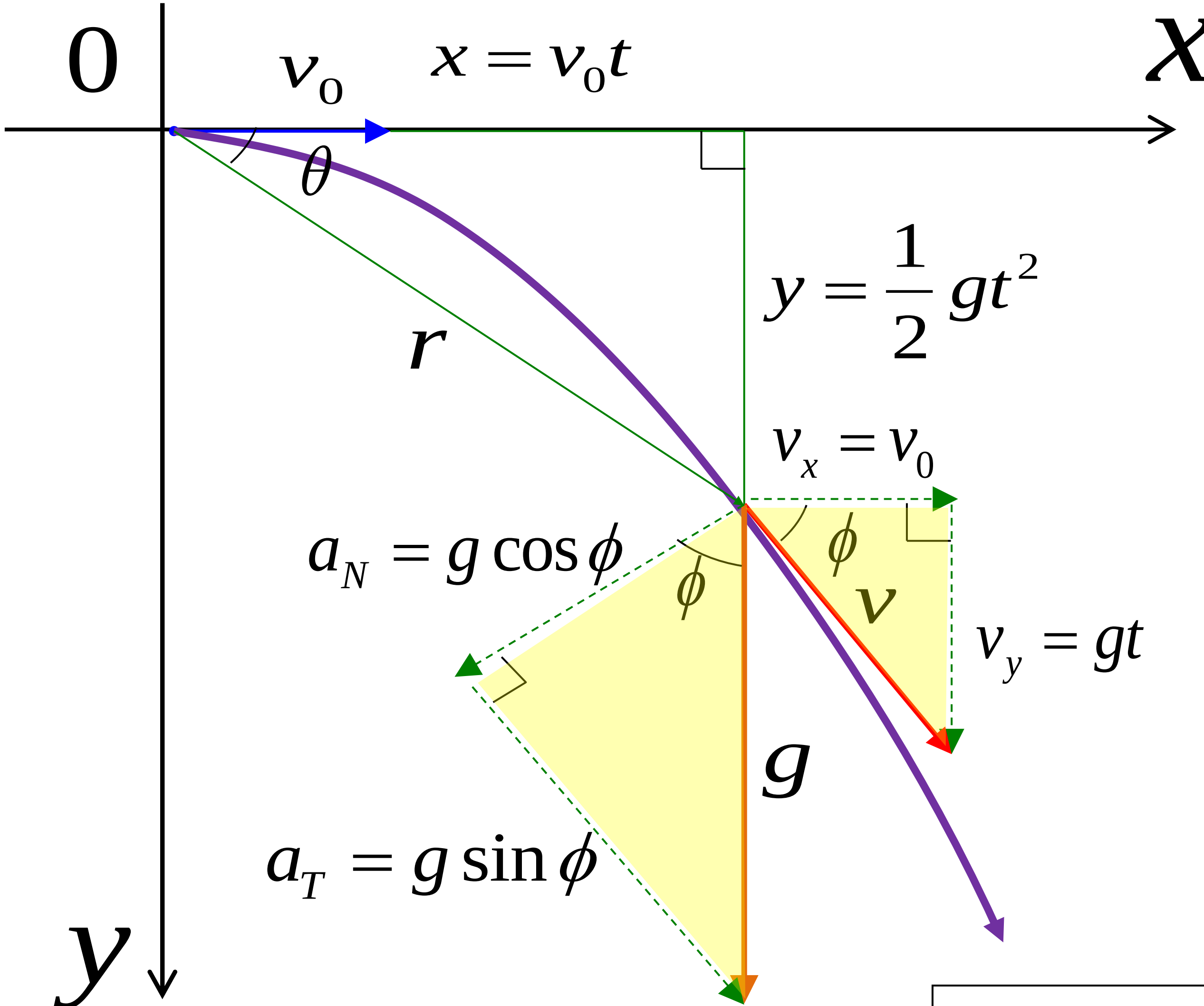
O
v_0
$x = v_0 t$
x
$y = \frac{1}{2}gt^2$
r
v_0
ϕ
v
$v_y = gt$
g
y
註：仰角 → α
俯角 → β
（都是與水平面的夾角）
α
β

[補充]



第47頁

[結論]



$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{v_0 t} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{v_0 t} = \frac{gt}{2v_0}$$

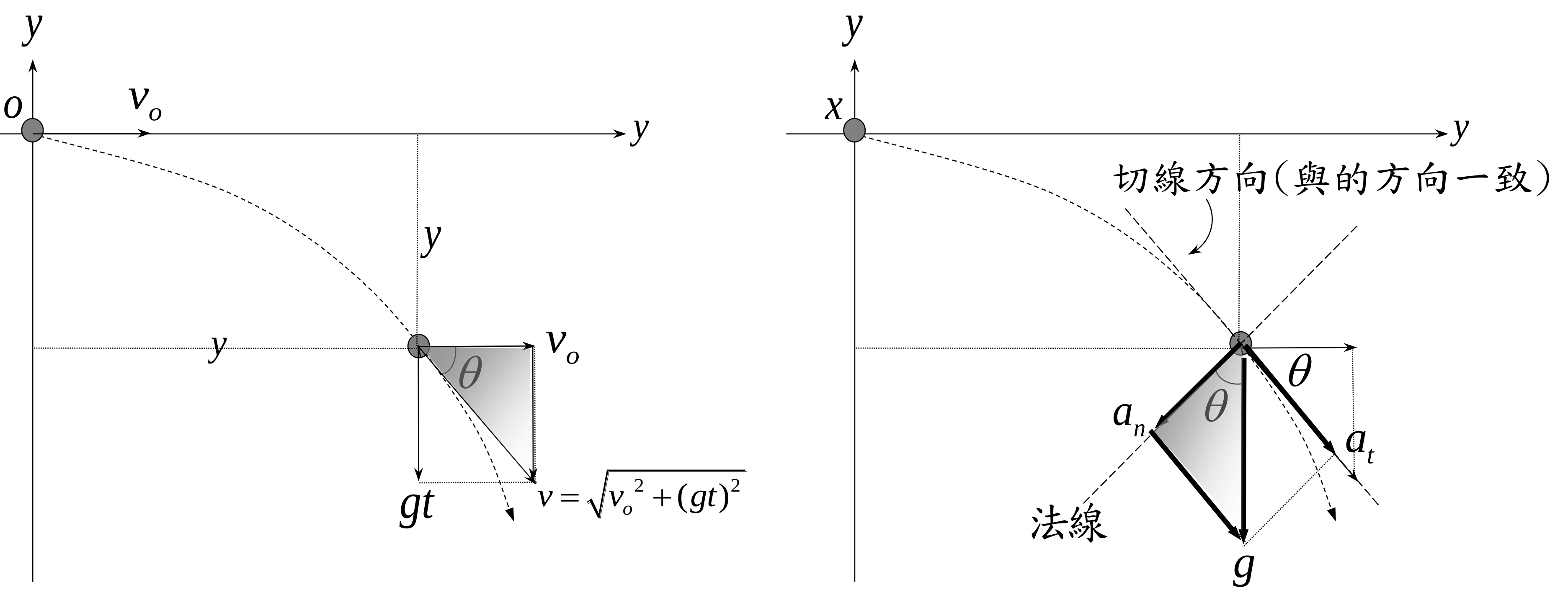
$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\phi$$

[補充]

利用 $\left\langle \begin{array}{l} v_x = v_o \\ v_y = g \cdot t \end{array} \right\rangle$ 夾出"切線"與"水平線"的夾角，

同時決定"法線"方向，再將加速度投影至"切線"與"法線"上，即可得a_T與 a_N 。



【問題思考】：

1 平拋運動過程中，方向如何決定? **速度**_ 。
2 何時速度量值最小? _**拋出點**__ 。

（2）水平拋射運動的應用：

由高H處，以初速度v_0水平拋出一物體，則落地時間僅與高度H有關，與初速度無關（與自由落體落下H時間相同）：

1 飛行時間 $\boxed{t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}}$ （與自由落體相同）

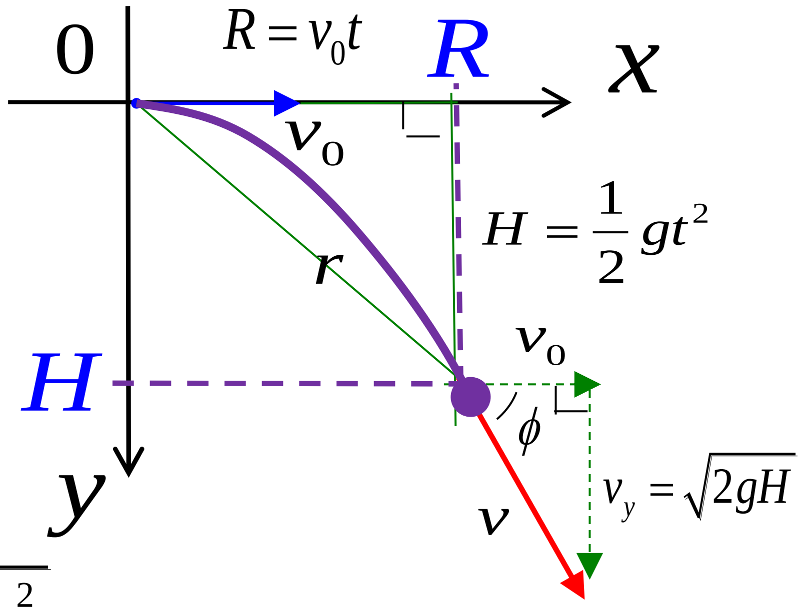
2 著地時的瞬間

水平速度 $v_x=v_0$

鉛直速度 $\boxed{v_y=\sqrt{2gH}}$

水平位移 $R=v_0t=v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

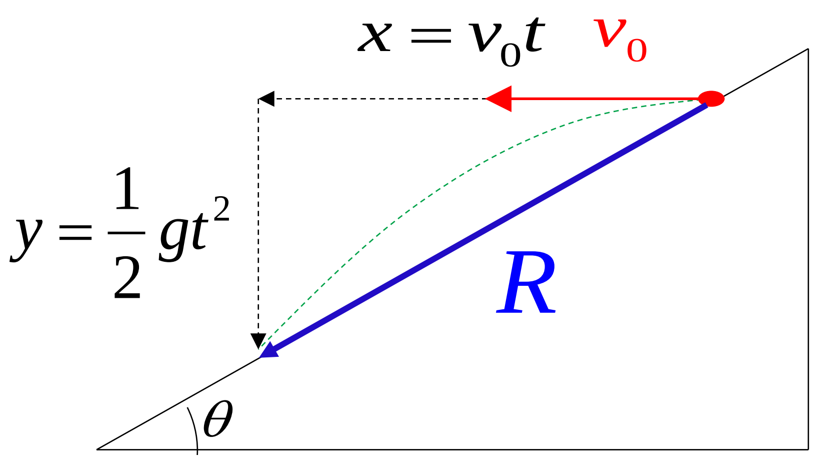
位移 $r=\sqrt{H^2+R^2}=\sqrt{H^2+\dfrac{2Hv_0^2}{g}}$



（3）從斜面上的水平拋射：

在斜角θ的斜坡上，以水平初速度v_0拋出一物體 (仍落於斜面上)

恰落於斜面時 $\boxed{\dfrac{y}{x} = \tan\theta}$



a.飛行時間： $t = \dfrac{2v_0 \tan\theta}{g}$

[解] $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} = \dfrac{gt}{2v_0} \Rightarrow t = \dfrac{2v_0 \tan\theta}{g}$

b.沿斜面的射程(位移)： $\boxed{R = \dfrac{x}{\cos\theta}} = \dfrac{2{v_0}^2 \tan\theta}{g\cos\theta}$

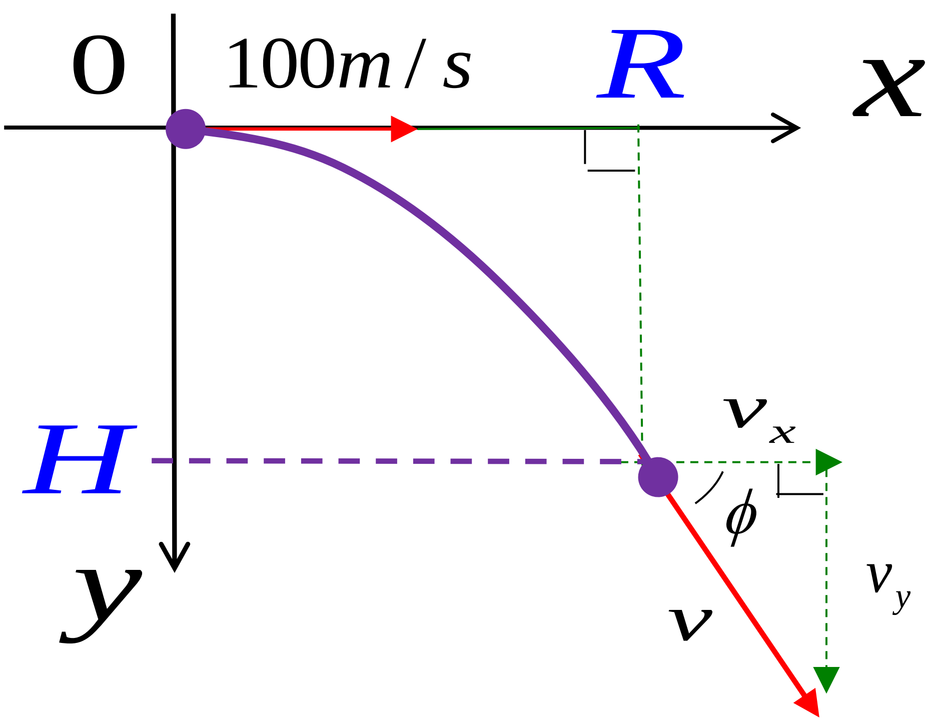
飛機在空中以100 m/s的水平速度等速飛行，機上落下炸彈，歷時10 s著地爆炸，試回答下列各題：(g=10 m/s^2)

(*a*) 飛機離地多高?

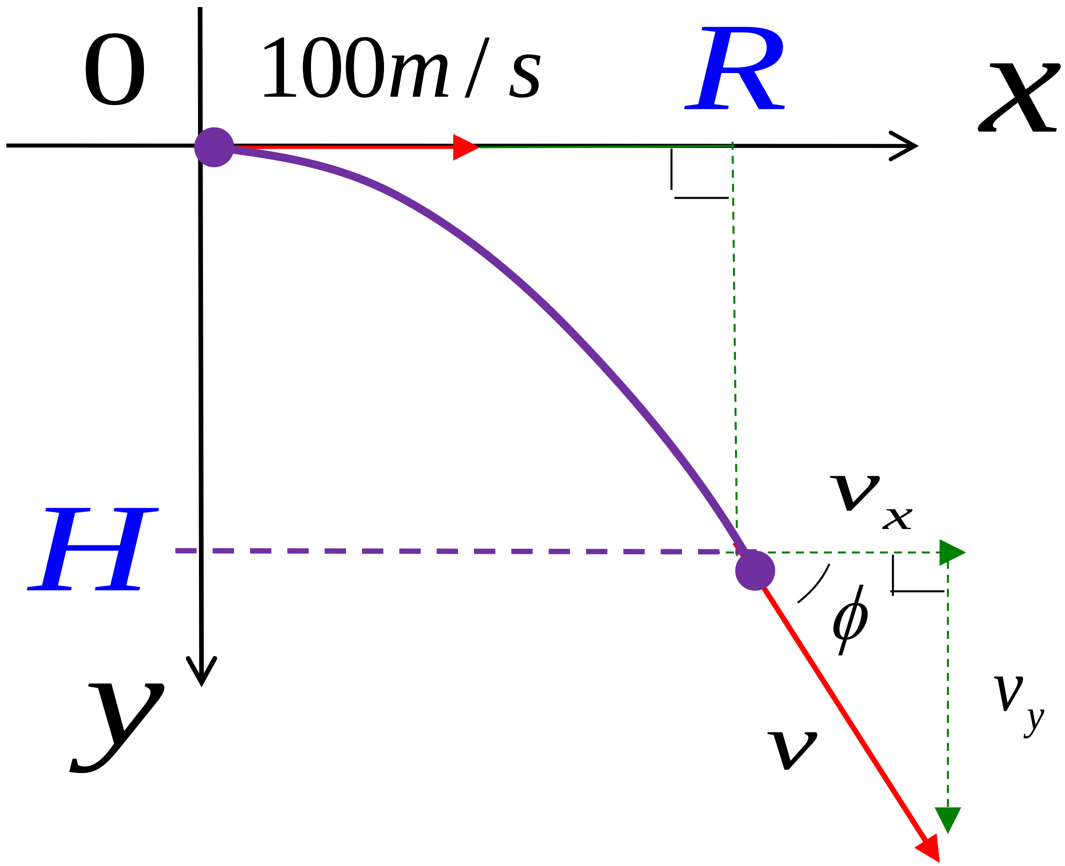
(*b*) 炸彈水平射程為何?

(*c*) 炸彈著地前瞬間速率為何?

(d) 炸彈著地前瞬間運動方向與水平夾角？



[解析]

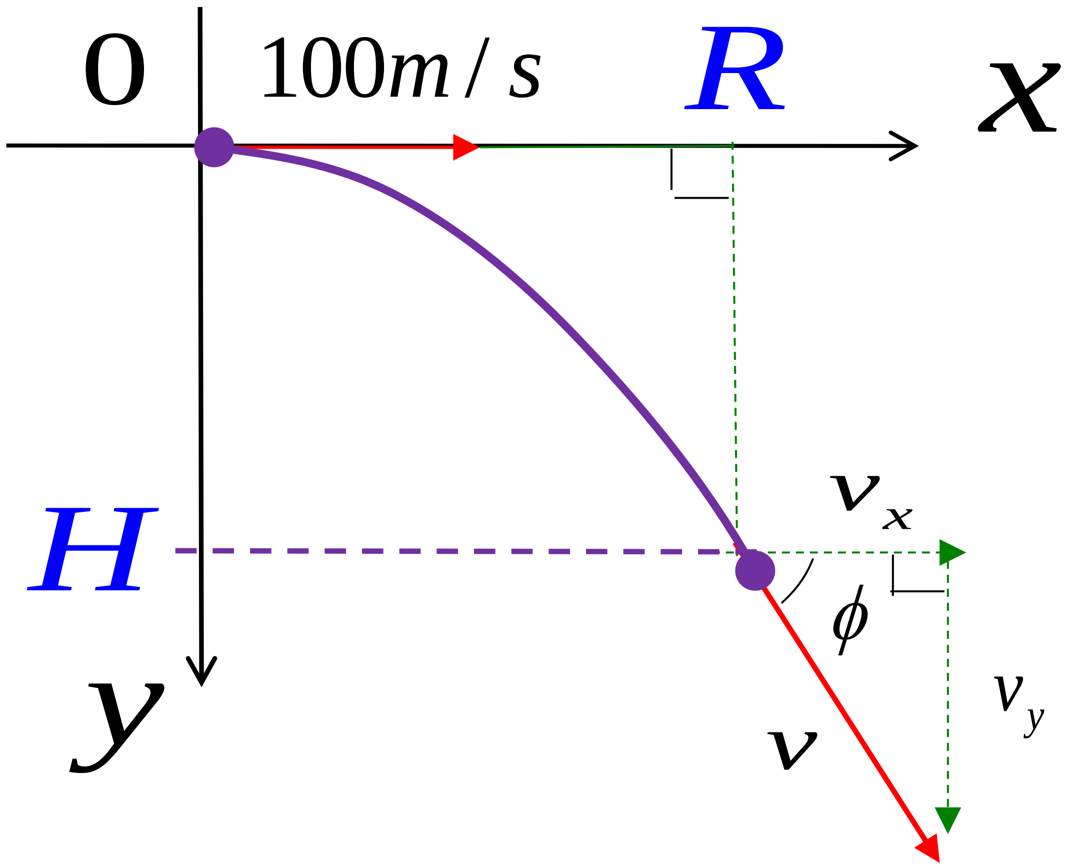


$$(a)\, y:\left[y=\frac{1}{2}gt^2\right] H=\frac{1}{2}\times 10\times 10^2=500[m]$$

$$(b)\, x:[x=v_0t]\, R=100\times 10=1000[m]$$

第50頁

[解析]

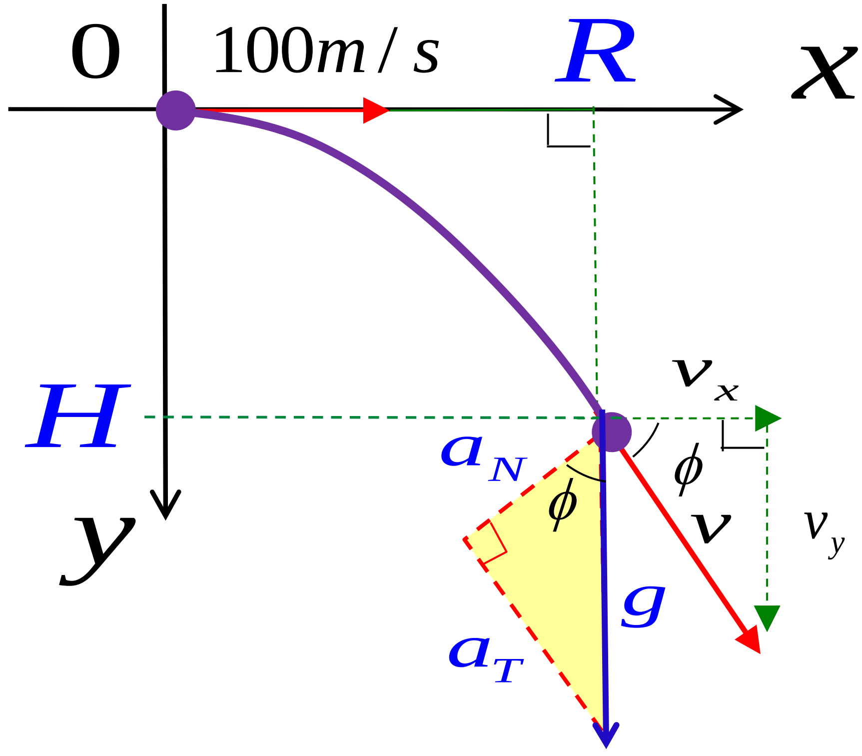


$$(c)\begin{cases} x: \quad v_x = v_0 = 100 \\ y: \quad v_y = gt = 10\times 10 = 100 \end{cases} \rightarrow v = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$$

v_2

$$(d)\quad \tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{100}{100} = 1 \rightarrow \phi = 45^\circ$$

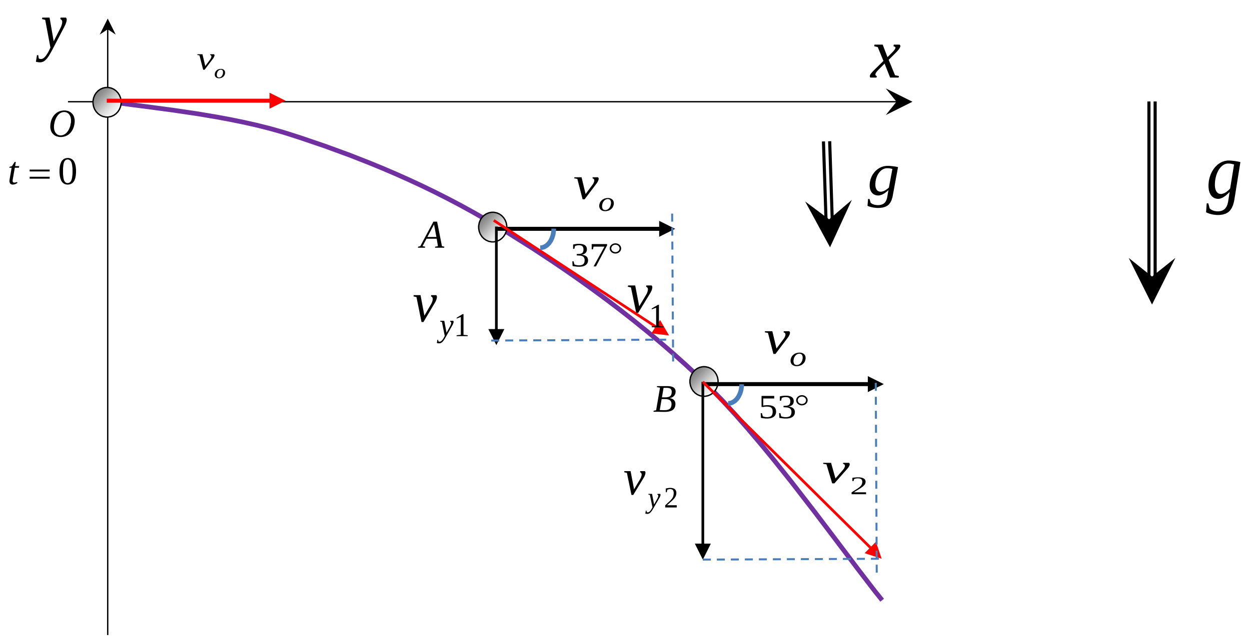
[解析]



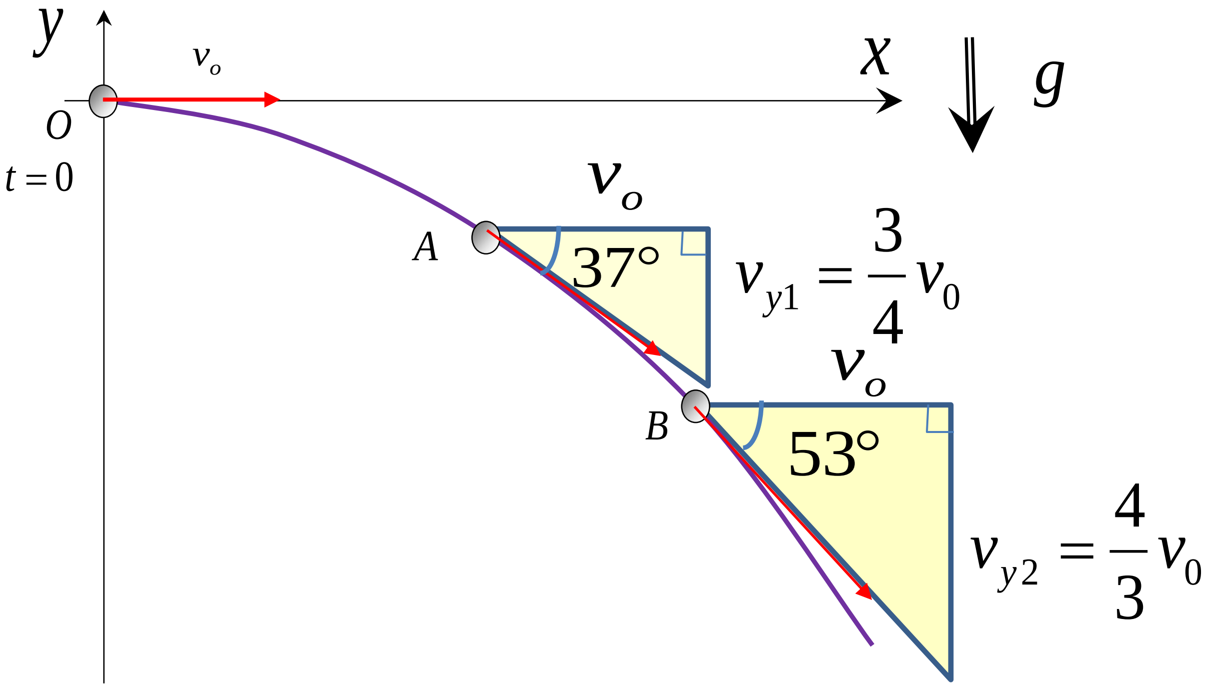
$$(e)\ a_T = g\sin\phi = g\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}g = 5\sqrt{2}$$

$$a_N = g\cos\phi = g\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}g = 5\sqrt{2}$$

1 不計空氣阻力，以初v_o水平拋出一質點，重力加速度為g，當瞬時速度自與水平夾37°的角度增至53°期間
(a)所經時間 (b)該質點下降高度 (c)速度變化量為？



[解析]



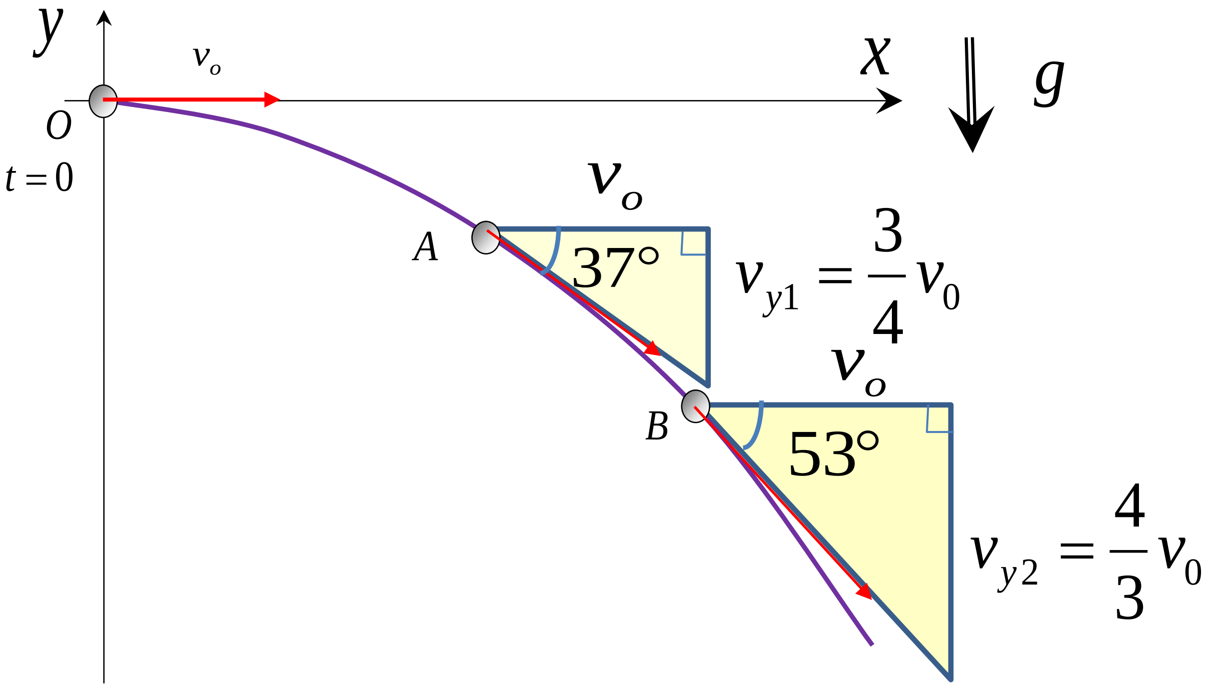
以向下為正

$$v_{y1}=v_0\tan 37°=\frac{3}{4}v_0 \qquad v_{y2}=v_0\tan 53°=\frac{4}{3}v_0$$

(a)令AB歷時 t　y : $A\rightarrow B\left[v=v_0+at\right]$

$$\frac{4}{3}v_0=\frac{3}{4}v_0+gt \quad \therefore t=\frac{7}{12}\frac{v_0}{g}$$

[解析]

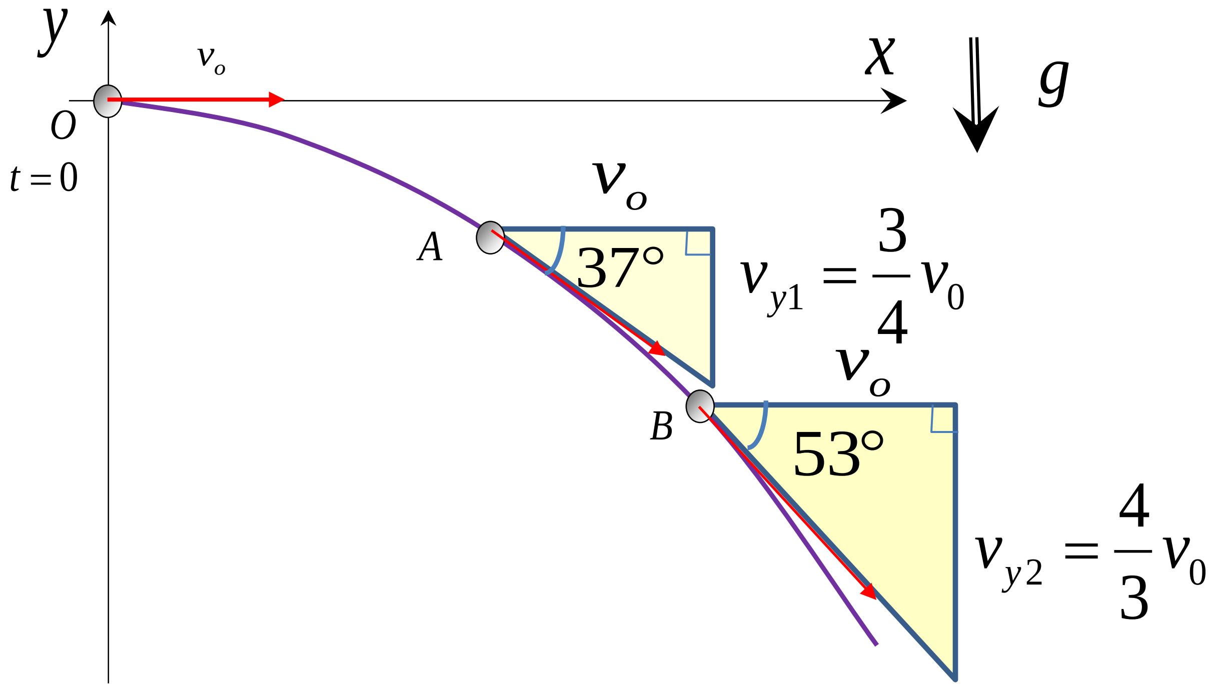


(b)令AB高度差h

$$y: A \rightarrow B\left[v^2=v_0{}^2+2a\Delta x\right]$$

$$\left(\frac{4}{3}v_0\right)^2=\left(\frac{3}{4}v_0\right)^2+2gh \quad \therefore h=\frac{175}{288}\frac{v_0{}^2}{g}$$

[解析]

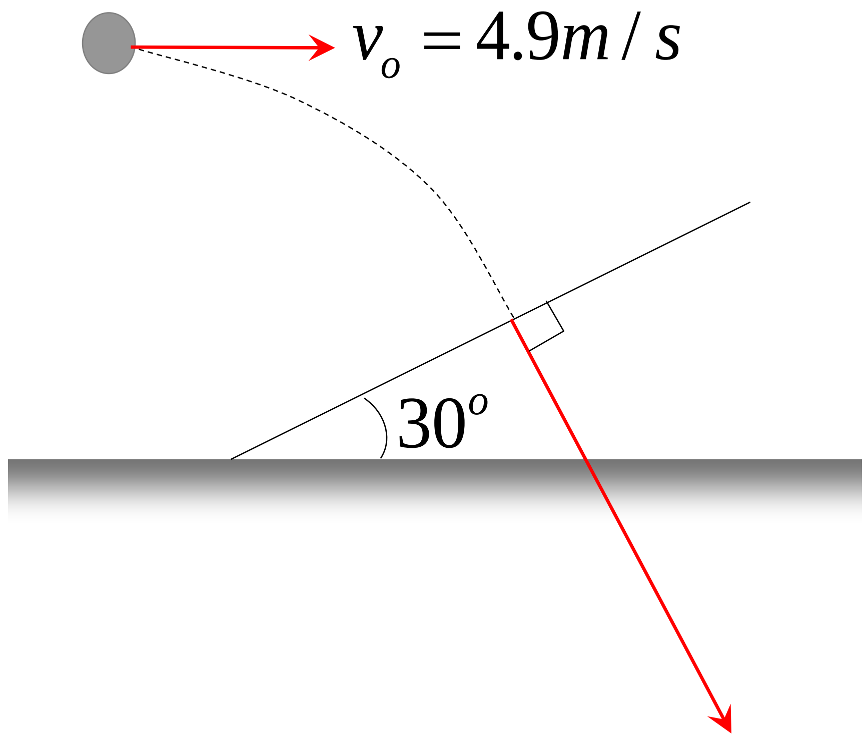


(c)

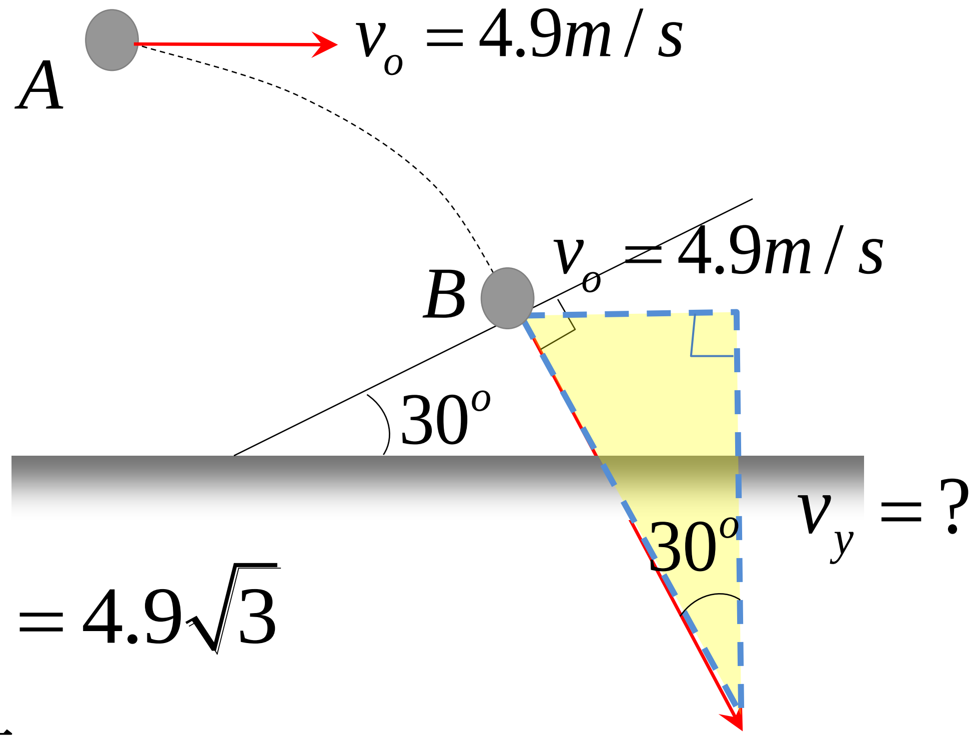
x方向速度不變

y方向速度變化量$=\frac{4}{3}v_0-\frac{3}{4}v_0=\frac{7}{12}v_0$

2. 以4.9 m/s的水平初速抛出的小球，在空中飛一段時間後，恰好垂直地撞在傾斜角為30°的斜面上。可知該小球完成這段飛行時間為何？（重力加速度為$9.8m/s^2$）



[解析]



$$v_y = \sqrt{3}v_0 = 4.9\sqrt{3}$$

以向下為正

令AB歷時t

$$y: A \to B\left[v = v_0 + at\right]\ v_y = 0 + gt$$

$$4.9\sqrt{3} = 9.8t \quad \therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

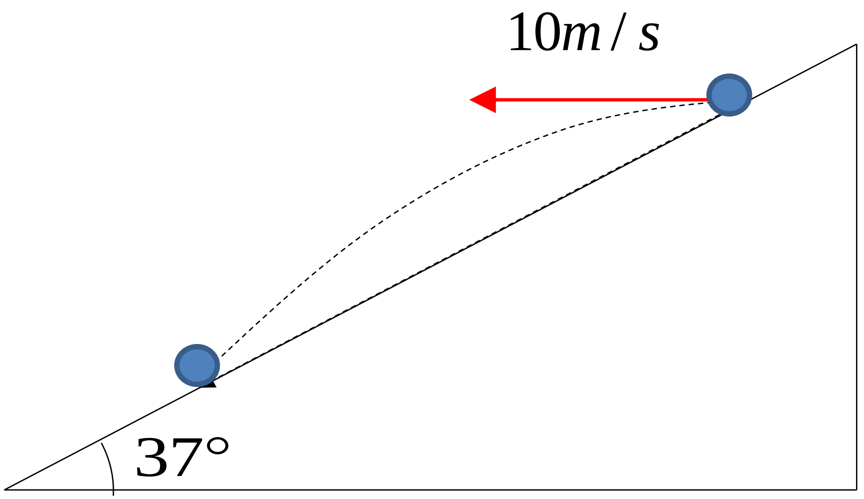
石子自斜角為*37°*的斜面頂端以水平初速度*10 m/s*水平拋出，假設重力加速度為*10 m/s²*，最後石子落於斜面上，求：

（1）經多少秒後石子落於斜面上？

（2）石子在斜面的落點與拋出點距離為何？

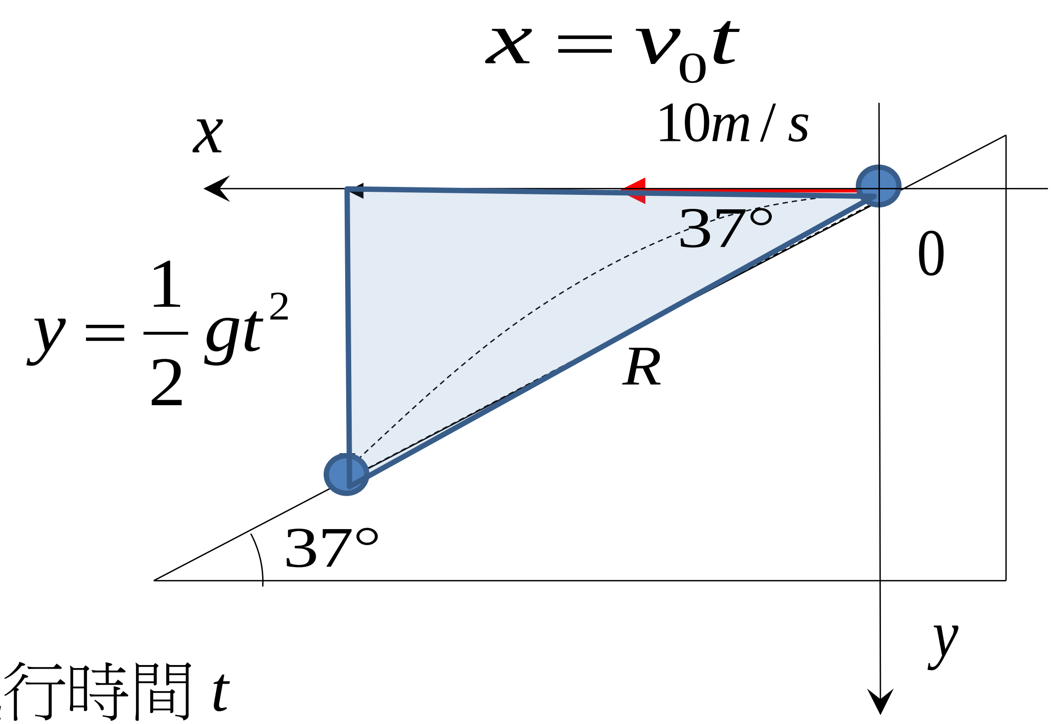
（3）石子著斜面時的速度？

（4）石子著斜面的瞬間，切線加速度與法線加速度若干？



第53頁

[解析]



(1) 令飛行時間 t

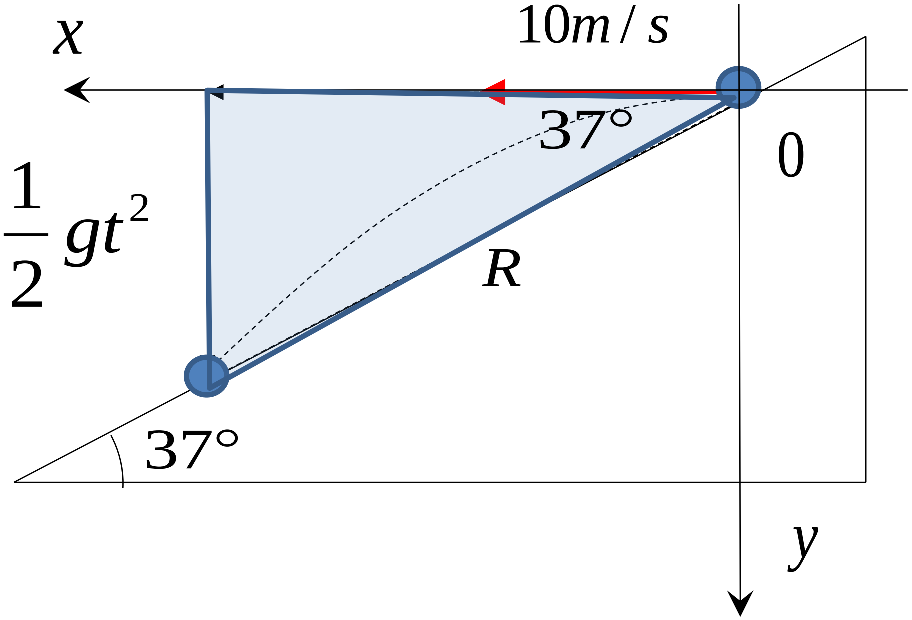
恰落於斜面時 $\boxed{\frac{y}{x} = \tan 37°}$

$$\frac{\frac{1}{2}\times 10\times t^2}{10\times t} = \tan 37° \Rightarrow t = \frac{3}{2}[s]$$

[解析]

$$x = v_0 t$$

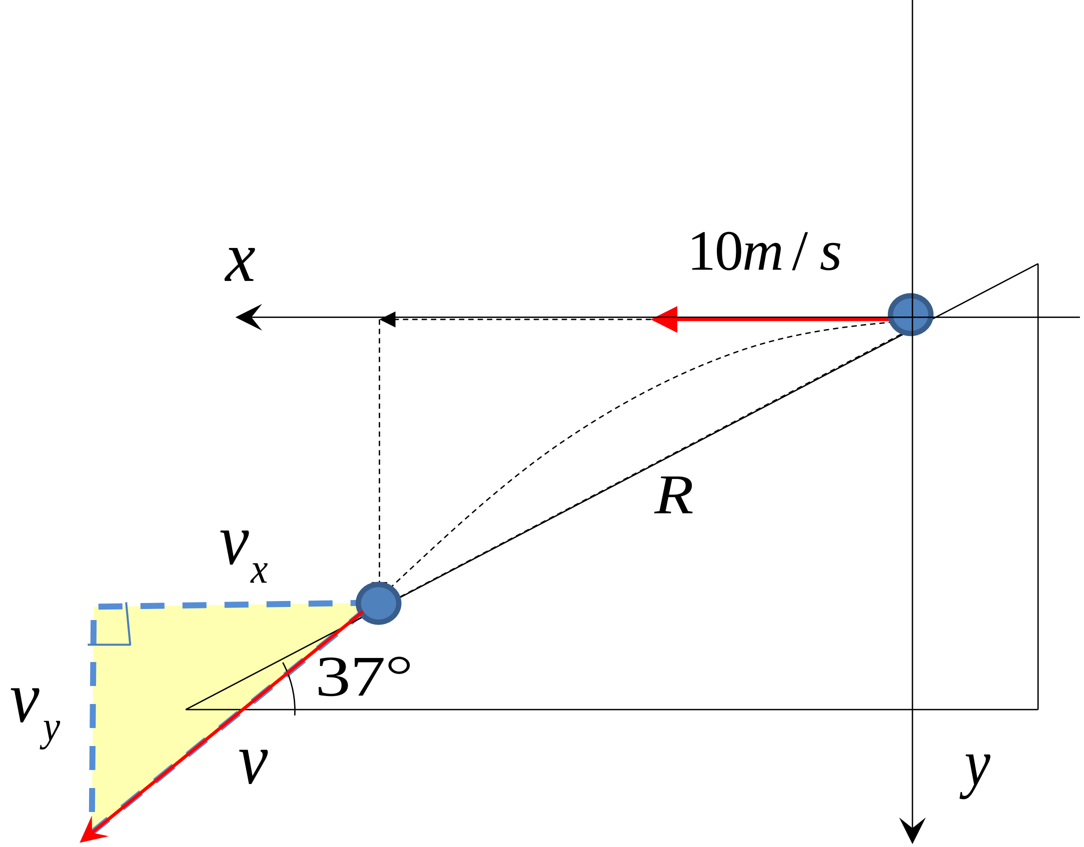
$$y = \frac{1}{2} g t^2$$



(2)

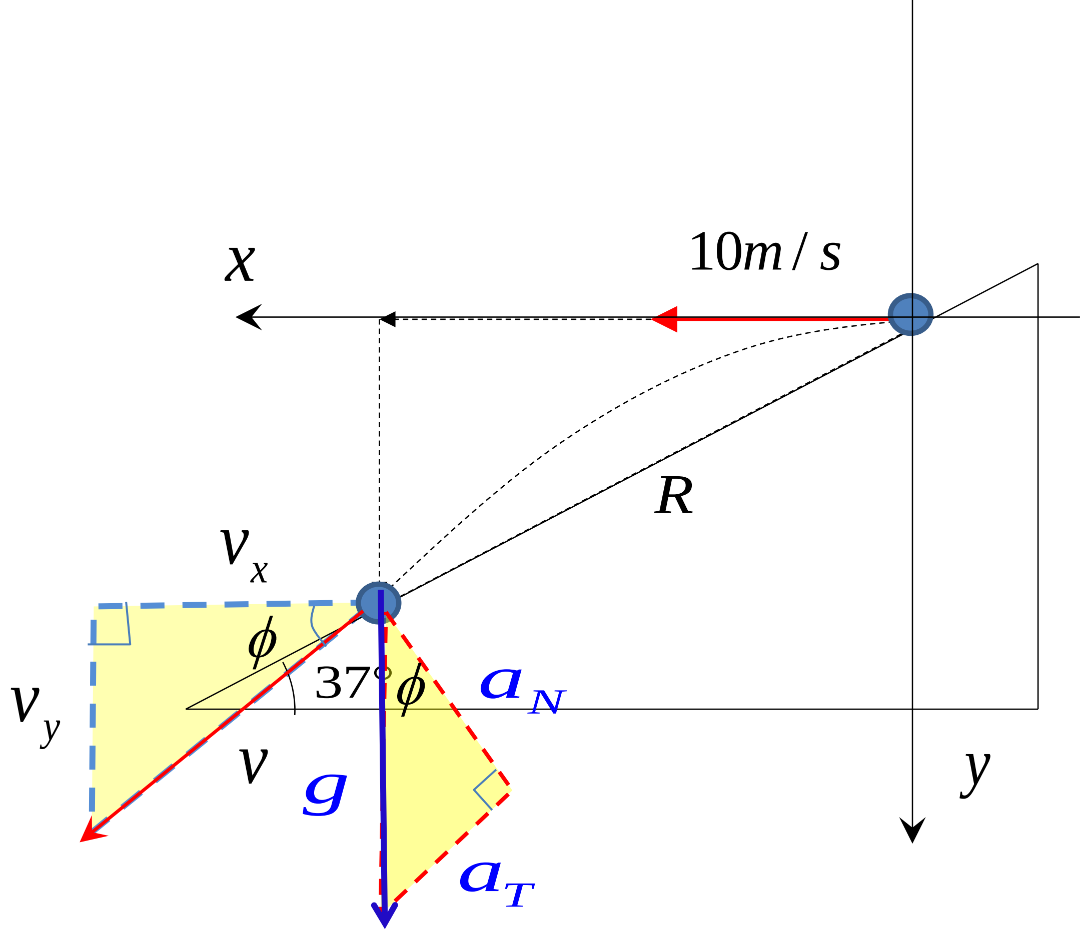
$$\boxed{R = \frac{x}{\cos\theta}} = \frac{10 \times \frac{3}{2}}{\cos 37°} = \frac{75}{4} [m]$$

[解析]



$$(3)\begin{cases} x:\ v_x = v_0 = 10 \\ y:\ v_y = gt = 10 \times \frac{3}{2} = 15 \end{cases} \rightarrow v = \sqrt{10^2 + 15^2} = 5\sqrt{13}$$

[解析]



$$(4)\tan\phi=\frac{v_y}{v_x}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

$$a_T=g\sin\phi=g\times\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{30}{\sqrt{13}}\qquad a_N=g\cos\phi=g\times\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{20}{\sqrt{13}}$$

以初速度12 *m/s*水平拋出一物，當法線加速度 $a_n = 3g/5$時，下列敘述何者正確？

(A)水平速度與鉛直速度的比為 3：4

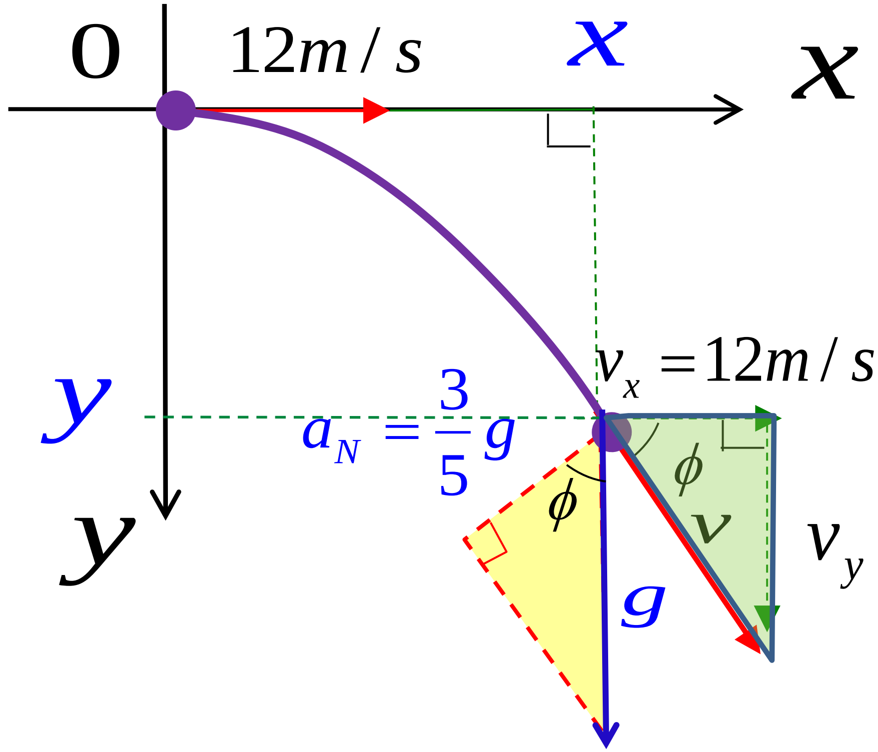
(B)在此瞬間的速度大小為 20 m/s

(C)水平位移與鉛直位移的比為 3：2

(D)從拋出到此瞬間需時 1.6 s

(E)位移方向與水平方向夾角 53^o 。 (其中*g*=10m/s^2)

[解析]

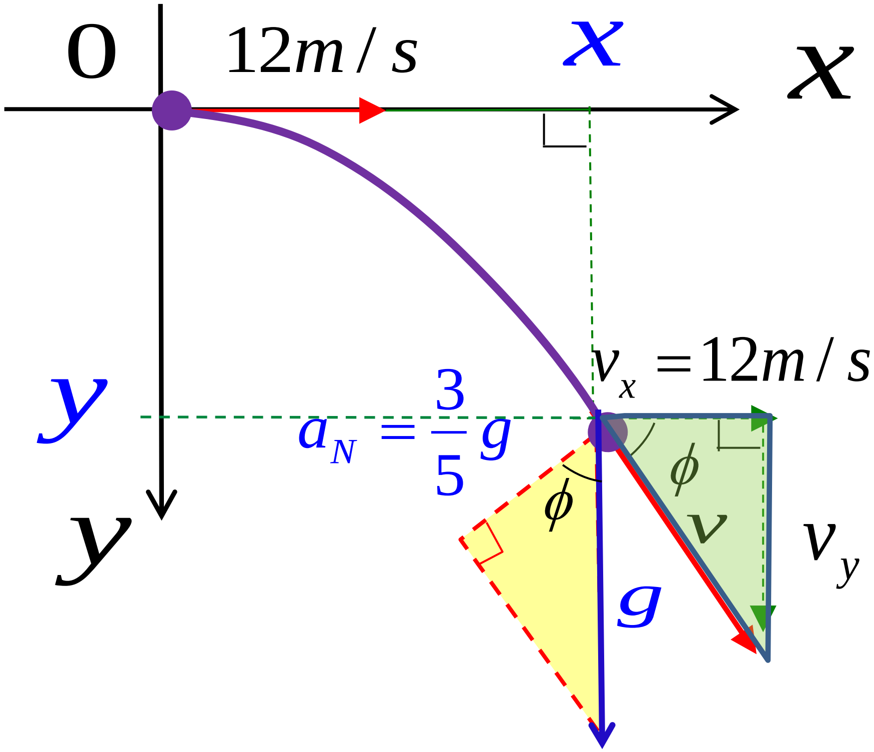


(A)

$$a_N = g\cos\phi \rightarrow \frac{3}{5}g = g\cos\phi \rightarrow \cos\phi = \frac{3}{5}$$

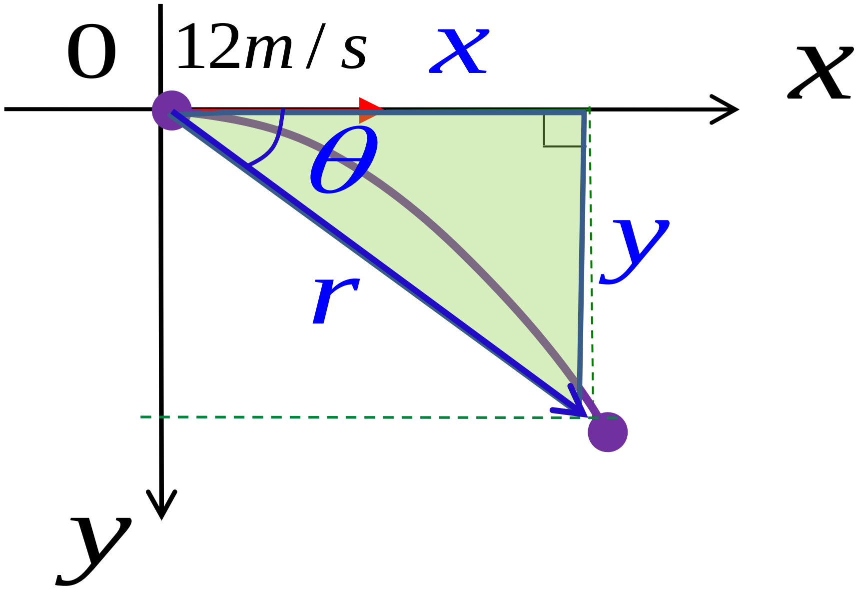
$$\frac{v_y}{v_x} = \tan\phi = \frac{4}{3}$$

[解析]



(B) $v = \frac{v_x}{\cos\phi} = \frac{12}{\frac{3}{5}} = 20$

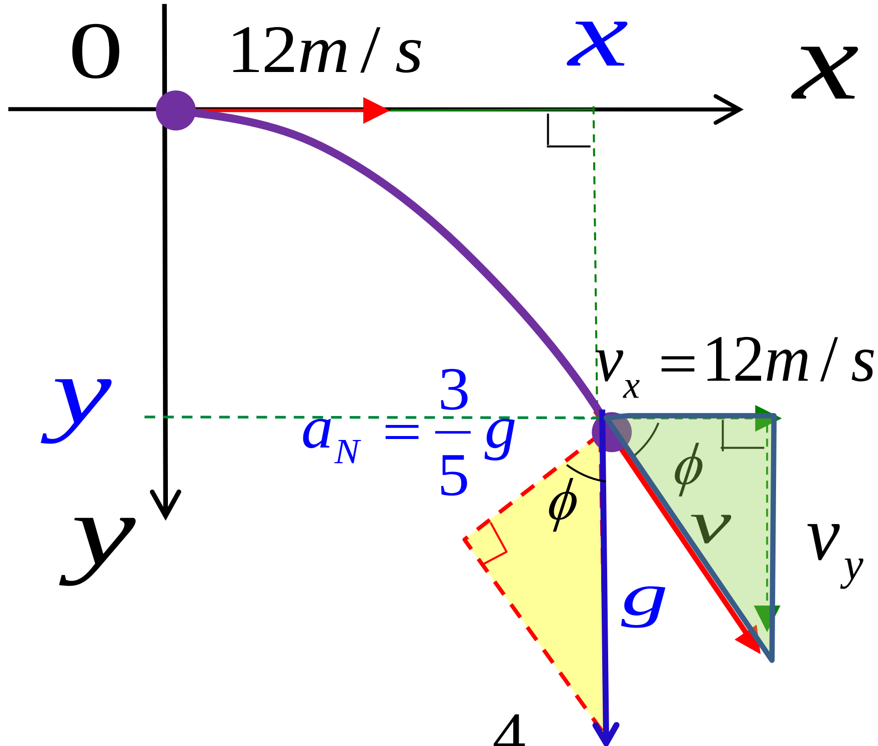
[解析]



(E)

$$\frac{y}{x}=\tan\theta=\frac{2}{3}\rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{2}{3}$$

[解析]



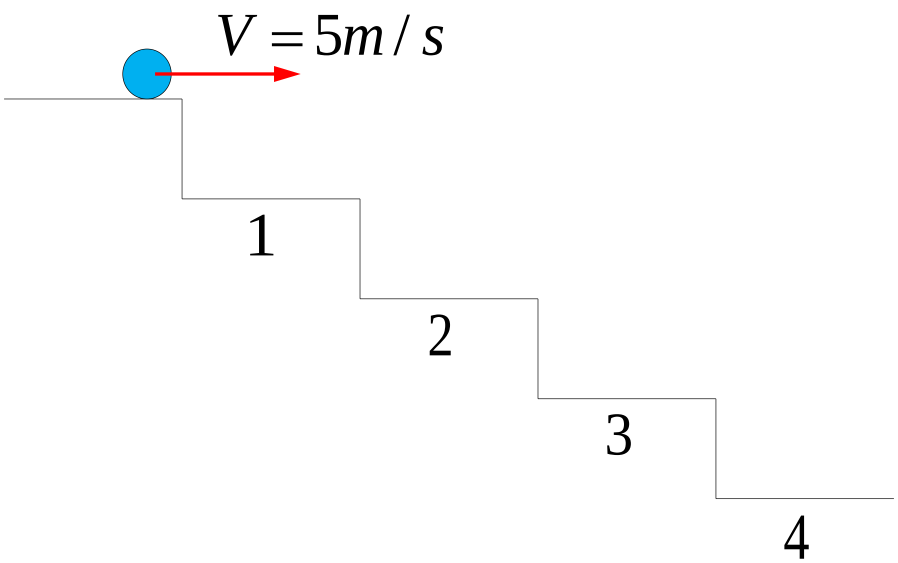
(C)(D) $v_y=v_x\tan\phi=12\times\frac{4}{3}=16$

令歷時t

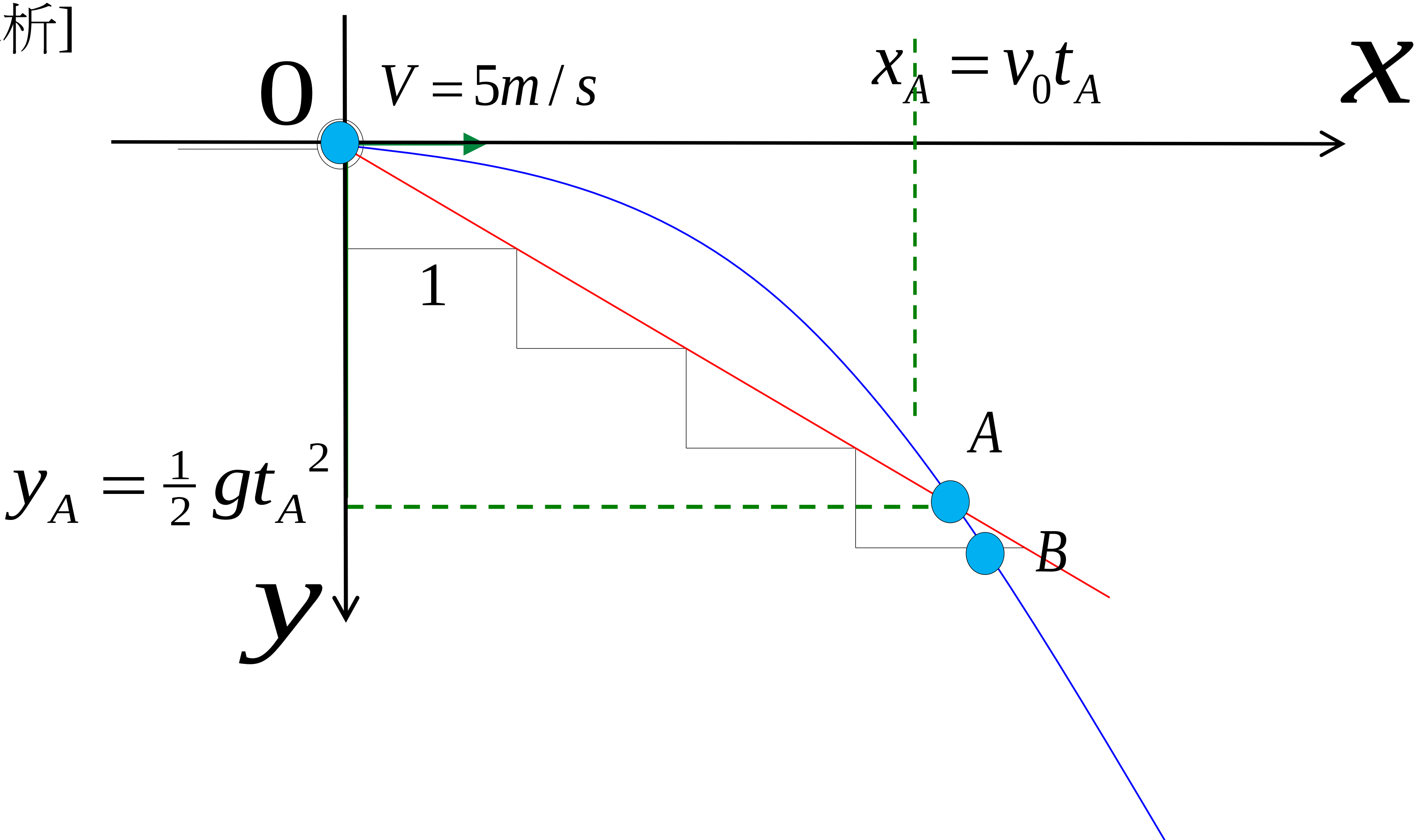
$y:\left[v=v_0+at\right]\ 16=10t\ \therefore t=1.6$

$$\begin{cases} x: & x=12\times1.6 \\ y: & y=\frac{1}{2}\times10\times1.6^2 \end{cases} \rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{2}\times10\times1.6^2}{12\times1.6}=\frac{2}{3}$$

如右圖所示，一石階夠長，每階高*20.0*公分， 寬*30.0*公分，今將一物以*5* 公尺/秒之速度水平拋出，設重力加速度$g = 10$ m/s^2，則（1）擊中第__ 階（2）經_秒擊中階梯。

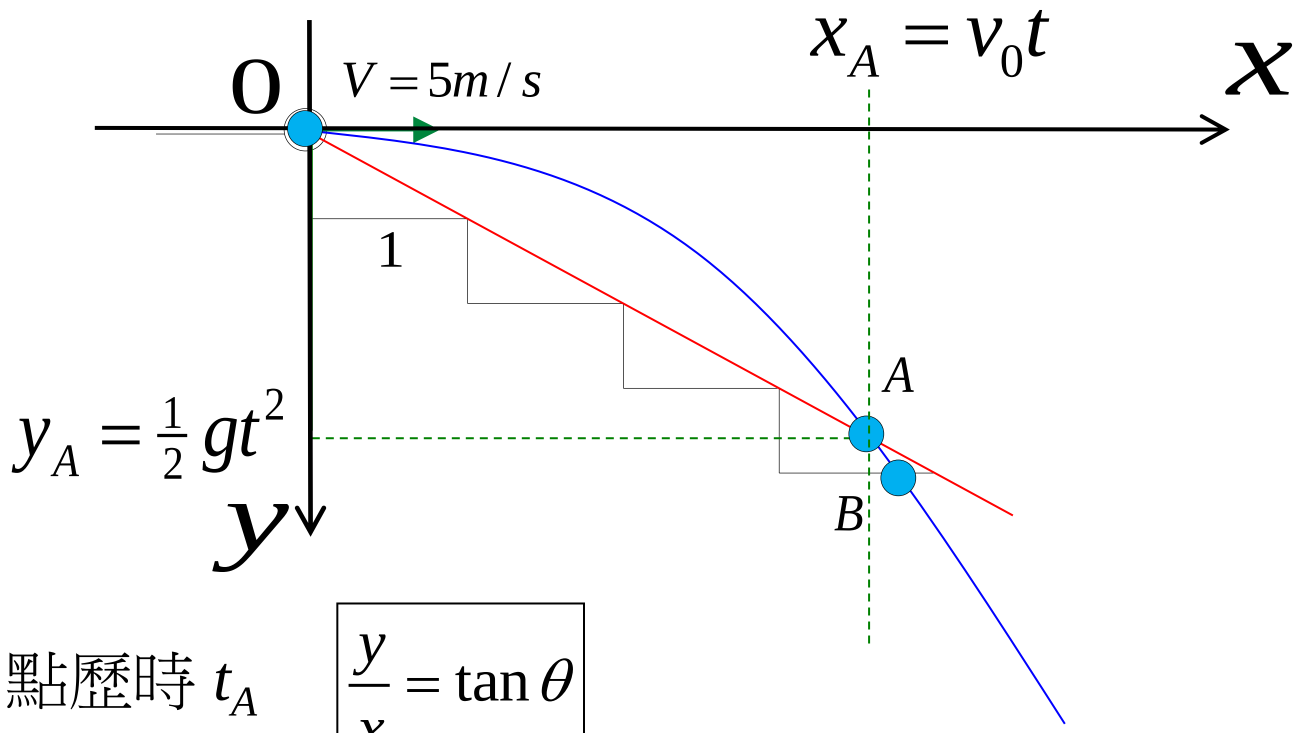


[解析]



（1）如圖所示，物體運動之拋物線軌跡與各階頂點連線相交於 A 點，物體落於階梯上 B 點

[解析]



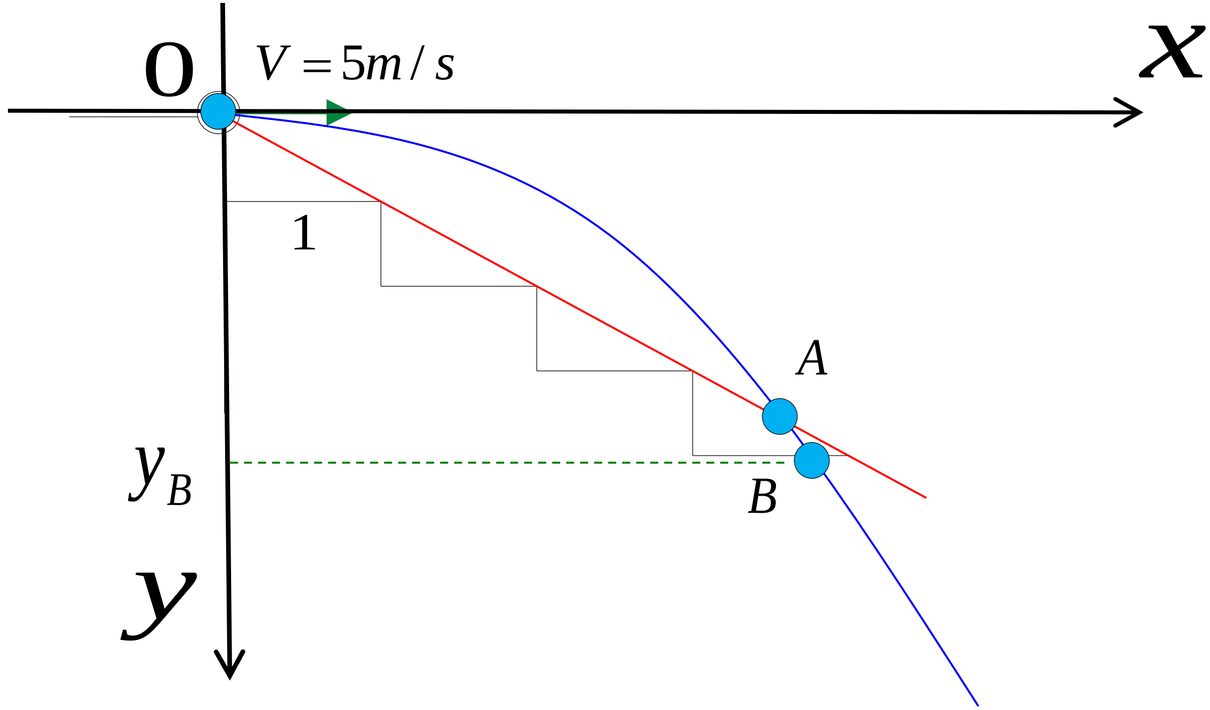
先求到 A 點歷時 t_A $\boxed{\frac{y}{x} = \tan\theta}$

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t_A{}^2}{5\cdot t_A} = \frac{20}{30} \rightarrow t_A = \frac{2}{3}$$

A 點的水平坐標 $x_A = v_0 t_A = 5\times\frac{2}{3} = \frac{10}{3}[m] = 333.3[cm]$

落於第N階 $N = \frac{333.3}{30} = 11.1 \rightarrow$ 第12階

[解析]



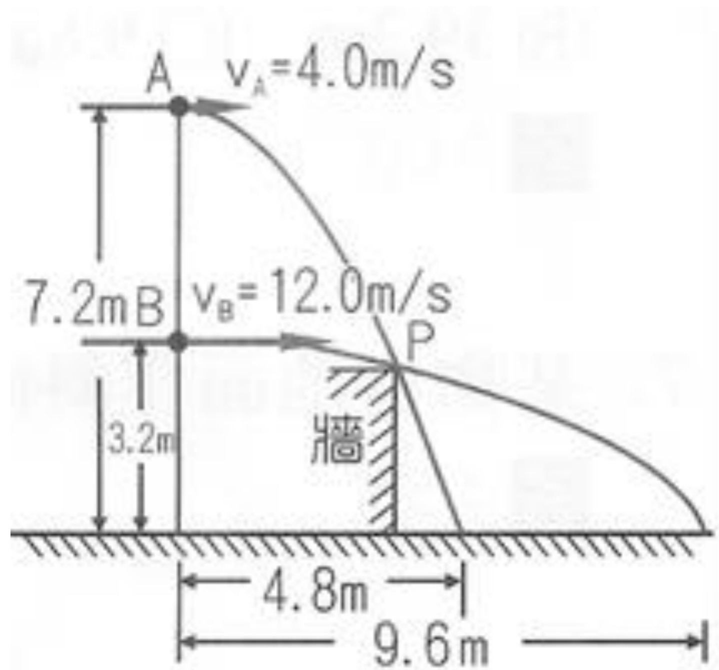
（2）B 點的 y 坐標 $(\text{第12階})\ y_B = 0.2 \times 12 = 2.4m$

$$y : y_B = \frac{1}{2} g t_B{}^2 \rightarrow 2.4 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_B{}^2 \rightarrow t_B = \frac{2}{5}\sqrt{3}[s]$$

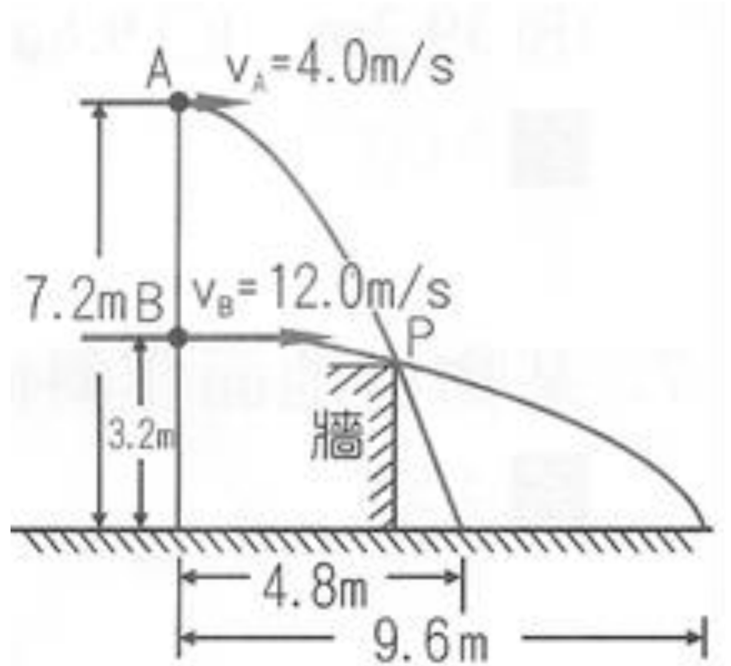
如右圖所示， 將A物體以v_A=4.0m/ s 的速度向右水平拋出， 同時在A物體位置的正下方，將B 物體以v_B=12.0m/ s 的速度向右水平拋出。兩物體的飛行軌跡在同一鉛直面， 而且都恰掠過一牆的頂端P 點。若A拋出後t_1秒通過P 點，B 在拋出後t_2秒通過P 點，則（重力加速度g=10.0 m/s²）

(1) t_2 = ？

(2) 牆高？



[解析]



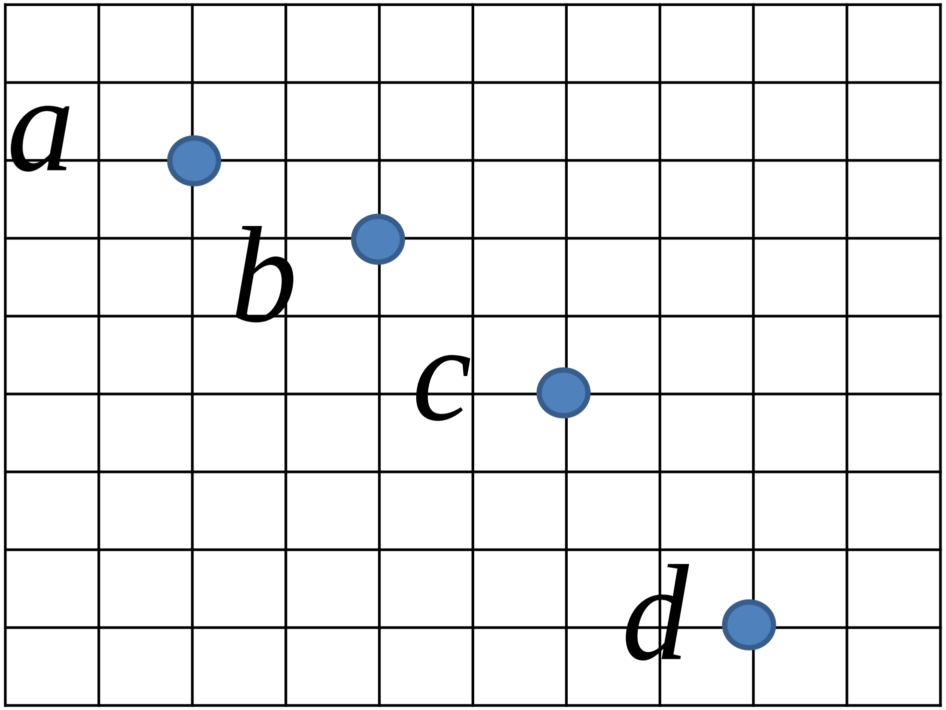
$$\begin{cases} x: v_A t_1 = v_B t_2 \rightarrow 4t_1 = 12t_2 \rightarrow t_1 = 3t_2 \\ y: \frac{1}{2}g{t_1}^2 = (7.2-3.2) + \frac{1}{2}g{t_2}^2 \rightarrow 5{t_1}^2 = 4 + 5{t_2}^2 \end{cases}$$

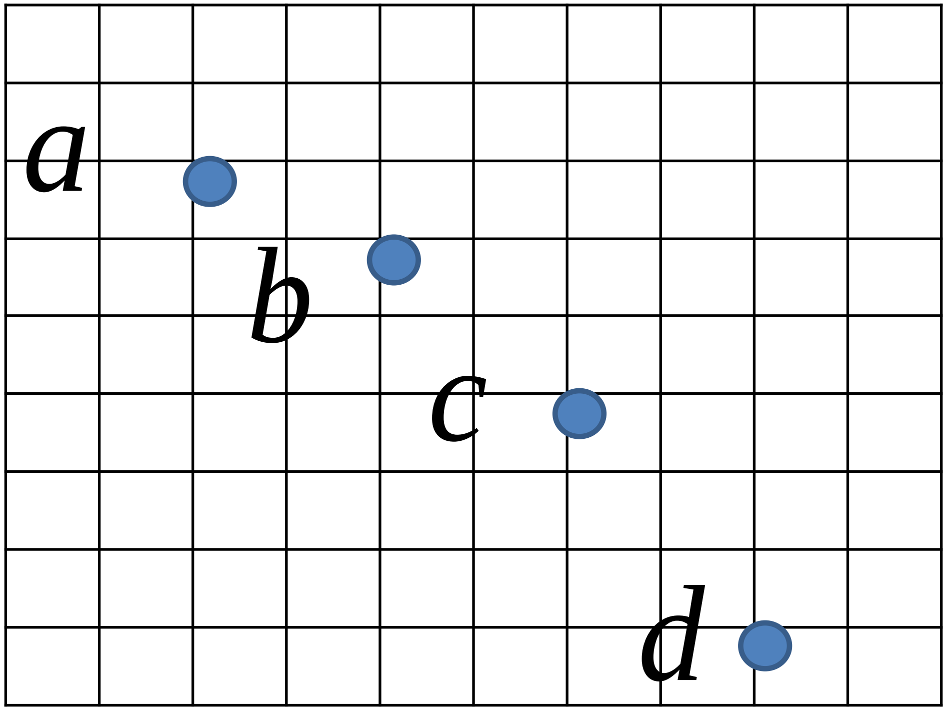
$$5\times(3t_2)^2 = 4 + 5{t_2}^2 \quad \therefore\ t_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad t_1 = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$P點離地高度 h_P = 3.2 - \frac{1}{2}g{t_2}^2 = 3.2 - \frac{1}{2}\times 10\times\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 3.2 - 0.5 = 2.7$$

$$牆與拋出點水平距離 = v_A t_1 = v_B t_2 = 12\times\frac{\sqrt{10}}{10}[m]$$

一物作平拋運動，用一張印有小方格的紙來記錄軌跡，小方格的邊長為10cm，若小球在平拋運動中的幾個位置，如附圖 a 、 b 、 c 、 d 所示，其中 a 點並不是拋射點，若 $g=10m/s^2$，則小球在b點的瞬時速度量值為？





a
b
c
d

y：等加速度　已知$\Delta y_{ab}=10cm$ $\Delta y_{bc}=20cm$ $\Delta y_{cd}=30cm$

由$\left[S_2-S_1=aT^2\right]\dfrac{20}{100}-\dfrac{10}{100}=10T^2\ \therefore T=0.1[s]$

由$\left[\bar{v}_y(a\to c)=v_y(b)\right]\therefore v_y(b)=\dfrac{\Delta y(a\to c)}{\Delta t}=\dfrac{\frac{30}{100}}{2\times 0.1}=1.5[m/s]$

x：等速度　已知$\Delta x_{ab}=\Delta x_{bc}=\Delta x_{cd}=20cm$

由$\left[v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right]\therefore v_x=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\frac{20}{100}}{0.1}=2[m/s]$

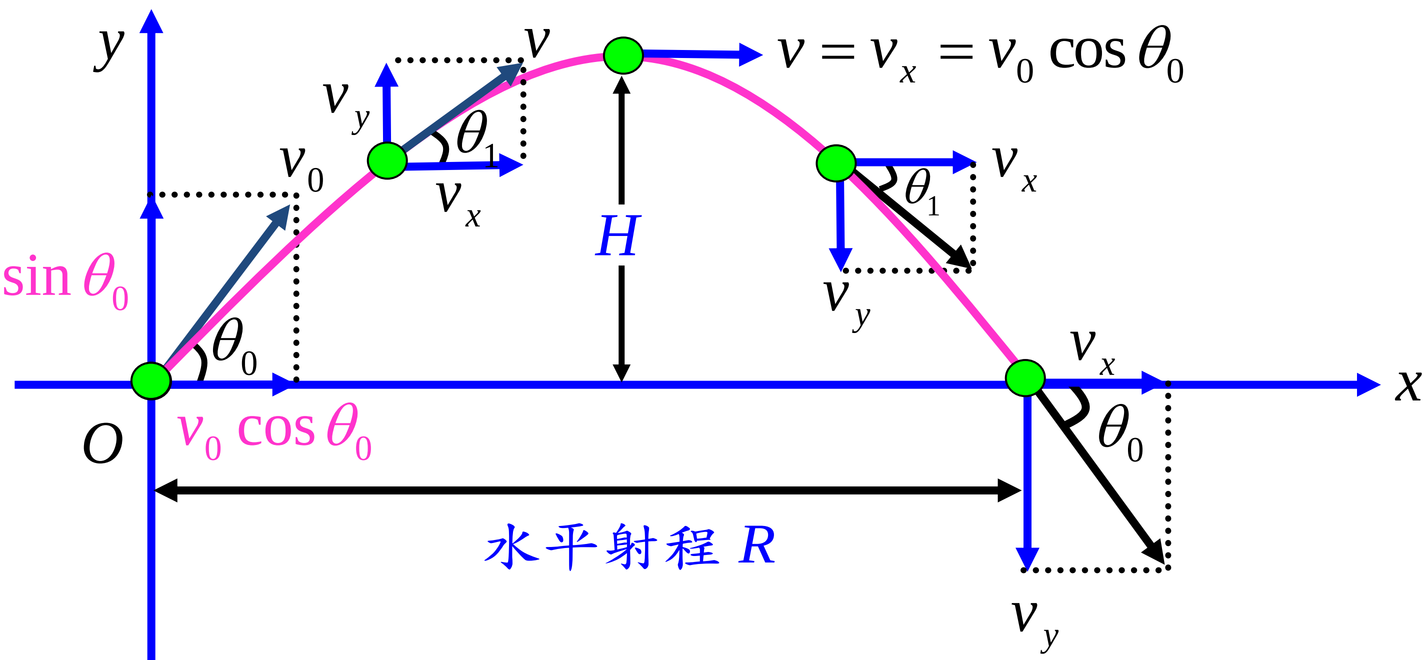
$\therefore v_b=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{2^2+1.5^2}=2.5[m/s]$

單元四：斜向拋體運動

斜向拋射：

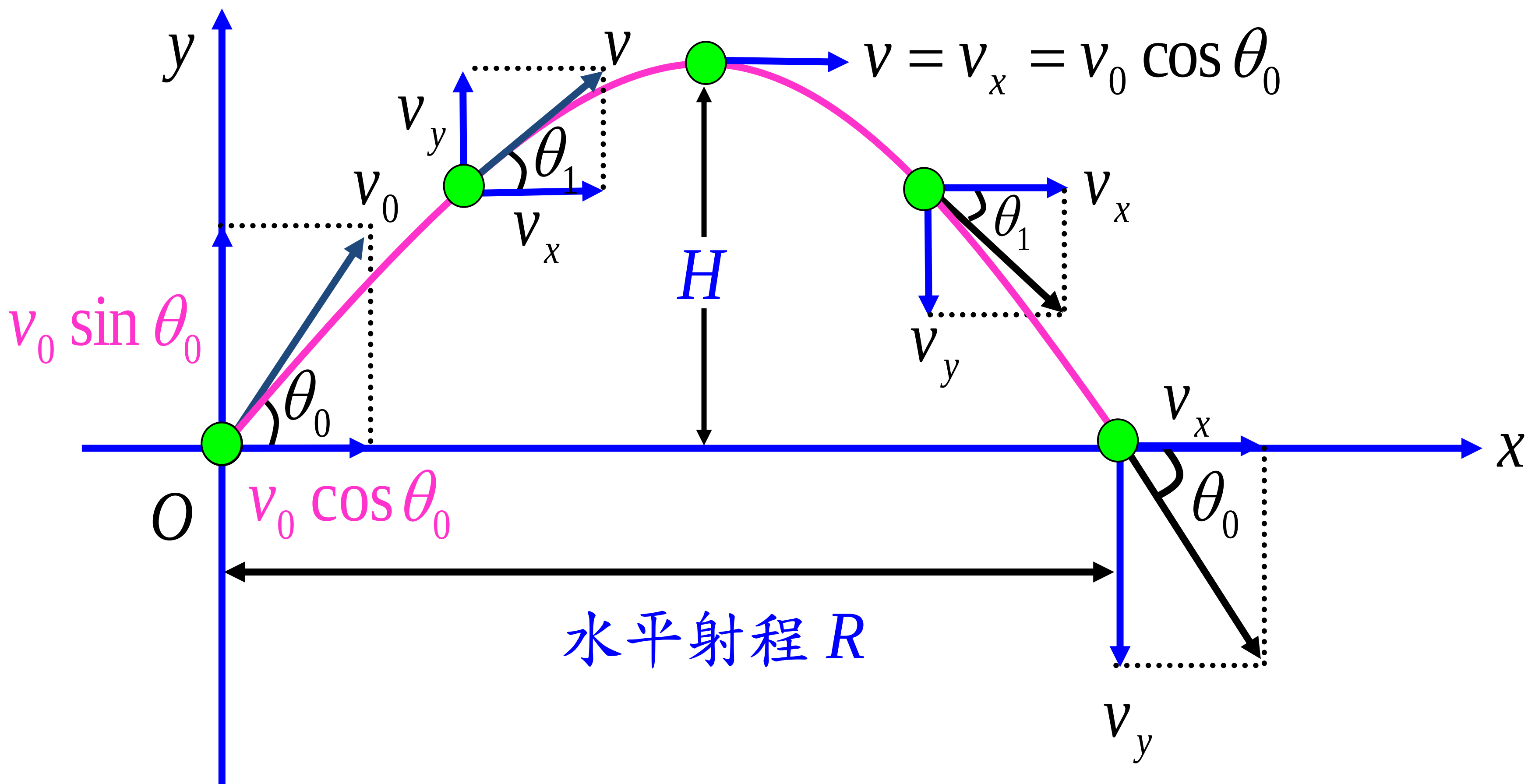
物體以初速度 v_0 ，仰角 $\theta_0 \neq 0^{\circ}$ 拋出，作曲線等加速度運動。

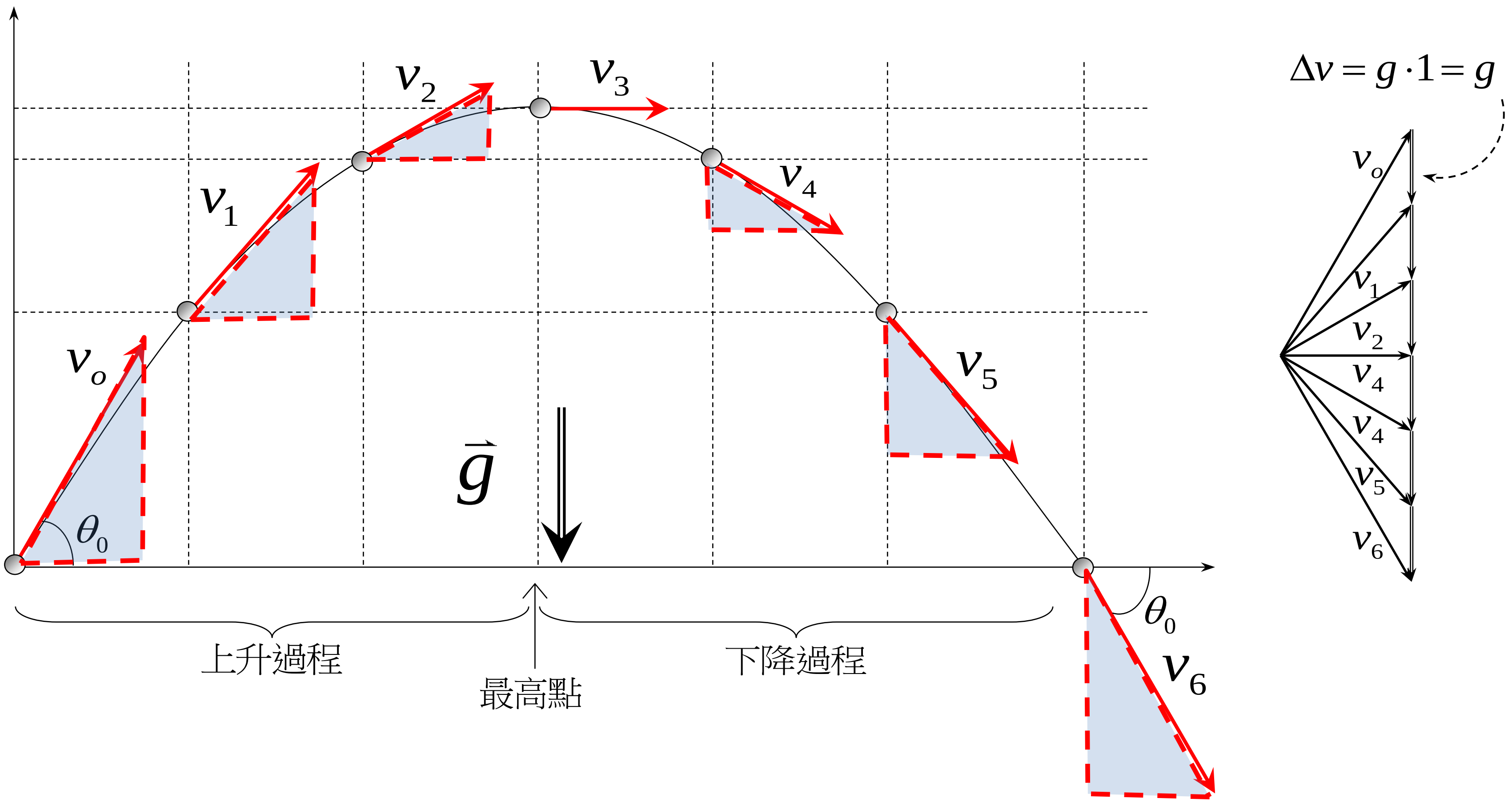
斜向拋射	水平方向	：等速度運動
	鉛直方向	：鉛直上拋



斜向拋射的運動分析

$$\begin{cases} \text{水平方向：等速度運動} \\ \text{鉛直方向：鉛直上拋運動} \end{cases}$$





v_o
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
θ_0
$\vec{g}$
$\Delta v = g \cdot 1 = g$
上升過程
最高點
下降過程

第57頁

運動分析：已知初速度 v_0 (↗)，加速度 g(↓)，求 t 秒後之 $\begin{cases} \text{加速度}\vec{a} \\ \text{速度}\vec{v} \\ \text{位移}\vec{r} \end{cases}$

以出發點為原點，定向上、向右為正。

加速度： $\vec{a} = -g\,\hat{j}$ $\boxed{\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}}$

速 度： $\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j}$ $\boxed{\begin{cases} v_x = v_o \cos\theta_0 \\ v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases}}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

(方向：與水平夾角 $\tan\phi = \dfrac{v_y}{v_x}$

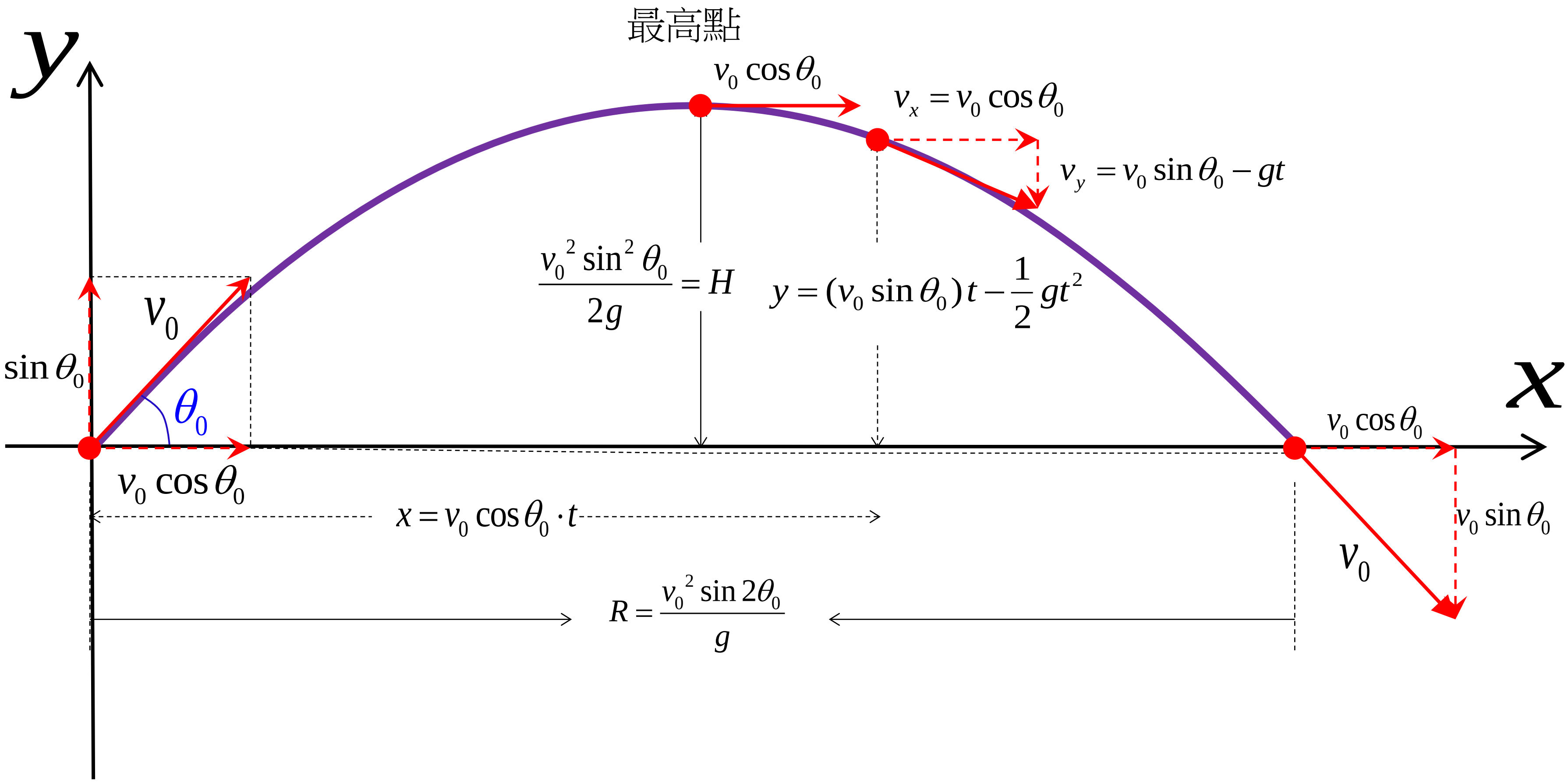
，上升過程為仰角，下降過程為俯角。)

第57頁

位 移： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} x = v_o \cos\theta_0 \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



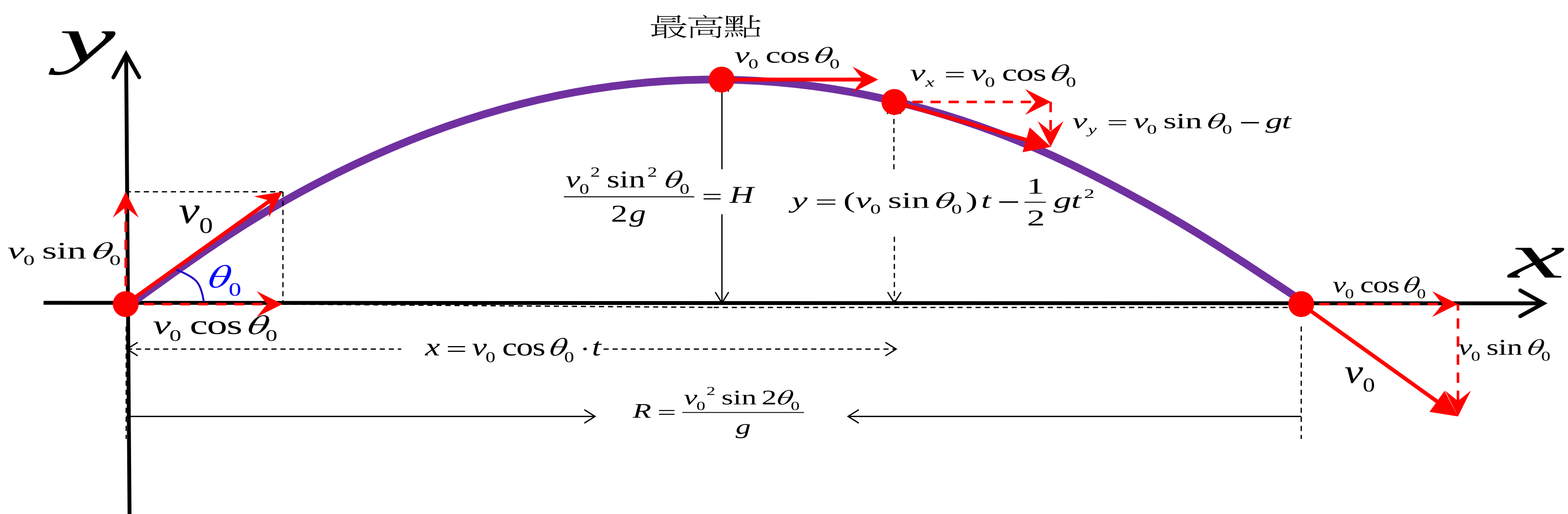
軌跡方程式： $\boxed{y=\tan\theta_0\cdot x-\dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_0}x^2}$

(開口朝下之拋物線)

[說明] $x=v_o\cos\theta_0\cdot t\rightarrow t=\dfrac{x}{v_o\cos\theta_0}$

帶入 $y=v_0\sin\theta_0\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2$

$$=v_0\sin\theta_0\times\frac{x}{v_o\cos\theta_0}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o\cos\theta_0}\right)^2=\tan\theta_0\cdot x-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_0}x^2$$

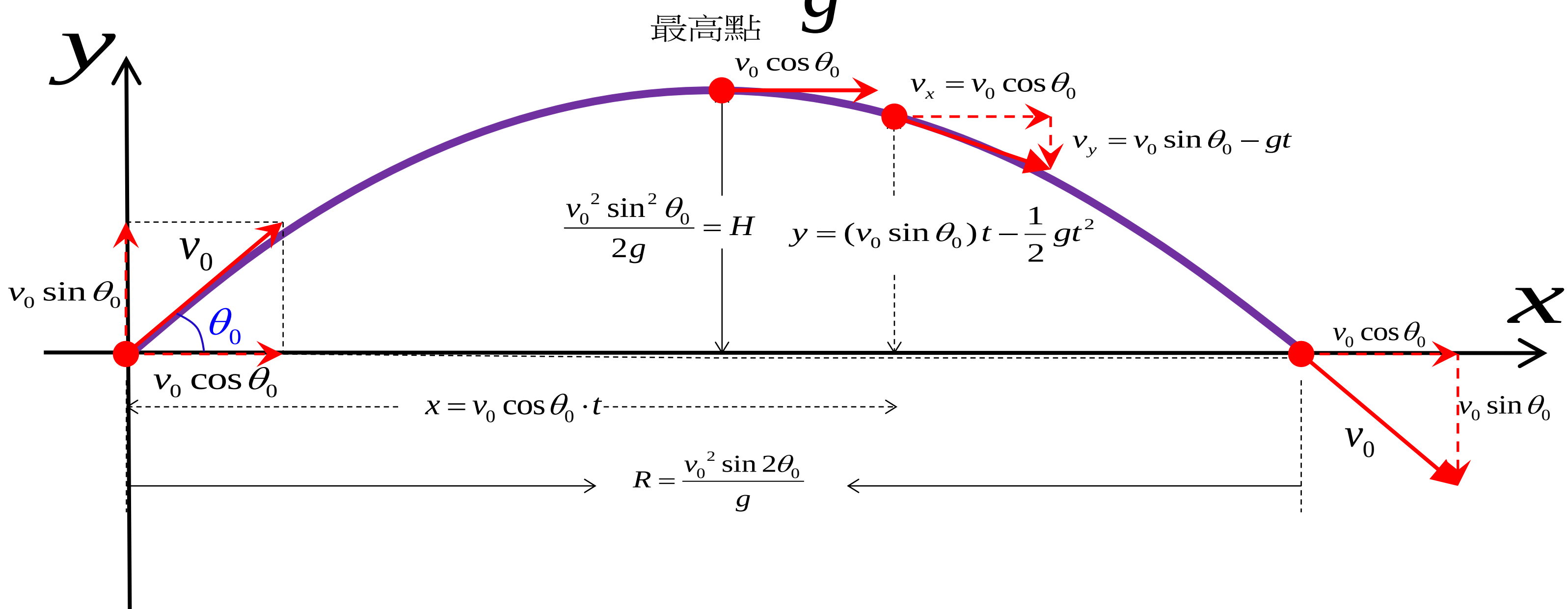


斜向拋射特殊資料：拋出高度與著地高度相同下

飛行時間(T)： $T = 2t = \dfrac{2v_o \sin\theta_0}{g}$ $\left(t\text{為半程歷時}\right)$

最大高度(H)： $H = \dfrac{v_o^{\,2} \sin^2\theta_0}{2g} = \dfrac{1}{2}gt^2$

水平射程(R)： $R = \dfrac{v_0^{\,2} \sin 2\theta_0}{g} = v_0\cos\theta_0 \cdot T$



1.飛行時間(T): $\boxed{T=2t=\dfrac{2v_o\sin\theta_0}{g}}$ (t為半程歷時)

[說明]y: 最高點時$v_y=v_0\sin\theta_0-gt=0\quad\therefore t=\dfrac{v_0\sin\theta_0}{g}$

2. 最大高度(H): $\boxed{H=\dfrac{{v_o}^2\sin^2\theta_0}{2g}=\dfrac{1}{2}gt^2}$

[說明]y: $\left[v^2={v_0}^2+2a\Delta x\right]$

最高點時$0=(v_0\sin\theta_0)^2-2gH=0\quad\therefore H=\dfrac{{v_0}^2\sin^2\theta_0}{2g}$

3. 水平射程(R): $\boxed{R=\dfrac{{v_0}^2\sin2\theta_0}{g}=v_0\cos\theta_0\cdot T}$

[說明]x: $R=v_0\cos\theta_0\cdot T=v_0\cos\theta_0\cdot\dfrac{2v_0\sin\theta_0}{g}=\dfrac{{v_0}^2\sin2\theta_0}{g}$

第60頁

在地面上沿仰角 37 度發射一砲彈，經過 6 秒落回地面，設重力加速度 g=10公尺/秒^2，則：

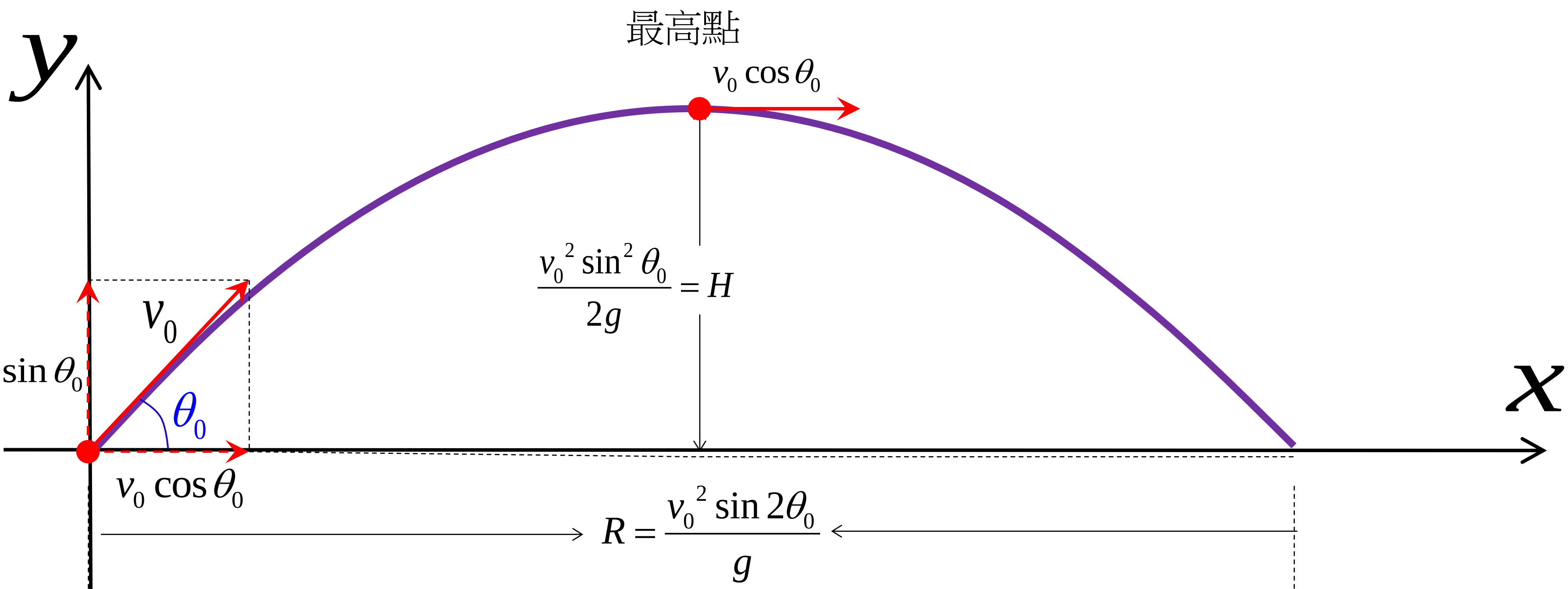
(1)自發射至最高點費時_____秒。

(2)砲彈的初速為_____公尺/秒，其中水平分量為_____公尺/秒；鉛直分量為_______公尺/秒。

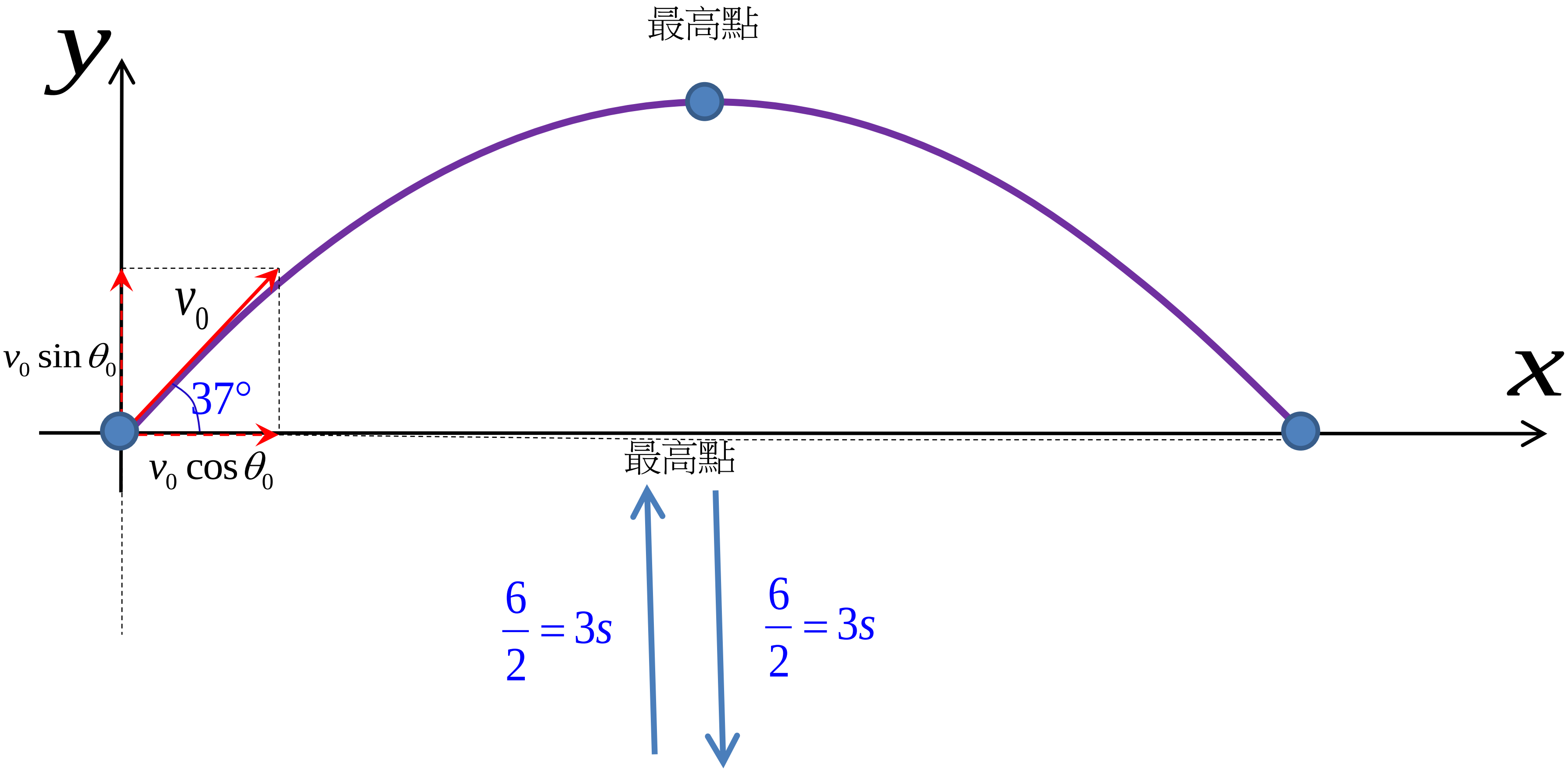
(3)砲彈在最大高度時的速率為_______公尺/秒。

(4)砲彈的水平射程為_______公尺。

(5)砲彈所能到達的最大高度為_______公尺。

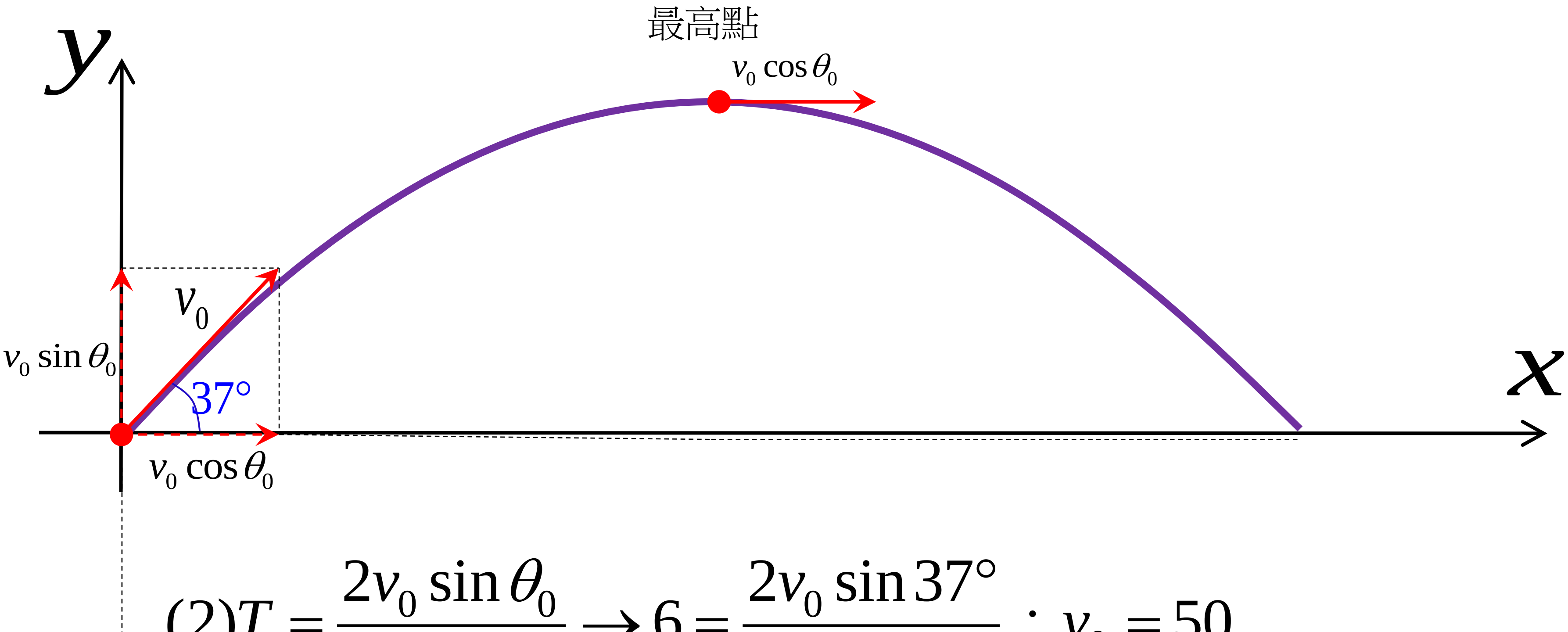


[解析]



(1)由對稱性可知，自發射至最高點費時 3 秒。

[解析]

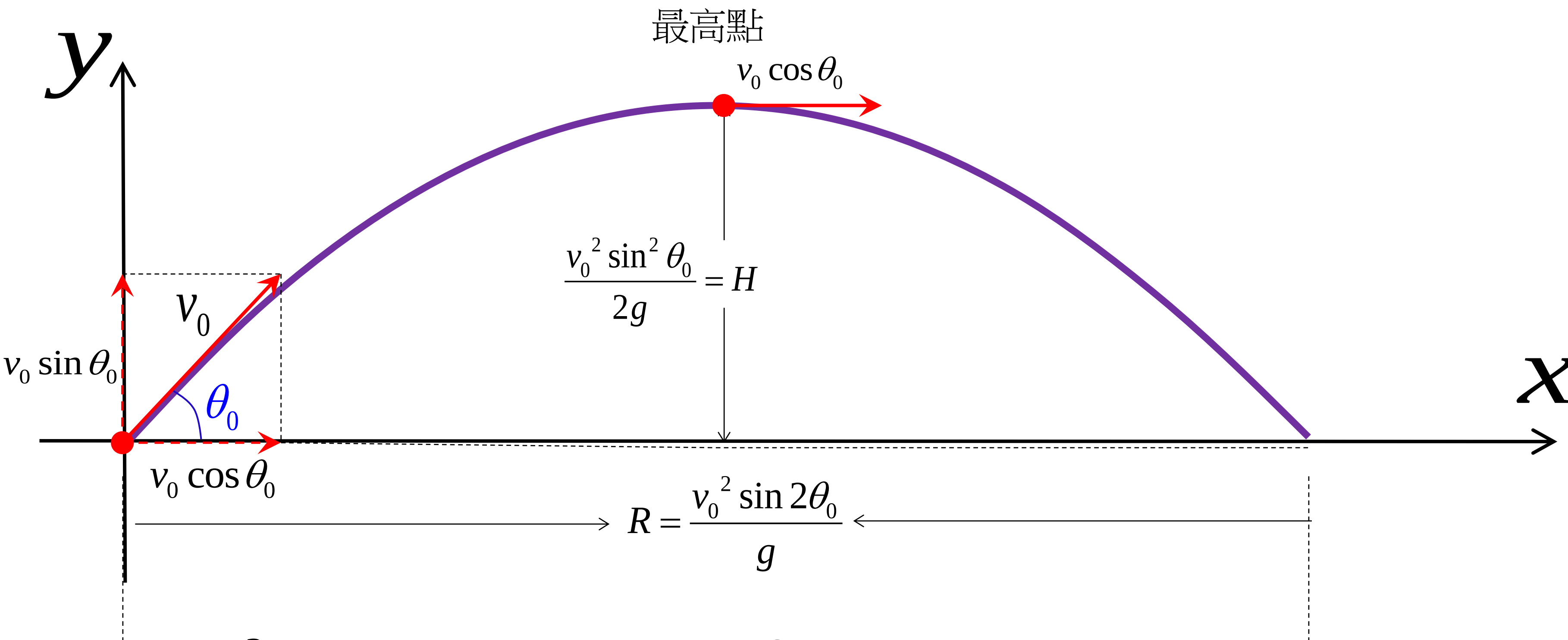


$$(2)T=\frac{2v_0\sin\theta_0}{g}\rightarrow 6=\frac{2v_0\sin 37^\circ}{10}\ \therefore v_0=50$$

$$\begin{cases} v_x=v_0\cos\theta_0=50\times\cos 37^\circ=40(\mathrm{m/s}) \\ v_y=v_0\sin\theta_0=50\times\sin 37^\circ=30(\mathrm{m/s}) \end{cases}$$

(3)最高點時：$v=v_x=v_0\cos\theta_0=40(\mathrm{m/s})$

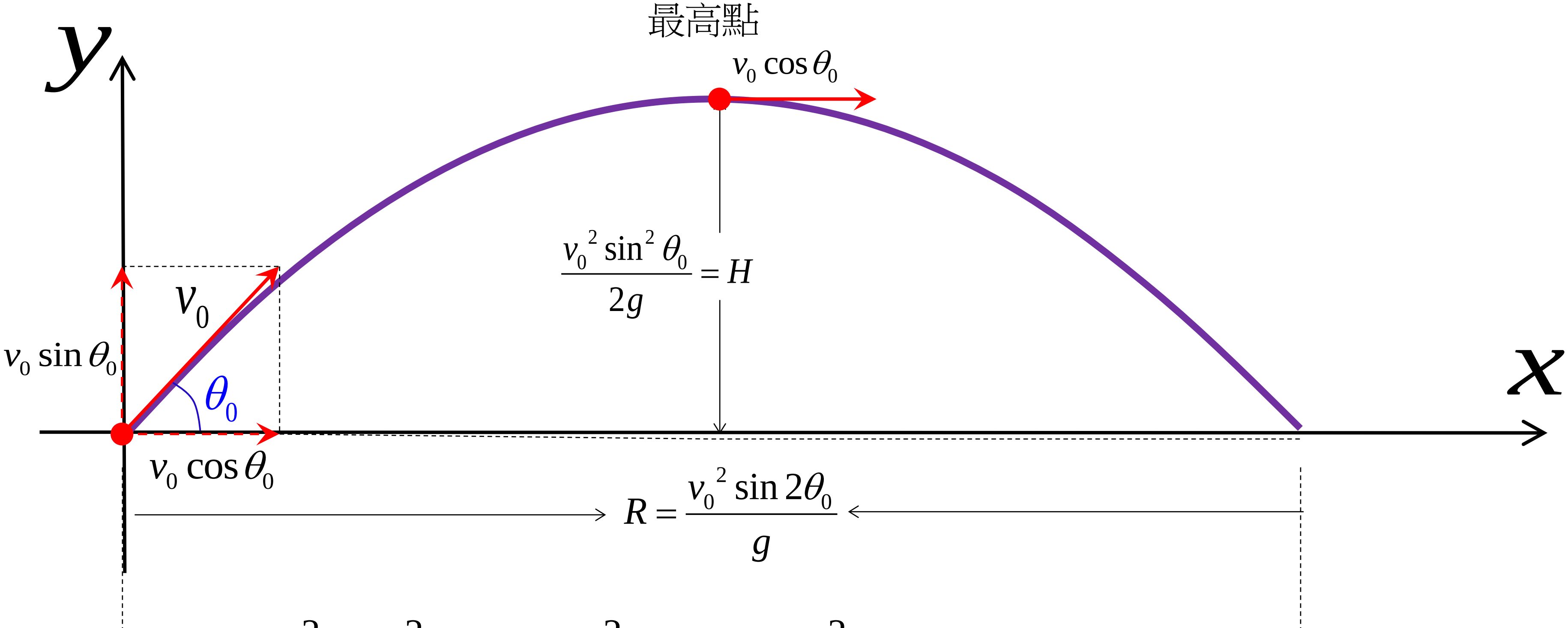
[解析]



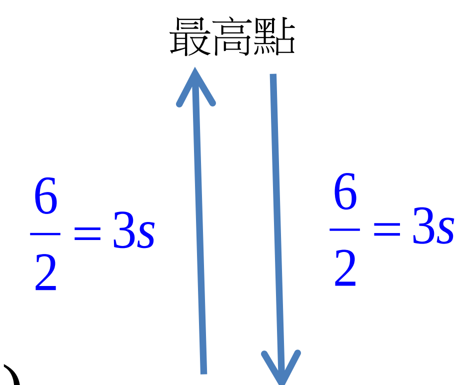
$$(4)R=\frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}=\frac{2\times 50^2\times\sin 37°\times\cos 37°}{10}=240(\text{m})$$

[另解]$R=v_xT=40\times 6=240(m)$

[解析]



$$(5)H=\frac{v_0^{\ 2}\sin^2\theta_0}{2g}=\frac{v_0^{\ 2}(\sin 37°)^2}{2g}=45(\mathrm{m})$$



[另解]後半程為水平拋射

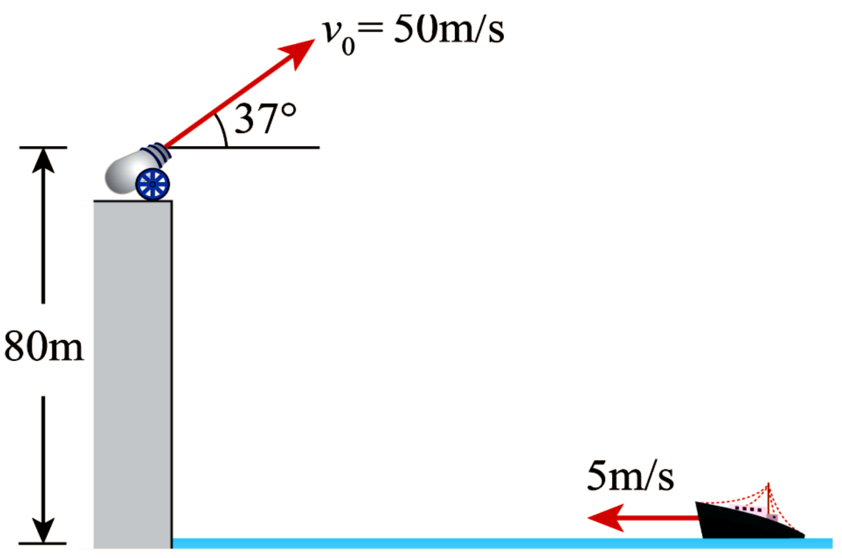
$$\Rightarrow H=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 10\times 3^2=45(m)$$

如圖所示，砲彈自岸邊海平面上方高度80公尺處，以初速50公尺/秒、仰角為37度射出，恰好擊中正向岸邊以速率5公尺/秒行駛過來之敵艦，不計空氣阻力，g=10公尺/秒^2，則：

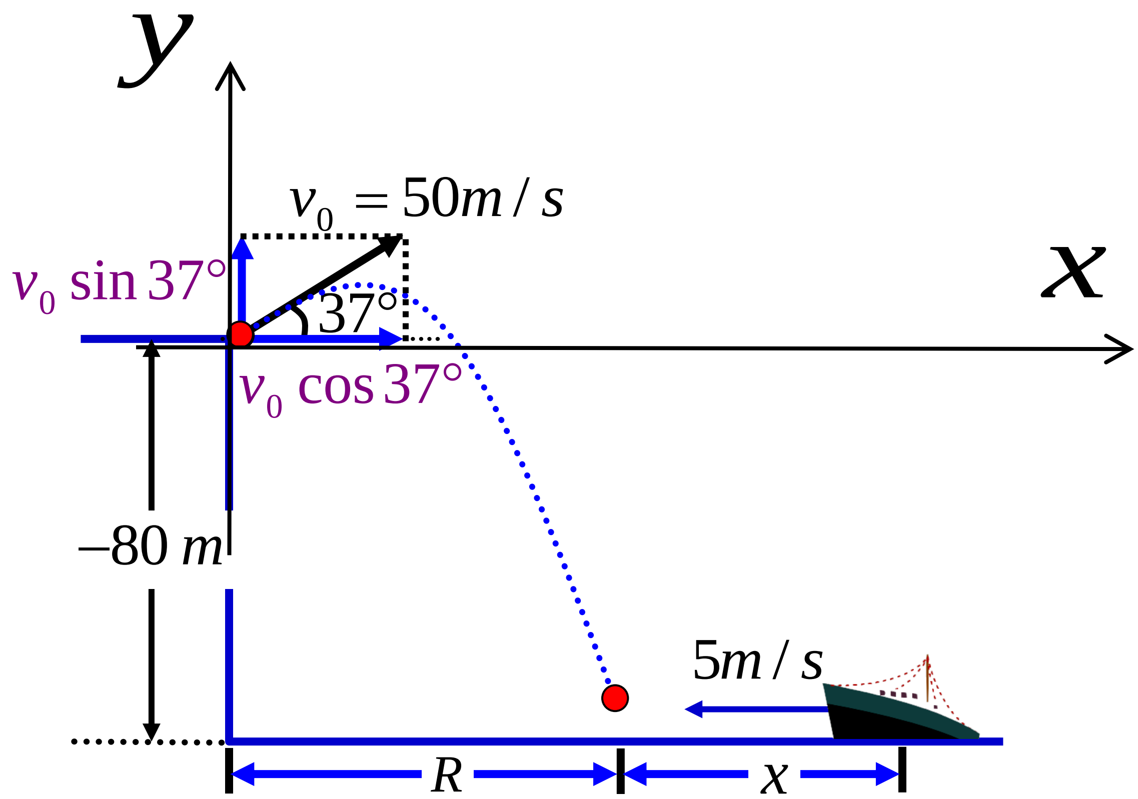
(1)砲彈飛行的時間為_____秒。

(2)砲彈的水平射程為_____公尺。

(3)發砲時艦離岸邊的距離為_______公尺。



[解析]

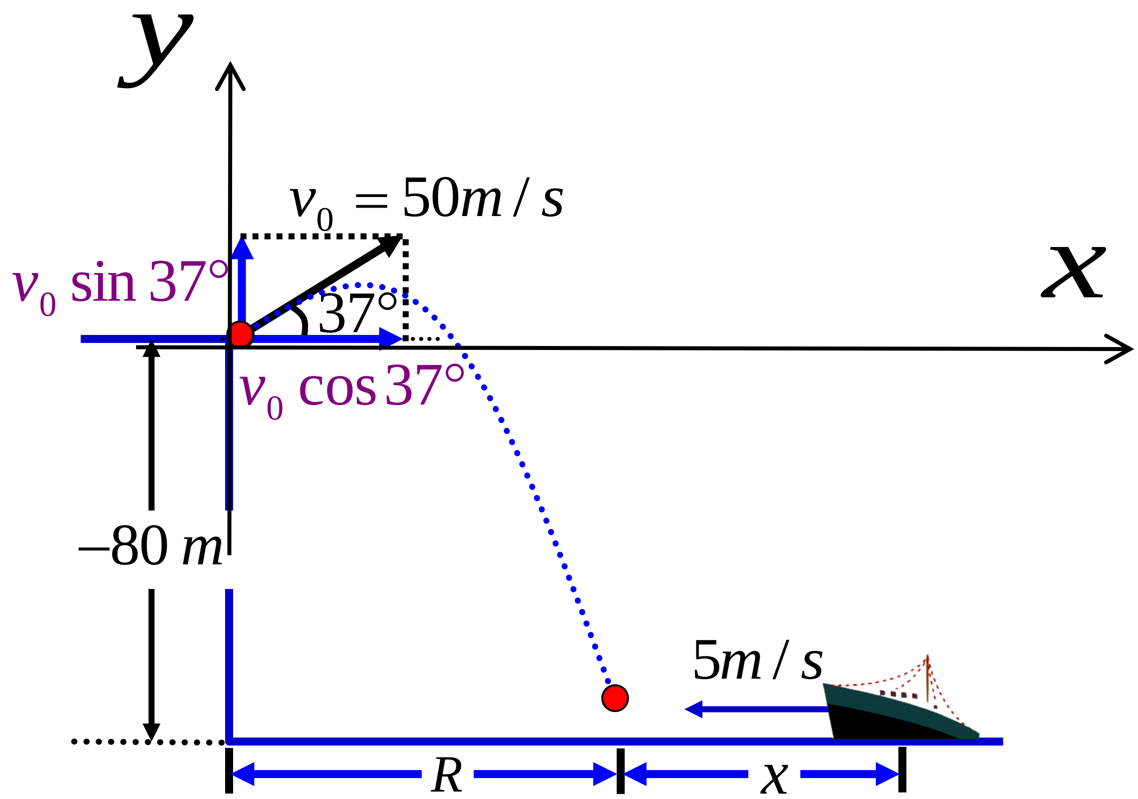


令向上為正 向右為正

$$(1) y : \left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right] \Rightarrow -80 = 50 \times \sin 37° \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$\Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0 \Rightarrow t = 8$ 或 -2 （負不合）

[解析]



(2)x：水平射程 $R = 50 \times \cos 37° \times 8 = 320(\text{m})$

(3)x ： $x = vt = 5 \times 8 = 40(\text{m})$

$\Rightarrow$ 原來艦離岸邊的距離為

$R + x = 320 + 40 = 360(\text{m})$

4. 上升過程與下降過程具有對稱性，似鉛直上拋。

1 時距對稱： $\Delta t_{A\to B} = \Delta t_{C\to D}$

上升過程經過某段鉛直高度的時距＝

下降過程經過同一段鉛直高度的時距

2 速率對稱； $v_B = v_C$

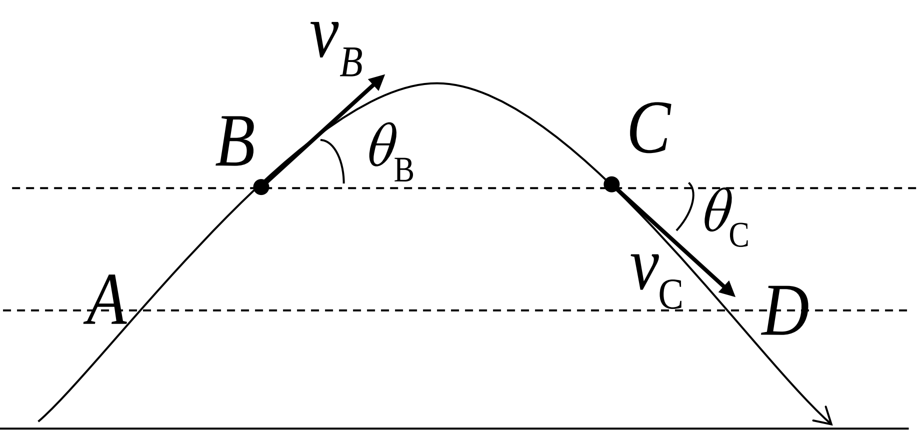
上升過程經過某一高度時的速度大小＝

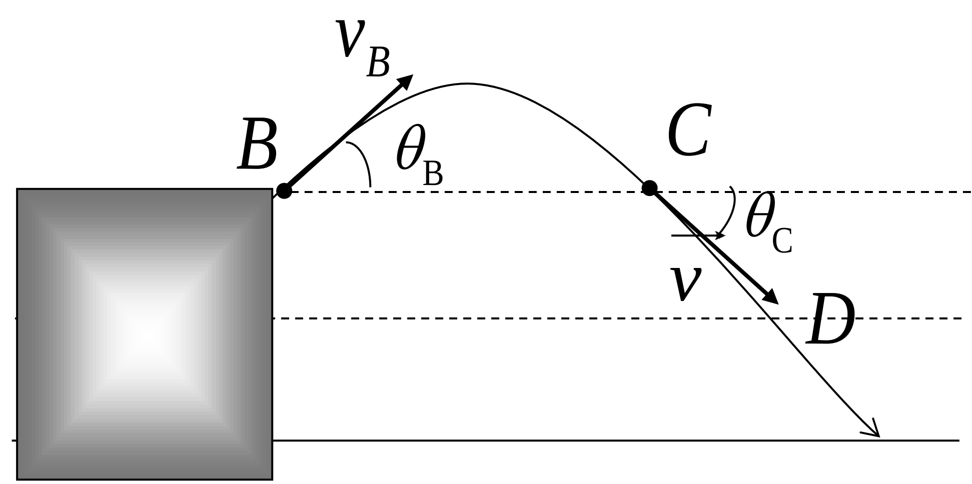
下降過程經過同一高度時的速度大小

3 角度對稱： $\theta_B = \theta_C$

上升過程經過某一高度時速度的仰角大小＝

下降過程經過同一高度時速度的俯角大小



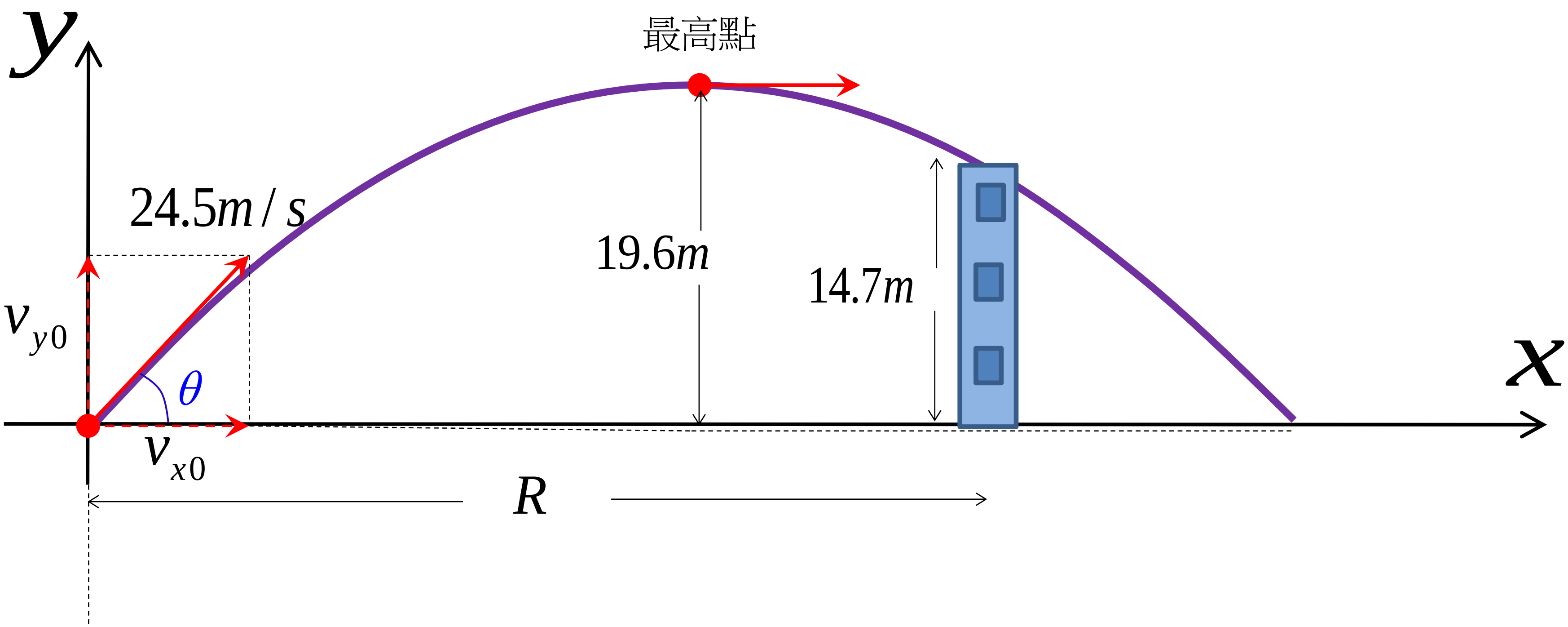


【思考】：

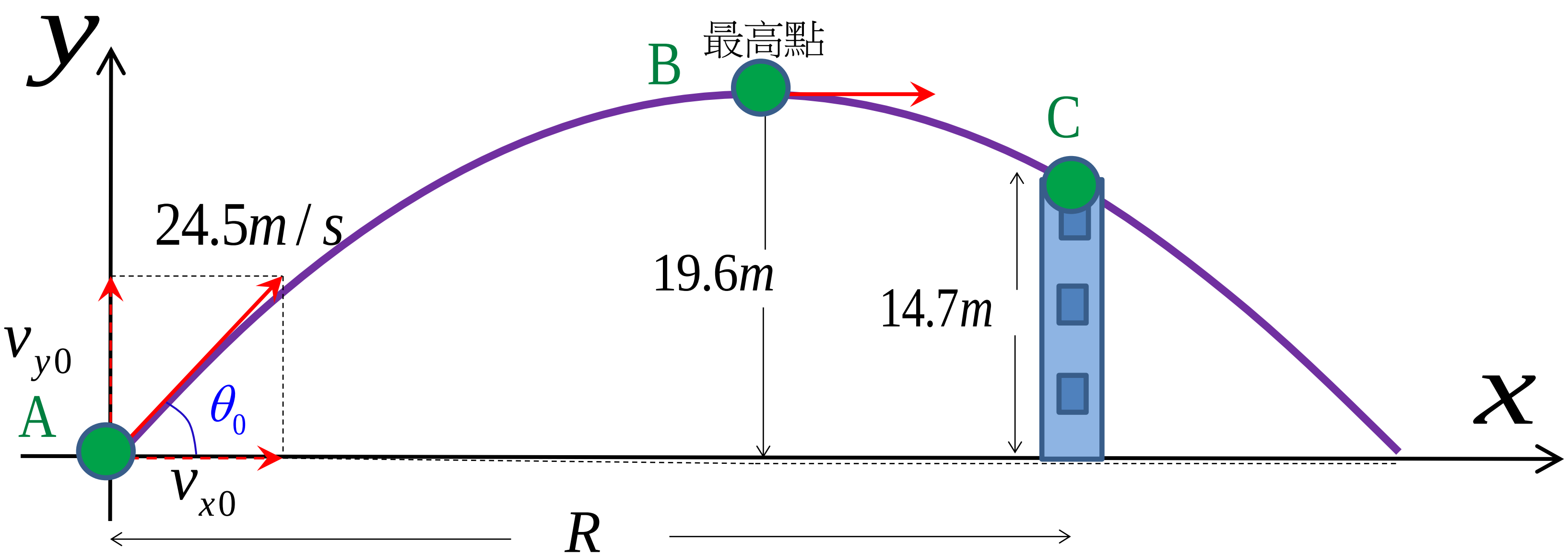
1 斜拋過程中，物體經同一高度，速度為何？
__大小相等，方向與水平夾角相等，__
__但上升時為仰角、下降時為俯角__。

2 在何處達速度最小值? __最高點__，其最小速度為? $\underline{v_0 \cos\vartheta}$

1.某次救火行動中，消防車的水龍頭以24.5 m/s的初速將水柱噴出，水柱噴到高度14.7 m的樓頂起火點，其最高離地19.6 m，則消防車距火災點之水平距離若干？（g=9.8m/s^2）



[解析]



$$y:(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\left[v^2=v_0^2+2a\Delta x\right]0={v_{y0}}^2-2gH\rightarrow {v_{y0}}^2=2\times9.8\times19.6$$

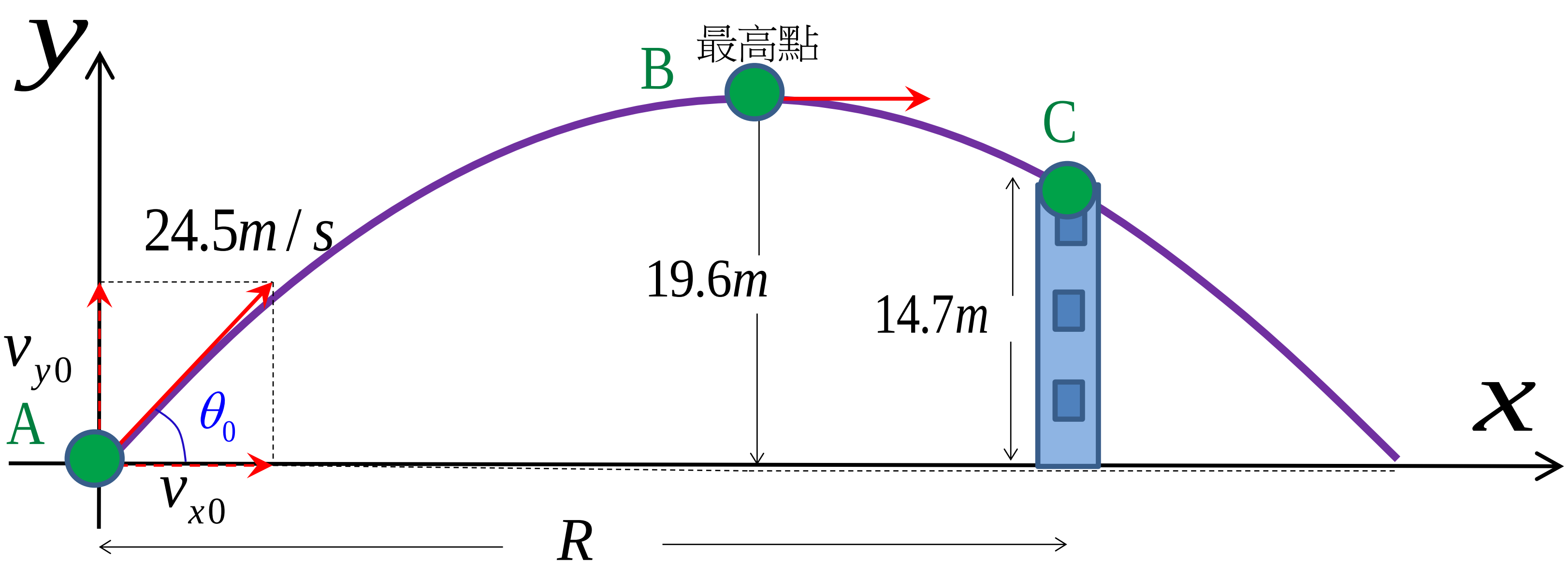
$$\therefore v_{y0}=19.6[m/s]$$

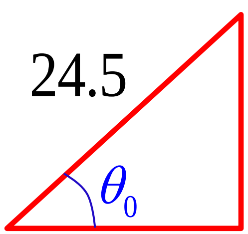
$$y:(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{C})\left[\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right]\ 14.7=19.6t-\frac{1}{2}\times9.8\times t^2$$

$$t^2-4t+3=0\quad\therefore t=3\text{或}1[s](3s\text{合理})$$

第62頁

[解析]





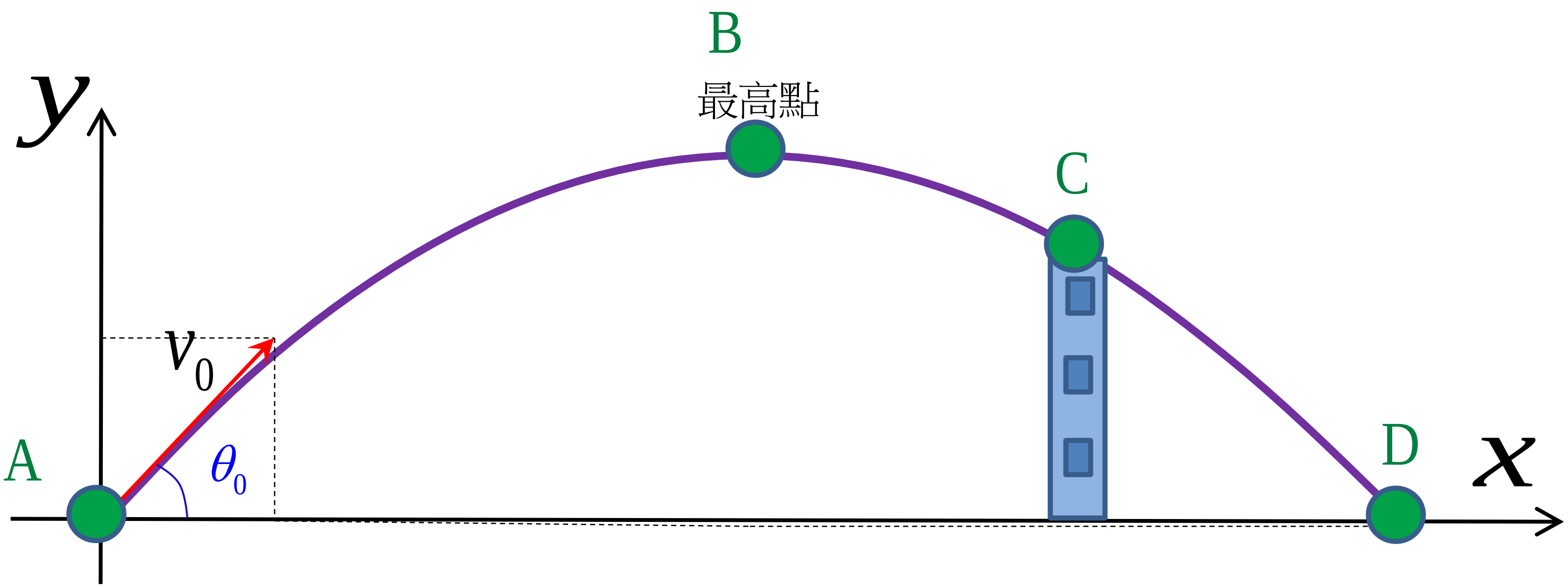
$v_{y0} = 19.6$

$\sin\theta_0 = \dfrac{19.6}{24.5} = \dfrac{4}{5} \quad \therefore \theta_0 = 53°$

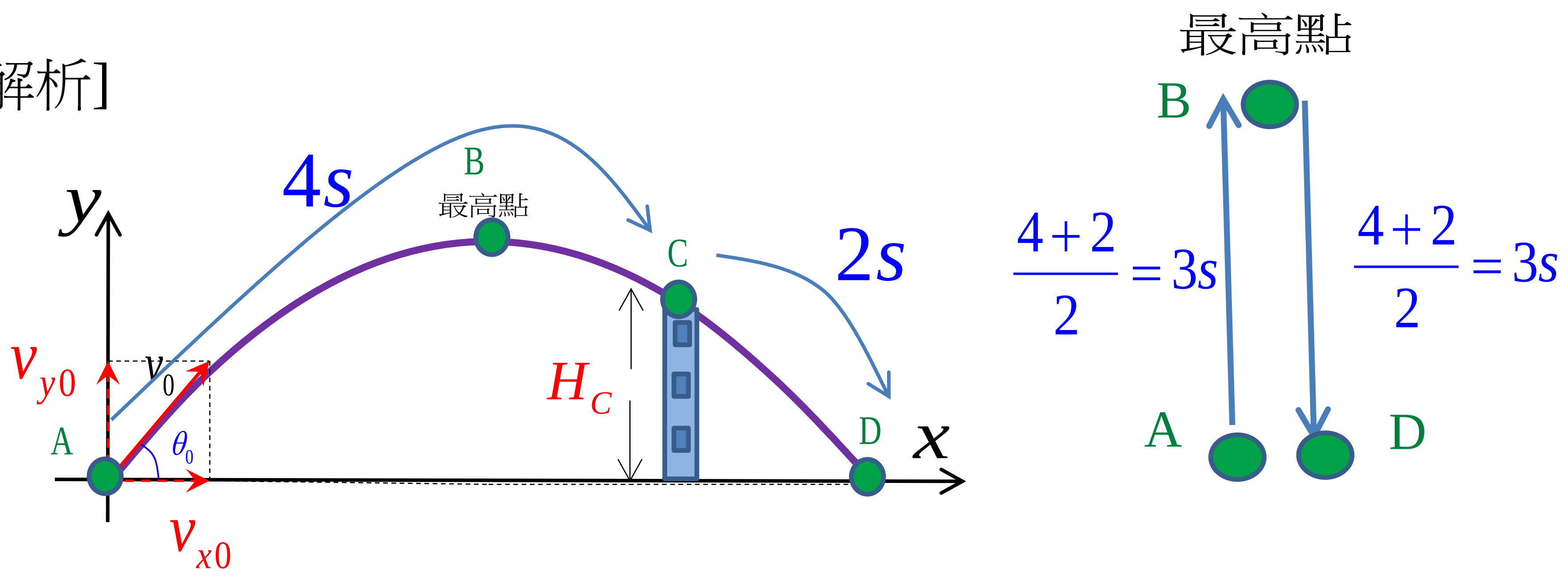
$\therefore v_{x0} = 24.5\cos 53° = 24.5 \times \dfrac{3}{5} = 14.7[m/s]$

$x:(A \rightarrow C)[\Delta x = vt] \quad R = v_{x0}t = 14.7 \times 3 = 44.1[m]$

2. 自地面斜向拋射一球，經4秒經過塔頂，再經2秒落回地面，則塔高多少？*($g=10\ m/s^2$)*



[解析]

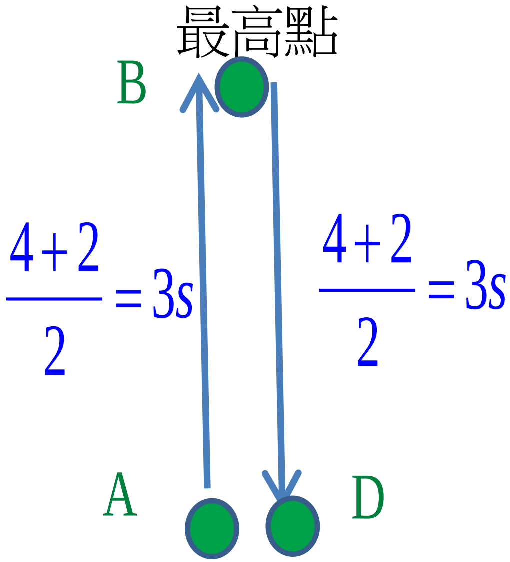


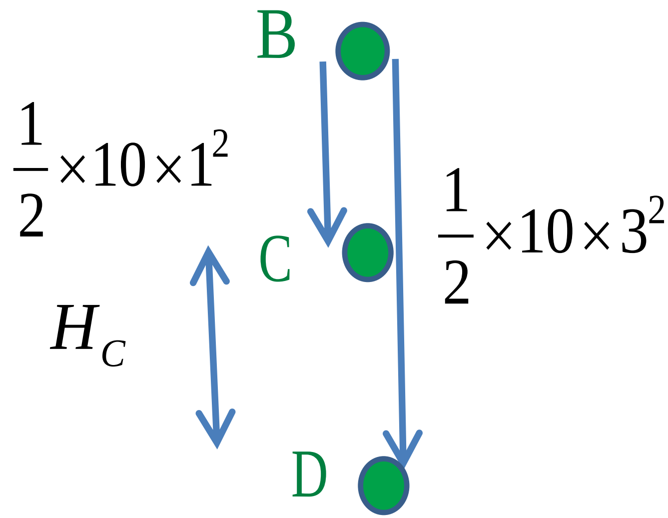
$$(A \to B)\left[v = v_0 + at\right] \quad 0 = v_{y0} - gt \to v_{y0} = gt = 10 \times 3 = 30\left[m/s\right]$$

$$(A \to C)\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] \quad H_C = 30 \times 4 - \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 40\left[m\right]$$

第62頁

[另解]



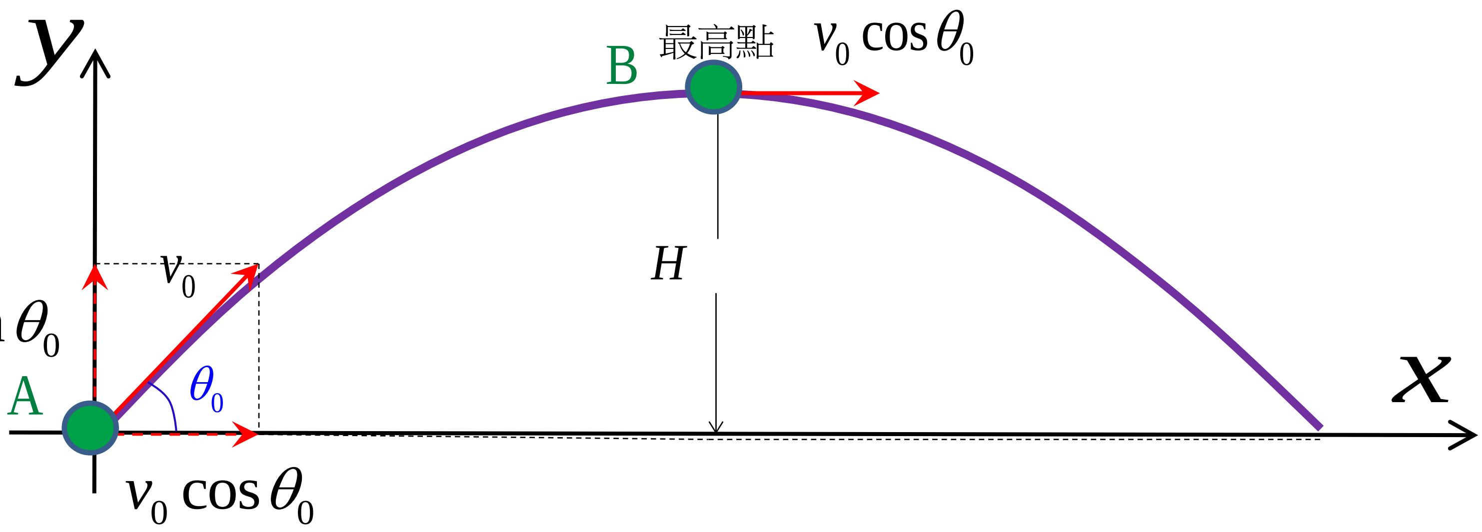


利用對稱性

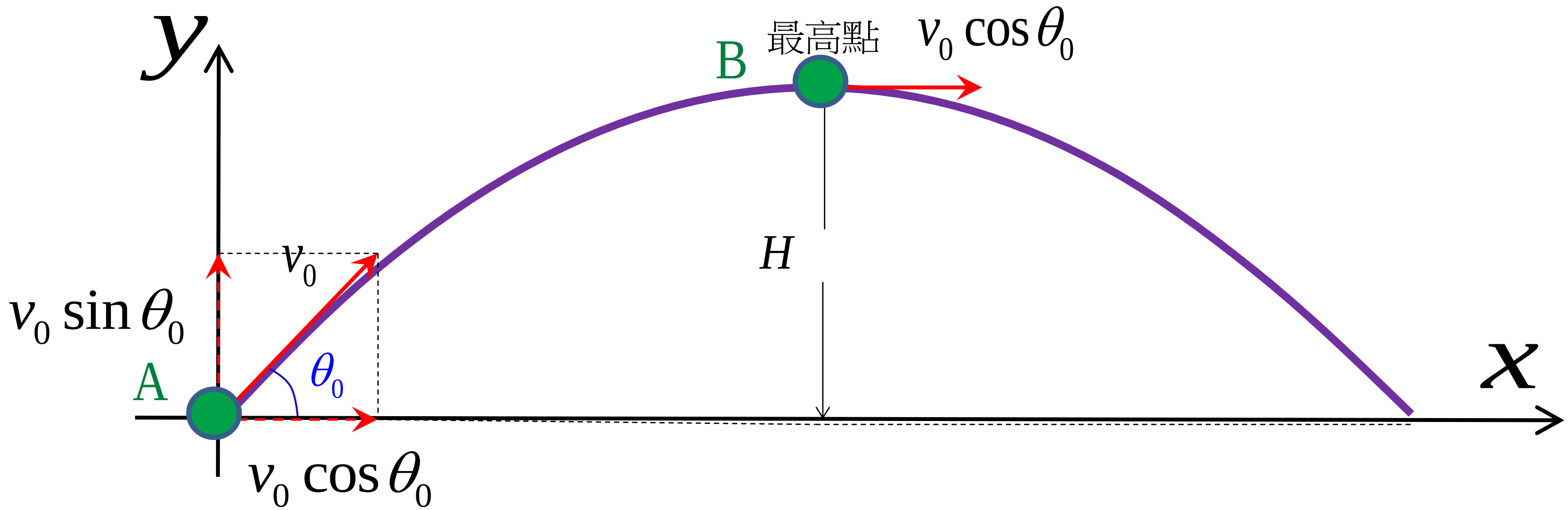
自最高點B起歷時1秒到塔頂C 歷時3秒到地面D

$$y:H_C=\frac{1}{2}\times10\times3^2-\frac{1}{2}\times10\times1^2=40[m]$$

*1.*在水平地面以v_0初速斜拋一物，於軌跡上一點，其瞬時速度最小值為$v_0/3$，重力加速度g，則此物可達之最大高度為？

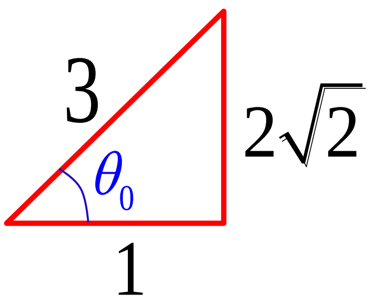


第63頁



[解析]

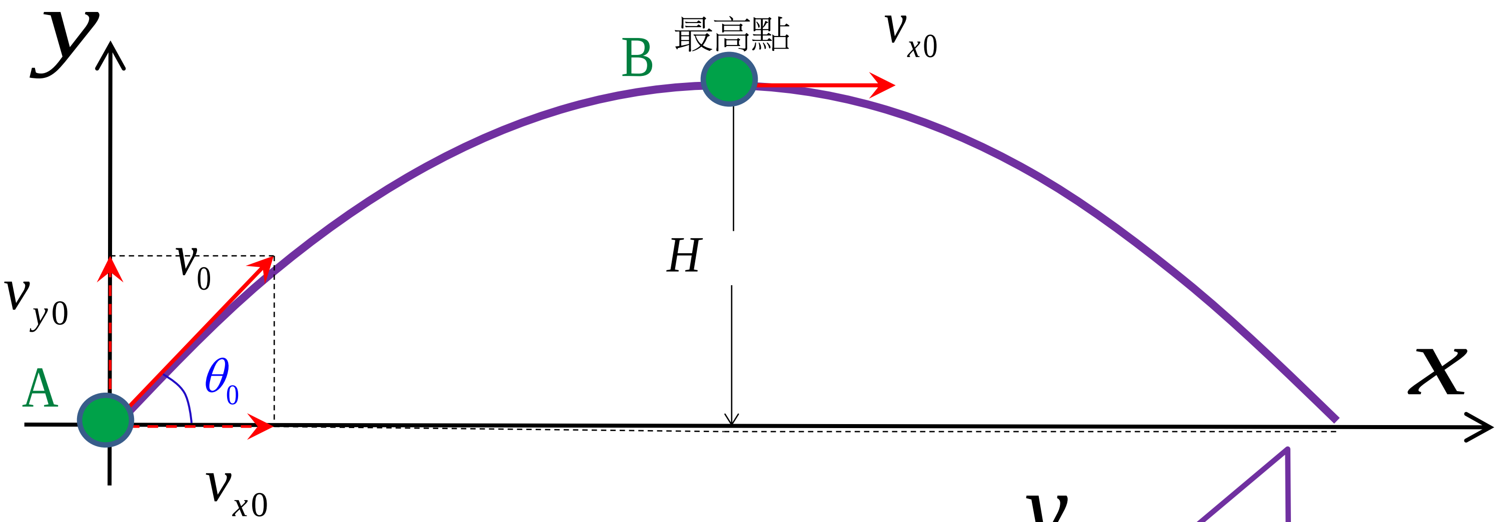
最高點B $\quad v_0 cos\theta_0 = \dfrac{v_0}{3} \therefore cos\theta_0 = \dfrac{1}{3}$

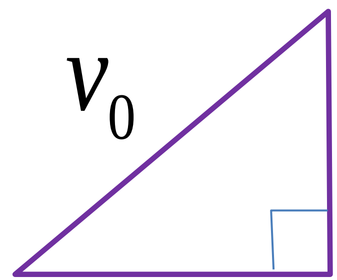


$\sin\theta_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$y:(\mathrm{A} \to \mathrm{B})H = \frac{v_0{}^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{4v_0{}^2}{9g}$$

[另解]





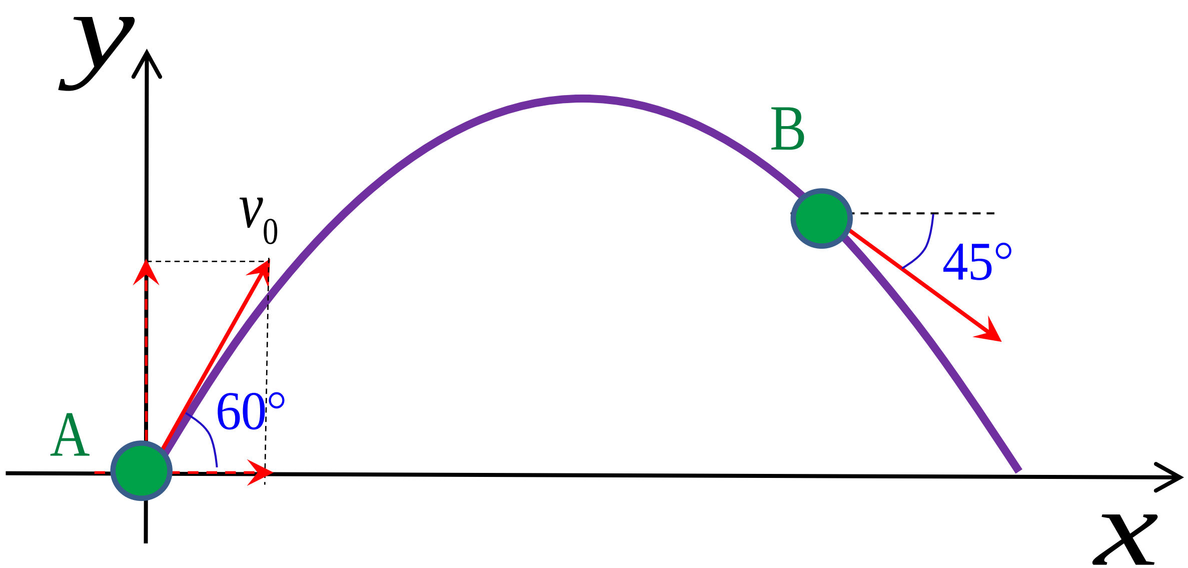
$$v_{y0}=\frac{2\sqrt{2}}{3}v_0$$

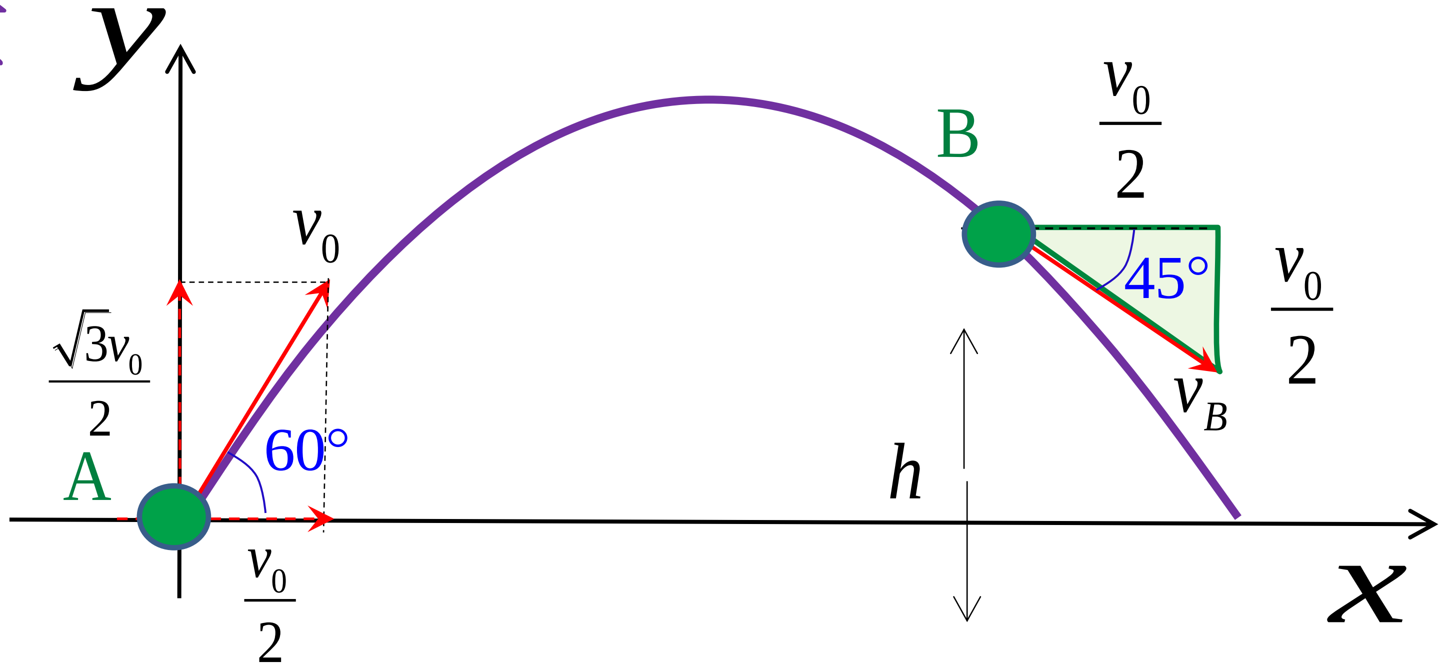
$$v_{x0}=\frac{v_0}{3}$$

最高點B　$v_{x0}=\dfrac{v_0}{3}\rightarrow v_{y0}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}v_0$

$$y:(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\left[v^2=v_0^2+2a\Delta x\right]H=\frac{v_{y0}^{\;2}}{2g}=\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}v_0\right)^2}{2g}=\frac{4v_0^{\;2}}{9g}$$

*2.*一物由水平地面上以初速v_0，仰角*60°* 作斜向拋射，重力加速度g，當物體運動方向與水平成*45°* 俯角時，速度及距地面之高度各為？歷時多久？





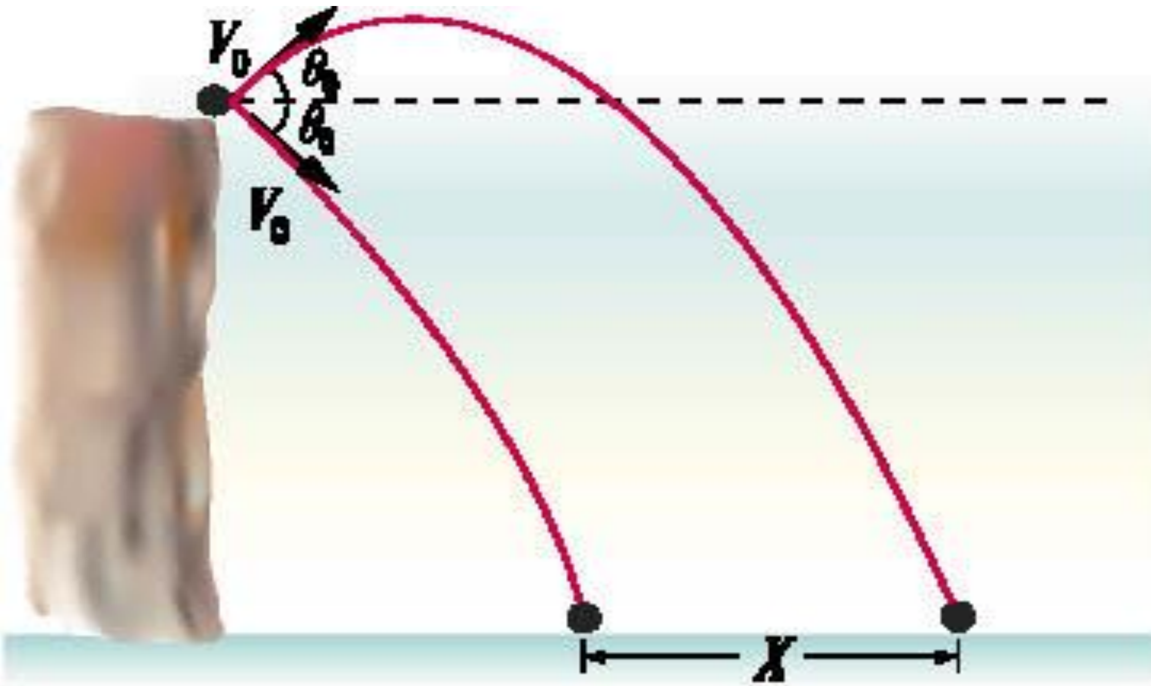
[解析]

$$v_B = \sqrt{2} \times \frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{2}v_0}{2}$$

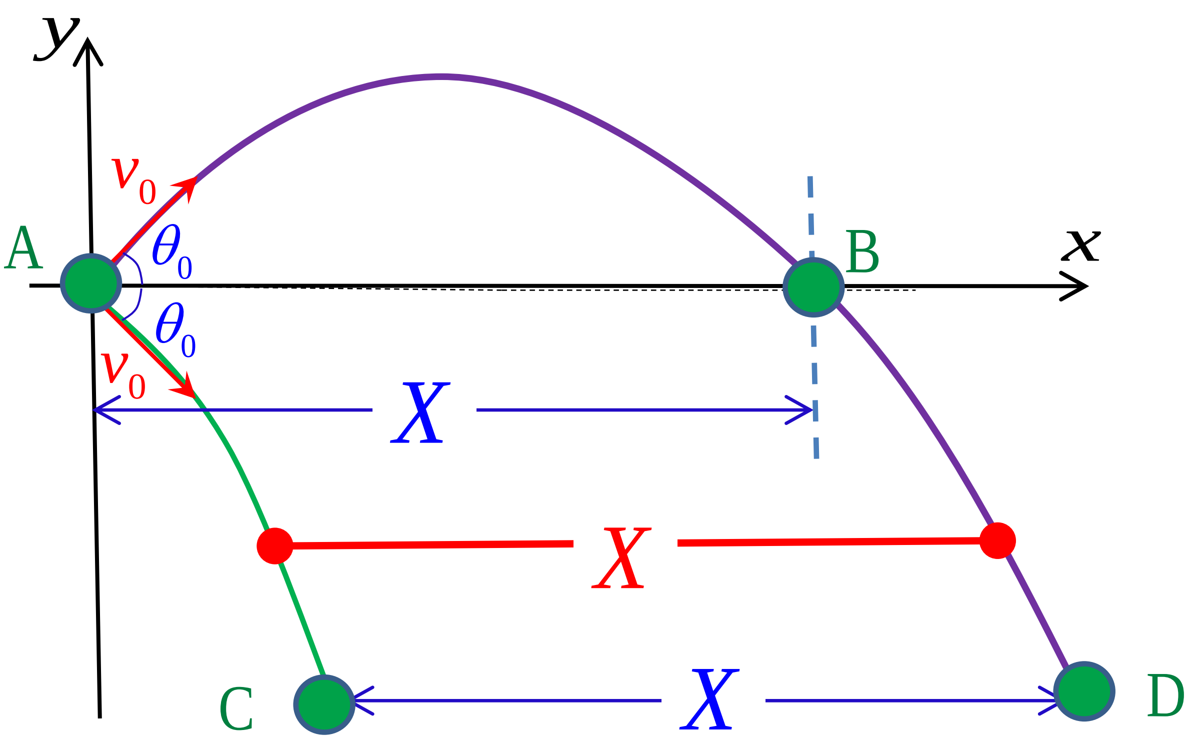
$$y:(A \to B)\left[v = v_0 + at\right]\ -\frac{v_0}{2} = \frac{\sqrt{3}v_0}{2} - gt \quad \therefore t = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)v_0}{2g}$$

$$y:(A \to B)\left[v^2 = {v_0}^2 + 2a\Delta x\right]\ \left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}v_0}{2}\right)^2 - 2gh \quad \therefore h = \frac{{v_0}^2}{4g}$$

1. 如圖所示，有兩個球從同一高處以相同的初速度v_0分別拋出，但其中一球的拋出角度為斜向上的仰角ϑ_o，另一球則為斜向下的俯角ϑ_o，試求兩球落地處的水平距離為 X＝？



[解析]



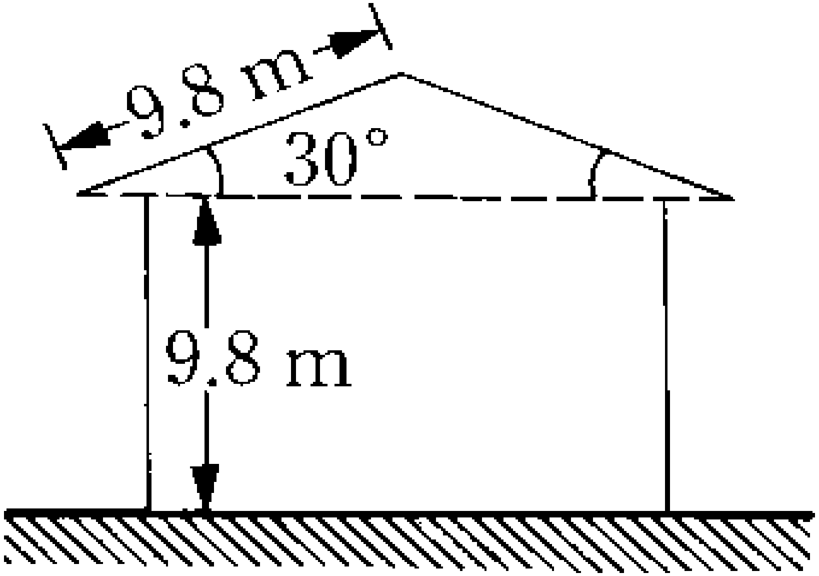
由對稱性知　$A \to C$與$B \to D$相同

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD} \to X = \overline{AB} = \frac{v_0^{\ 2} \sin 2\theta_0}{g}(\text{水平射程公式})$$

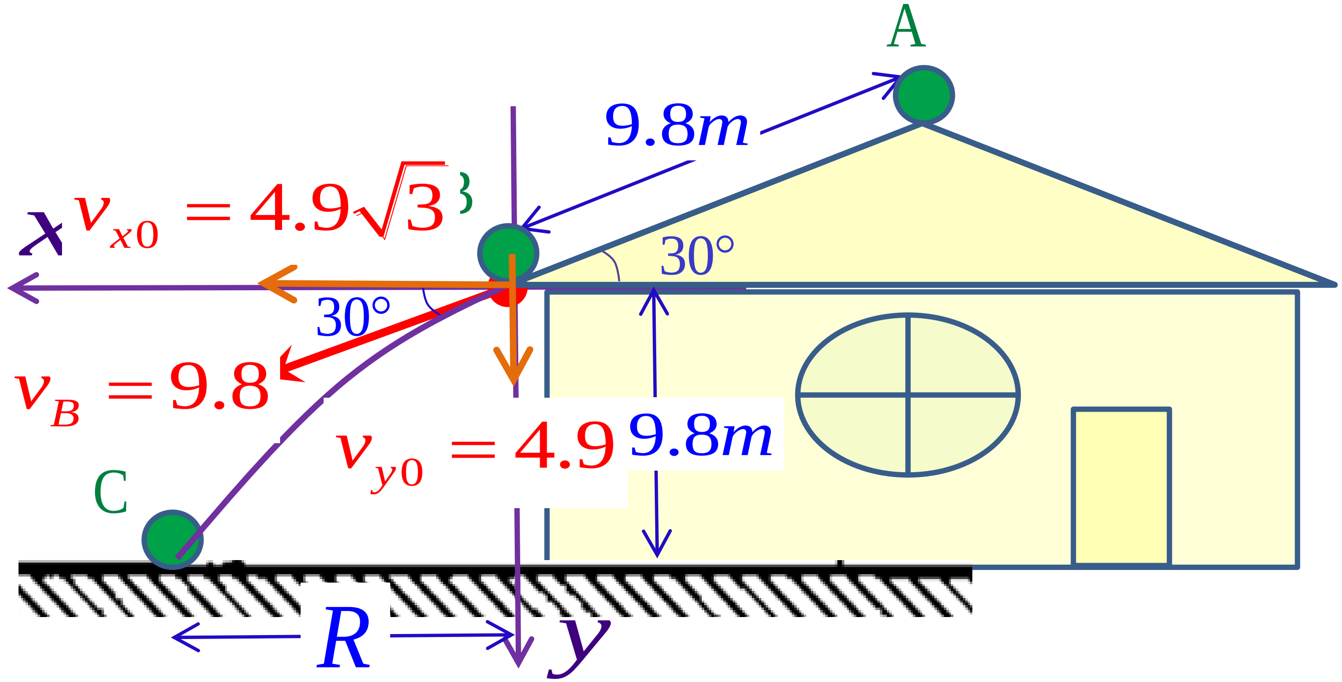
2. 一小石子自靜止由光滑屋頂頂端滑下。屋頂長*9.8 m* (如圖)，並與水平成*30*°角，屋簷離地*9.8 m*，則

(1)小石子從屋頂至落到地面時間需時？

(2)小石子從屋簷至落到地面水平距離？



[解析]



屋簷上($A \to B$)為光滑斜面等加速度直線運動

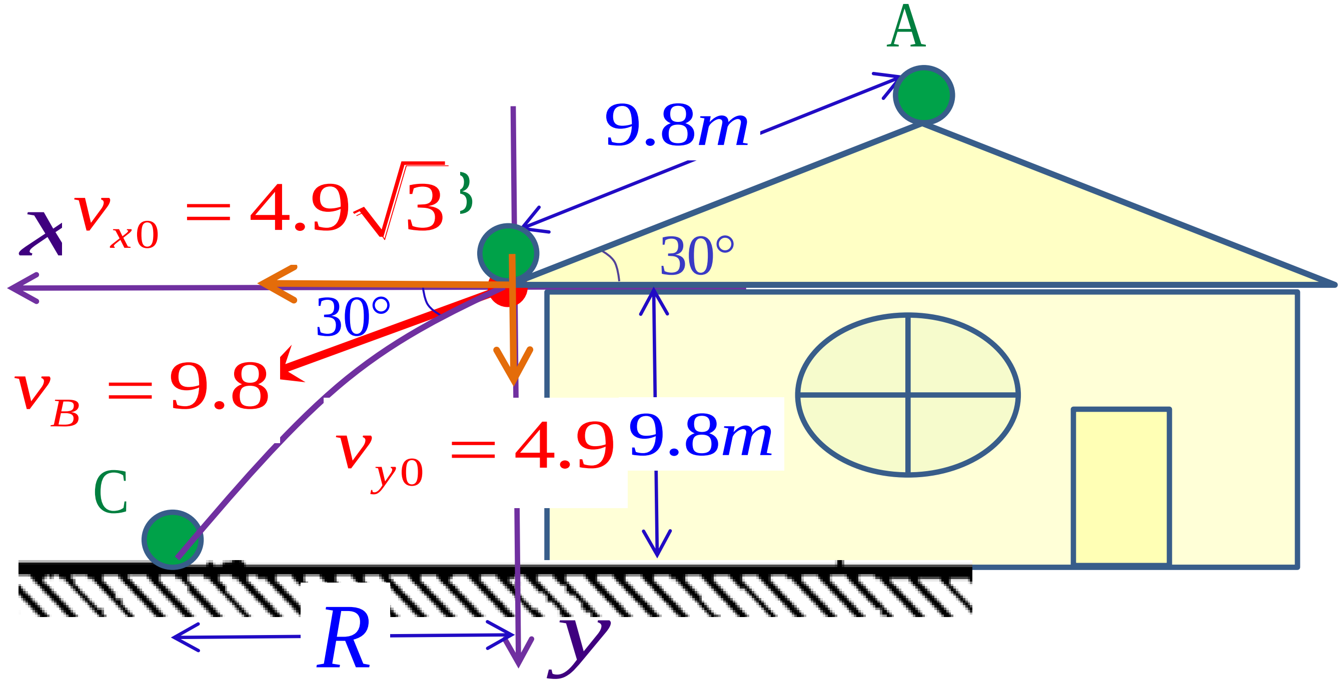
$$a = g\sin 30° = 4.9m/s^2$$

令歷時 t_1

$$\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] \quad 9.8 = \frac{1}{2} \times 4.9 \times t_1^{\ 2} \ \therefore t_1 = 2[s]$$

$$[v = v_0 + at] \ v_B = 4.9 \times t_1 = 9.8[m/s]$$

[解析]



屋簷下$(B\rightarrow C)$為斜向下拋體運動 拋射角30°

令歷時 t_2

$$y:\left[\Delta x=v_0t+\frac{1}{2}at^2\right]\quad 9.8=9.8\sin 30°\times t_2+\frac{1}{2}\times 9.8\times t_2{}^2$$

$t_2{}^2+t_2-2=0\quad (t_2+2)(t_2-1)=0\ \therefore t_1=1$或$-2[s]$(1秒合理)

$\therefore$自屋頂到落地歷時$t_1+t_2=2+1=3[s]$

$$x:[\Delta x=v_xt]\ R=9.8\cos 30°\times t_2=4.9\sqrt{3}[m]$$

5. [補充] 斜向拋射特殊資料討論 : **拋出高度與著地高度相同時才適用**

(1) 當v_0一定，$\theta\nearrow \rightarrow H\nearrow$，當 $\theta_0=90^\circ$， 即鉛直上拋運動

，則 $H = H_{\max} = \dfrac{v_o^{\ 2}}{2g}$

$$[\text{說明}]\,H = \frac{v_o^{\ 2}\sin^2\theta_0}{2g}$$

$$\text{當}\sin\theta_0 = 1\text{時}, H = H_{\max} = \frac{v_o^{\ 2}}{2g}\text{為最大高度}$$

$$\text{此時}\,\theta_0 = 90^\circ$$

(2) a. 若v_0一定，當 $\theta_0=45^\circ$ 時，則 $R=R_{max}=\dfrac{v_o^2}{g}$

b. 當v_0一定，互餘的拋射角度斜向拋出，水平射程相同。

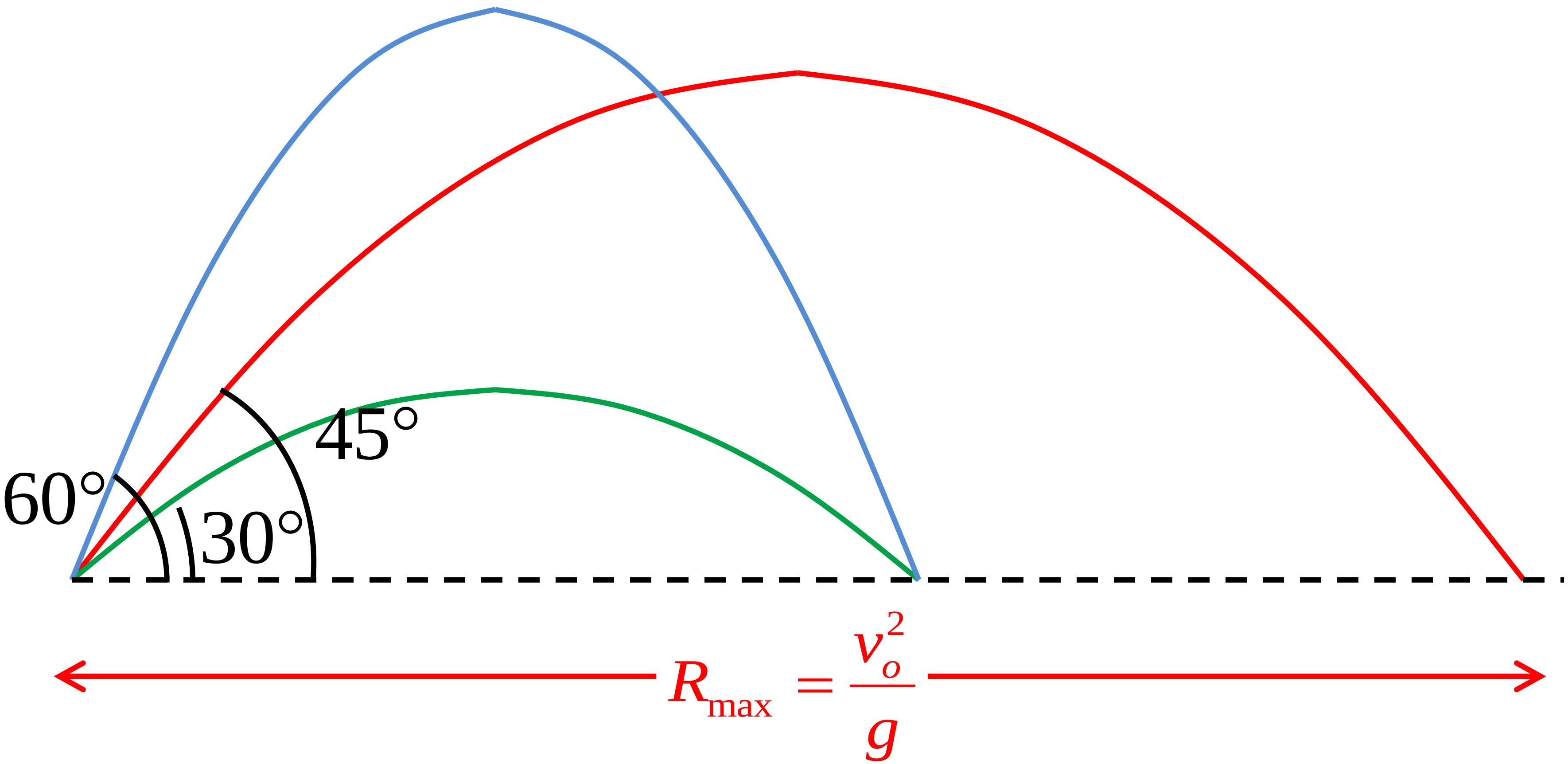
$$[\text{說明}]R=\frac{2v_o^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}=\frac{v_o^2\sin 2\theta_0}{g}$$

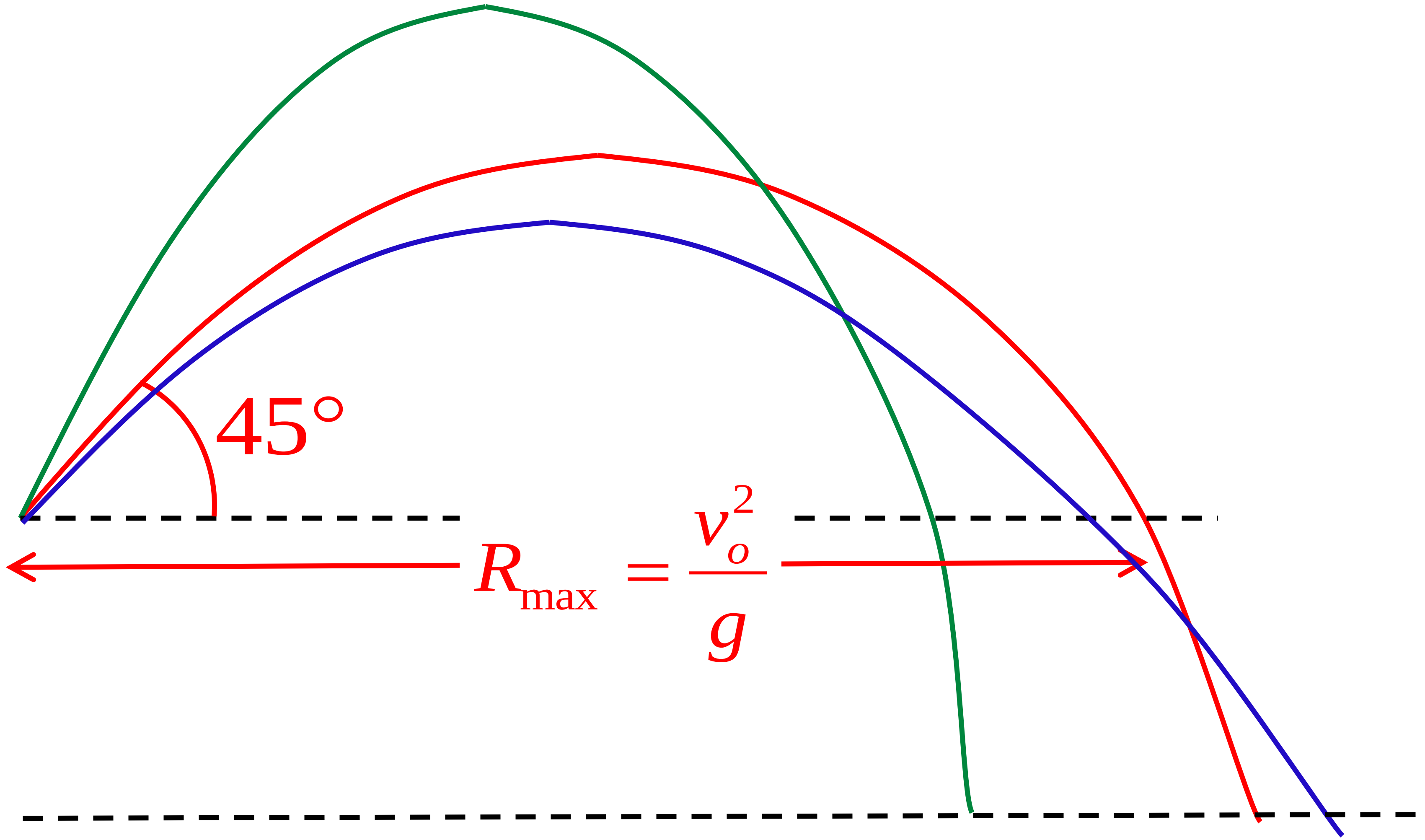
(a)當$\sin 2\theta_0=1$時，$R=R_{max}=\dfrac{v_o^2}{g}$為最大水平射程

，此時$2\theta_0=90^\circ\rightarrow\theta_0=45^\circ$

(b)當$R_1=R_2$時，則$\sin 2\theta_1=\sin 2\theta_2$

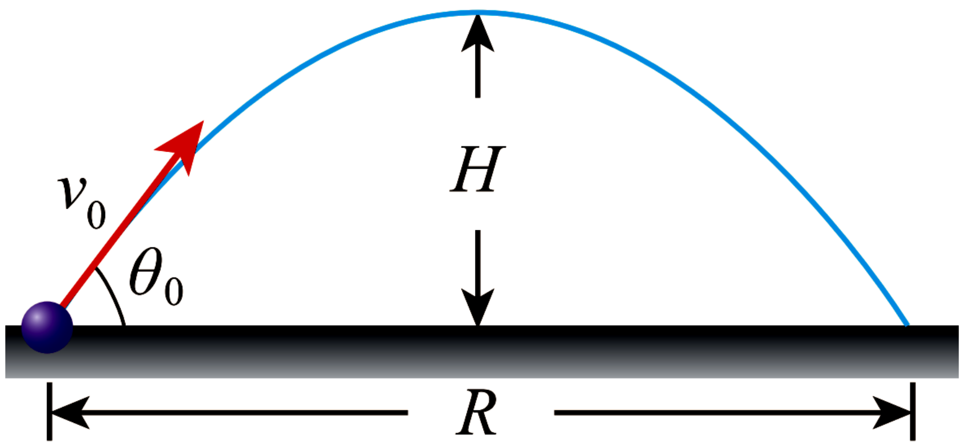
，此時$2\theta_1+2\theta_2=180^\circ\rightarrow\theta_1+\theta_2=90^\circ$


60°
30°
45°
$R_{max} = \frac{v_o^2}{g}$

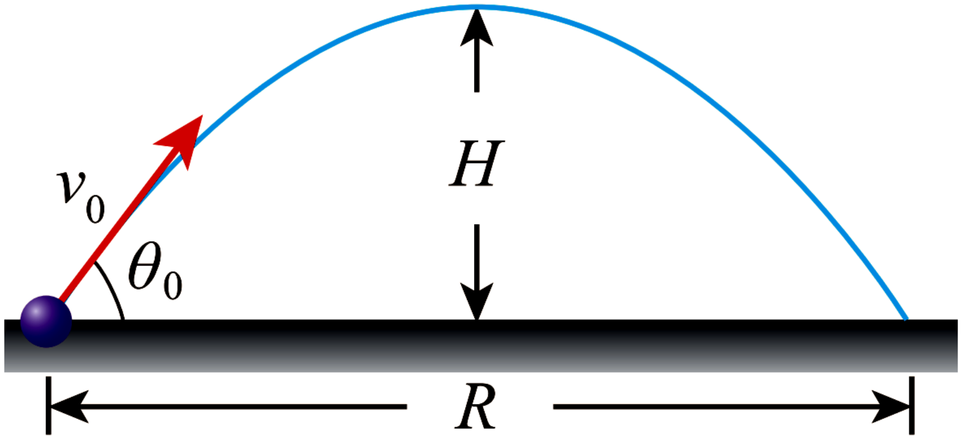

45°
$R_{\text{max}} = \frac{v_o^2}{g}$

5. [補充] 斜向拋射特殊資料討論：**拋出高度與著地高度相同時才適用**

(3) 最大高度與水平射程關係： $$\frac{H}{R}=\frac{1}{4}\tan\theta_0$$



[說明]



因 $H=\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\theta_0}{2g}$ ……①

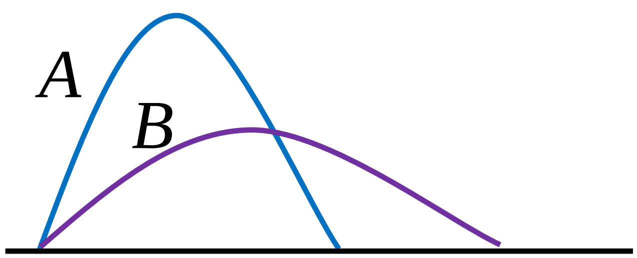
且 $R=\dfrac{v_0^{\,2}\sin 2\theta_0}{g}=\dfrac{v_0^{\,2}\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$ ……②

$$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{H}{R}=\frac{\dfrac{v_0^{\,2}\sin^2\theta_0}{2g}}{\dfrac{v_0^{\,2}\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}}=\frac{1}{4}\times\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}=\frac{1}{4}\tan\theta_0$$

5. [補充] 斜向拋射特殊資料討論：**拋出高度與著地高度相同時才適用**

(4)從圖形看斜拋運動各物理量的大小關係：

$$\begin{cases} y: H \rightarrow \text{知 } t\text{ , } v_{y0}\left(=v_0 \sin\theta\right)\text{大小關係} \\ x: R \rightarrow \text{結合}\left[v_x = \dfrac{R}{t}\right] \text{ 知 } v_x\left(=v_0 \cos\theta\right)\text{大小關係} \end{cases}$$

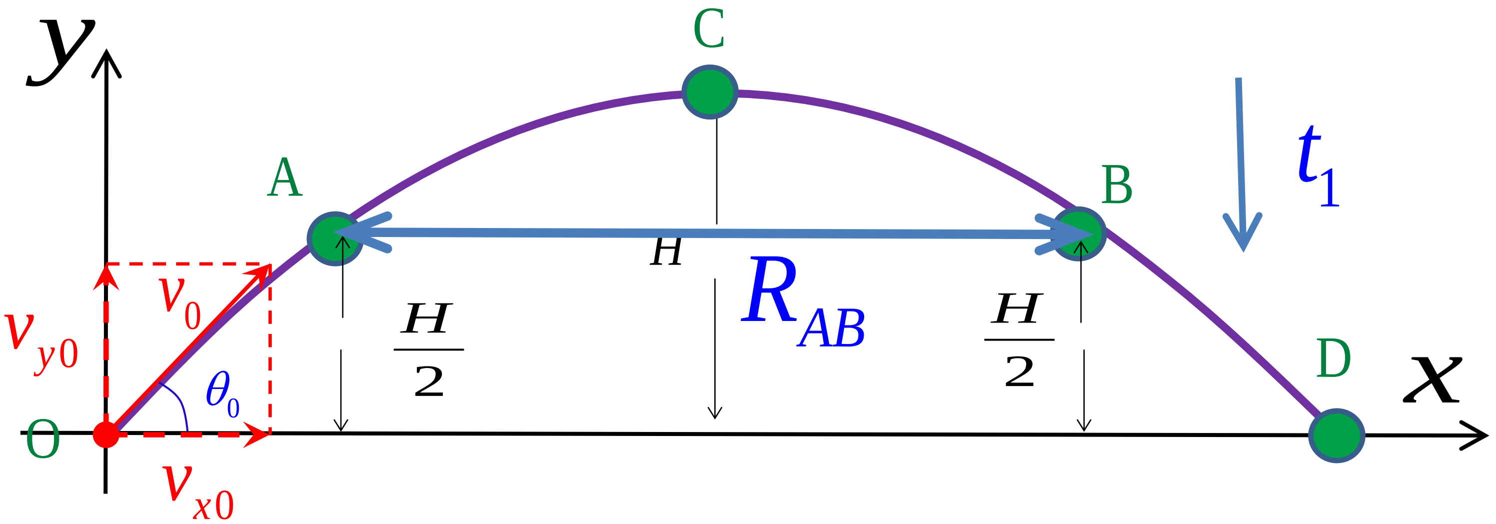


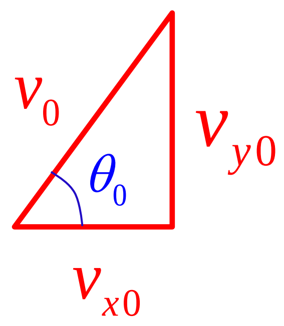
$\because H_A > H_B$

$\therefore v_{0A} \sin\theta_{0A} > v_{0B} \sin\theta_{0B} \quad T_A > T_B$

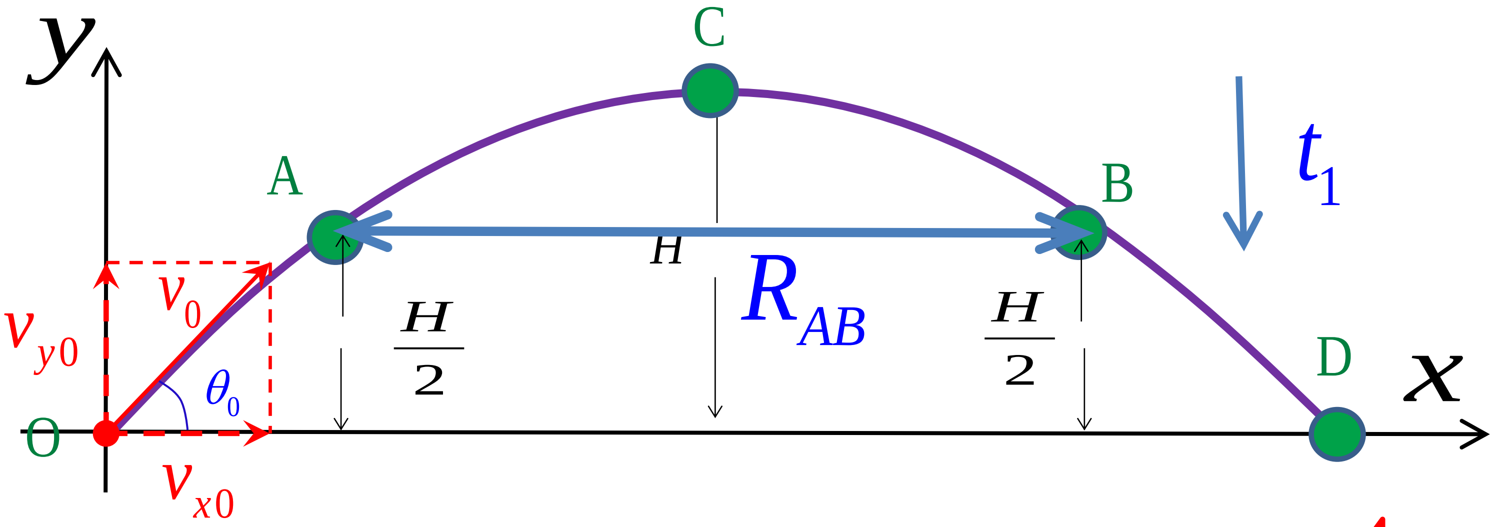
（最大高度越高，鉛直初速度越大，全程歷時越長）

1. 質點以仰角θ_0斜向拋出，其軌跡之最大鉛直高度為H，則自高$H/2$之點飛至高$H/2$之另一點所行之水平位移為若干？

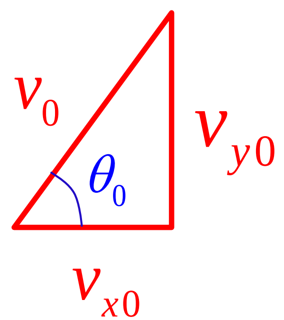




[解析]

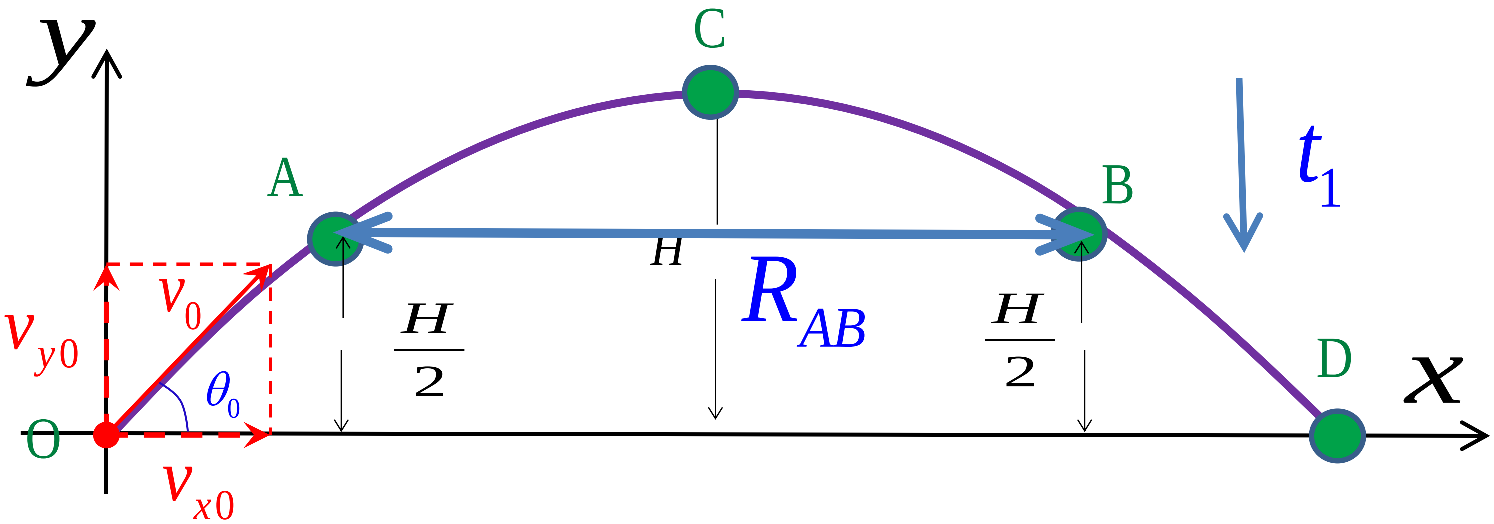


$$(O \to C)$$



$$y:\left[v^2 = v_0{}^2 + 2a\Delta x\right] \quad 0 = v_{y0}{}^2 - 2gH \therefore v_{y0} = \sqrt{2gH}$$

$$\because \frac{v_{x0}}{v_{y0}} = \cot\theta_0 \qquad \therefore v_{x0} = v_{y0}\cot\theta_0 = \sqrt{2gH}\cot\theta_0$$



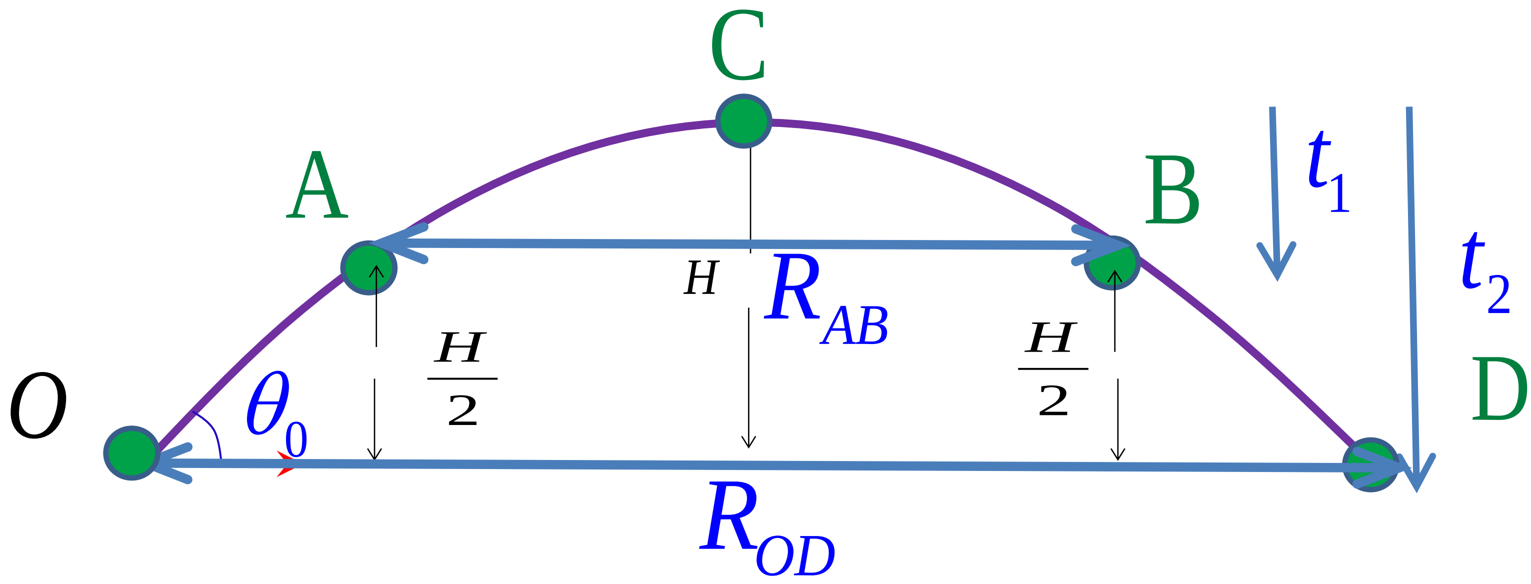
$(\mathrm{C} \rightarrow \mathrm{B})$令歷時 t_1

$$y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\right] \quad \frac{H}{2} = \frac{1}{2} g t_1^2 \therefore t_1 = \sqrt{\frac{H}{g}}$$

$(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})$

$$x:\left[\Delta x = v_0 t\right] R_{AB} = v_{x0} \times 2t_1 = \sqrt{2gH} \cot\theta_0 \times 2\sqrt{\frac{H}{g}} = 2\sqrt{2} H \cot\theta_0$$

[另解]

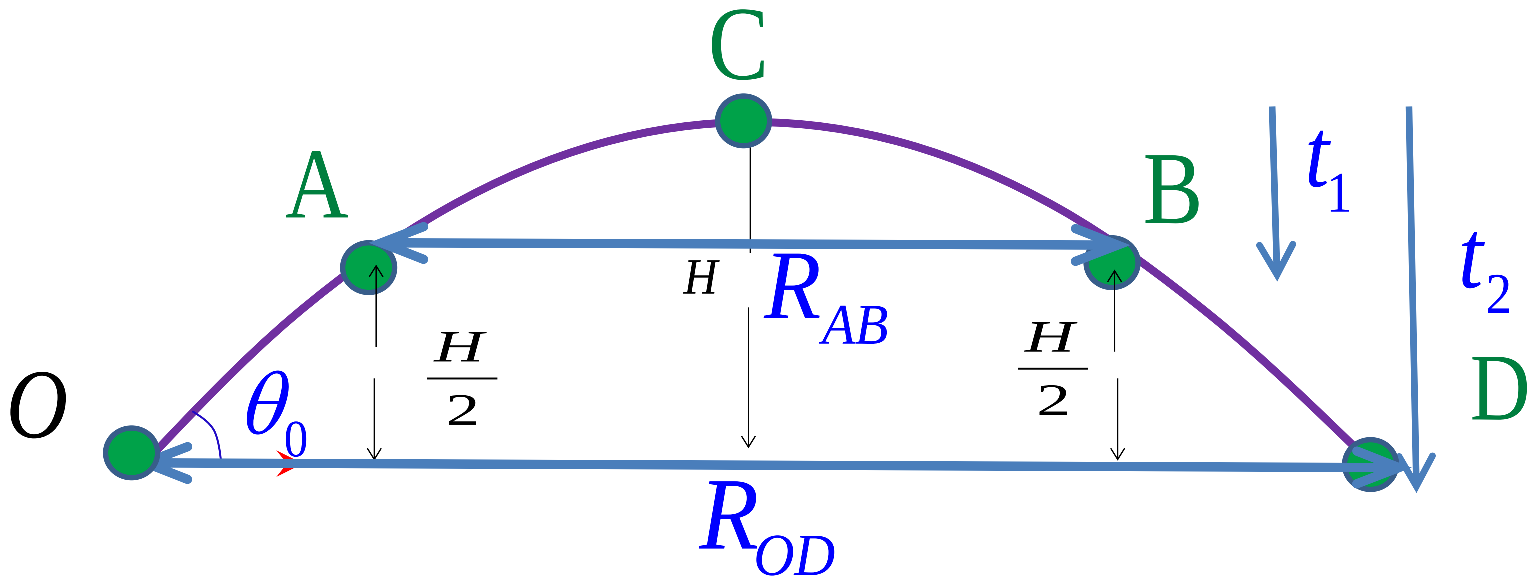


$(B \to C)$令歷時 t_1

$$y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] \quad \frac{H}{2} = \frac{1}{2}g{t_1}^2 \therefore t_1 = \sqrt{\frac{H}{g}}$$

$(B \to D)$令歷時 t_2

$$y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] \quad H = \frac{1}{2}g{t_2}^2 \therefore t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$



$$(O \to D)\frac{H}{R_{OD}} = \frac{1}{4}\tan\theta_0 \to R_{OD} = \frac{4H}{\tan\theta_0}$$

$\because$ 水平速度不變 $\quad \therefore R_{AB} : R_{OD} = t_1 : t_2 = 1 : \sqrt{2}$

$$\to R_{AB} = \frac{R_{OD}}{\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{4H}{\tan\theta_0}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}H}{\tan\theta_0} = 2\sqrt{2}H\cot\theta_0$$

2. 以一定之初速作兩次斜向拋射，其最大高度分別為h_1及h_2，若兩次水平射程相等，則此射程為？

[解析]

當v_0一定，互餘的拋射角度斜向拋出，水平射程相同。

$$\theta_1+\theta_2=90^\circ$$

第65頁

$$\theta_1 + \theta_2 = 90°$$

[解析]

$$h_1 = \frac{v_o{}^2 \sin^2 \theta_1}{2g} \rightarrow \sin^2 \theta_1 = \frac{2gh_1}{v_o{}^2}$$

$$h_2 = \frac{v_o{}^2 \sin^2 \theta_2}{2g} \rightarrow \sin^2 \theta_2 = \frac{2gh_2}{v_o{}^2}$$

$$R = \frac{v_0{}^2 \sin 2\theta_1}{g} = \frac{v_0{}^2 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{g} = \frac{v_0{}^2 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{g}$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{v_0{}^4 4 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{g^2} = \frac{v_0{}^4 4 \times \frac{2gh_1}{v_o{}^2} \times \frac{2gh_2}{v_o{}^2}}{g^2} = 16 h_1 h_2$$

$$\therefore R = 4\sqrt{h_1 h_2}$$

[另解]

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{R} = \dfrac{1}{4}\tan\theta_1 \ldots\ldots(1) \\ \dfrac{h_2}{R} = \dfrac{1}{4}\tan\theta_2 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\because \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \rightarrow \tan\theta_1 \times \tan\theta_2 = 1$$

由$(1)\times(2)$ $$\frac{h_1}{R} \times \frac{h_2}{R} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \tan\theta_1 \times \tan\theta_2$$

$$\rightarrow R = 4\sqrt{h_1 h_2}$$

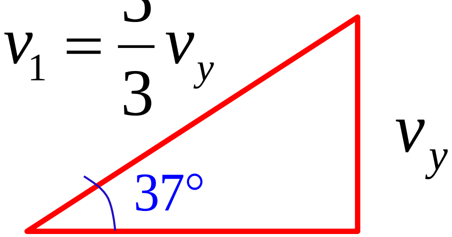
1. 不計空氣阻力，在水平面分別以仰角37°與53°拋出，若鉛直方向的初速度相等，有關二質點運動的敘述何者正確？

(A)二質點的初速比為4：3。

(B)水平射程相等 (C)最大高度相等 (D)在空中飛行時間

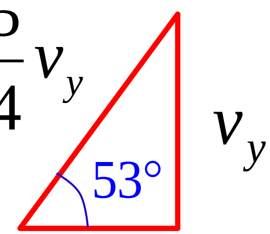
(E)若二質點同時同地拋出，二質點在空中相遇

[解析] $v_1 = \frac{5}{3} v_y$



$v_{x1} = \frac{4}{3} v_y$

$v_2 = \frac{5}{4} v_y$



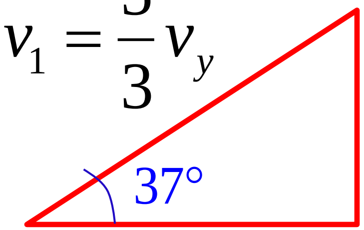
$v_{x2} = \frac{3}{4} v_y$

$$(\mathrm{A})\, v_1 : v_2 = \frac{5}{3} : \frac{5}{4} = 4:3$$

$$(B)\, R = \frac{v_0{}^2 2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} \propto v_{x0} \quad \therefore R_1 : R_2 = \frac{4}{3} : \frac{3}{4} = 16:9$$

[解析]

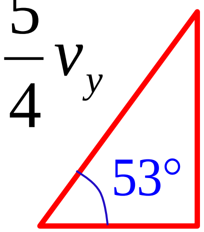
$$v_1 = \frac{5}{3} v_y$$



$$v_y$$

$$v_{x1} = \frac{4}{3} v_y$$

$$v_2 = \frac{5}{4} v_y$$



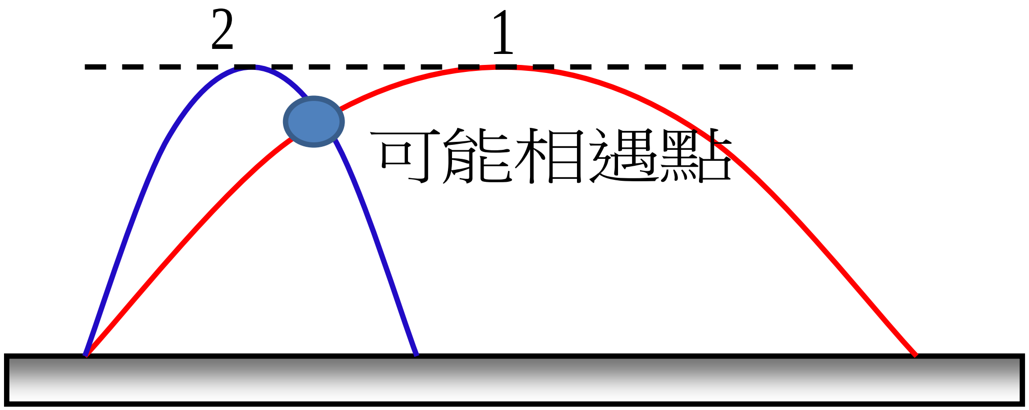
$$v_y$$

$$v_{x2} = \frac{3}{4} v_y$$

$$(C)\, H = \frac{v_o^{\ 2} \sin^2 \theta}{2g} = \frac{v_{yo}^{\ 2}}{2g} \qquad \therefore H_1 : H_2 = 1:1$$

$$(D)\, T = \frac{2 v_o \sin \theta}{g} = \frac{2 v_{yo}}{g} \qquad \therefore T_1 : T_2 = 1:1$$

[解析]



(E) 相遇＝相同時間且相同位置

∵鉛直初速相同　∴鉛直方向相同時間位置相同

由上圖知2號到可能相遇點歷時 > 1號

∴不能同時到可能相遇點　所以不相遇

2. 圖為*A*、*B*、*C*三球在空中運動的軌跡。已知三球係同時拋出，則

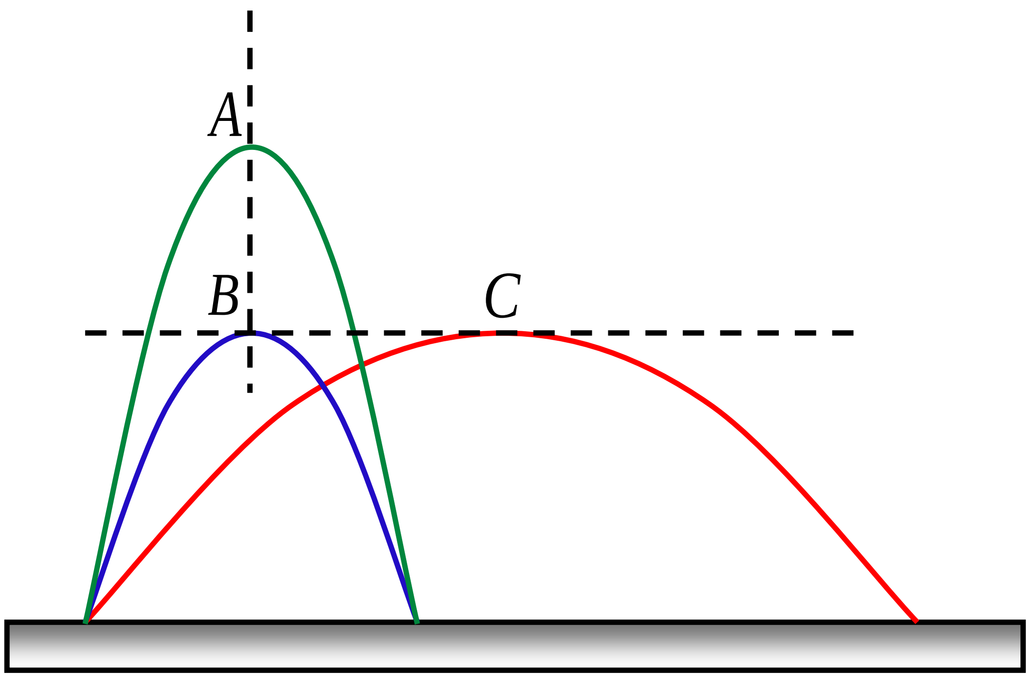
(A) *A*、*B*兩球的水平速度相同

(B)三球初速的鉛直分量以*A*為最大

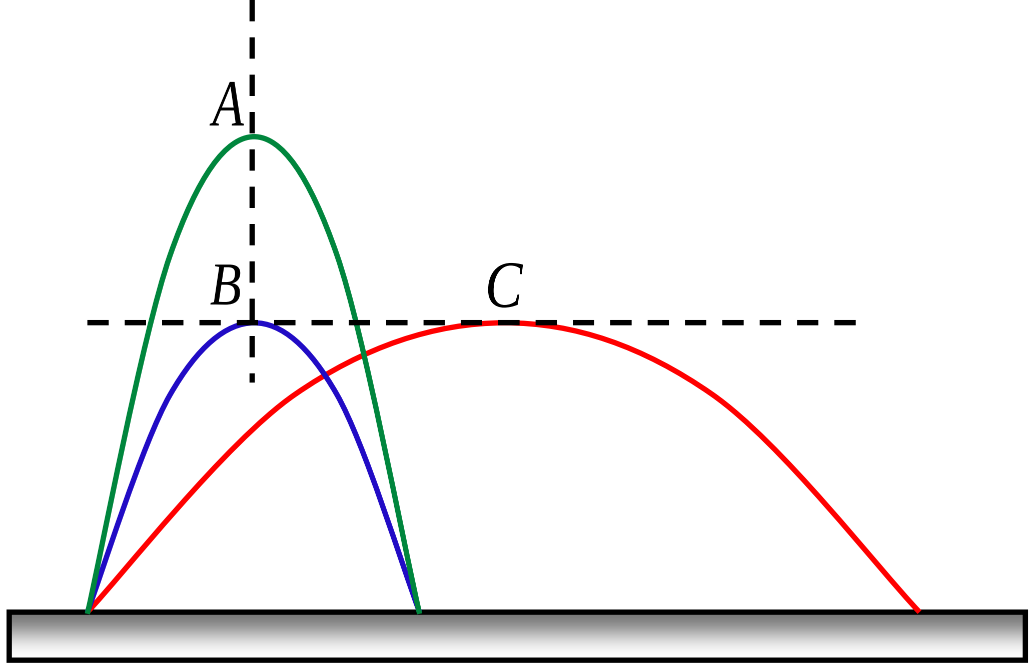
(C) *B*、*C*的飛行時間相同

(D) *A*球的飛行時間最長

(E) *A*、*C*可在空中相碰



[解析]



(ABCD)由圖知

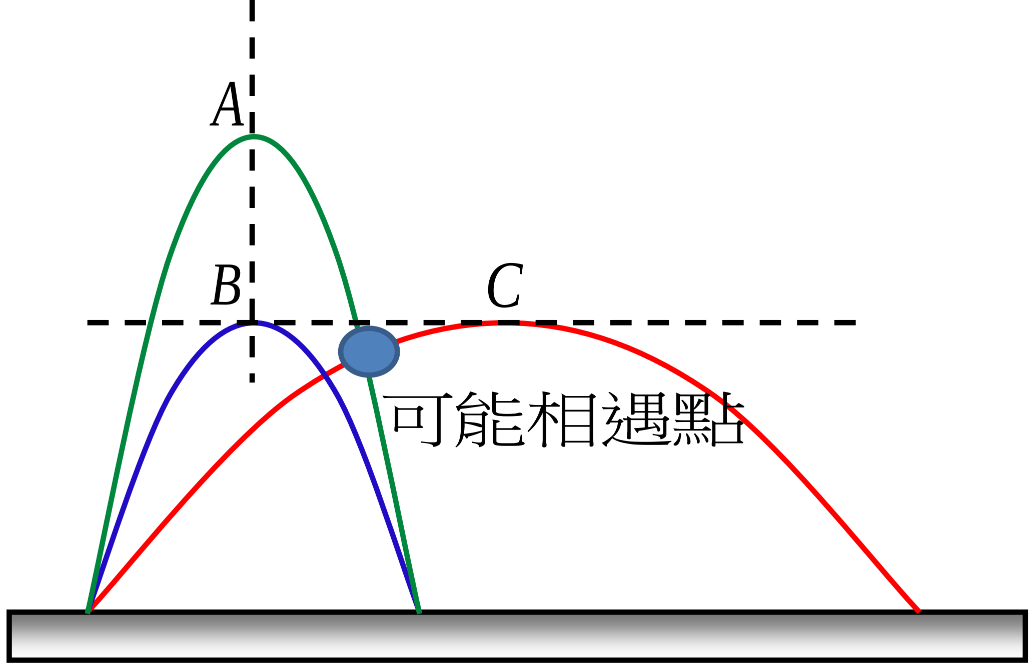
$y: H_A > H_B = H_C \rightarrow$ 知飛行歷時 $T_A > T_B = T_C$

初速鉛直分量 $v_{y0}(A) > v_{y0}(B) = v_{y0}(C$

$x: R_A = R_B < R_C \rightarrow$ 由 $\left[v_x = \dfrac{R}{T}\right] \rightarrow \because \dfrac{R_A}{T_A} < \dfrac{R_B}{T_B} < \dfrac{R_C}{T_C}$

知初速水平分量 $v_{x0}(A) < v_{x0}(B) < v_{x0}(C)$

[解析]



(E) 相遇＝相同時間且相同位置

∵鉛直初速相同　　∴鉛直方向相同時間位置相同

由上圖知A到可能相遇點歷時 >C的歷時

∴不能同時到可能相遇點　所以不相遇

1. 某物自地做斜向拋射，拋射點為原點之軌跡方程式為：
64 y＝48 x－5 x^2，(SI制，g=10 m/s²)，求
(*a*)拋射仰角 (b)初速 (c)飛行時間 (d)水平射程 (e)最大高度 。

[解析]

$$\boxed{y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2}$$

$$64y = 48x - 5x^2$$

$$\rightarrow y = \frac{48}{64}x - \frac{5}{64}x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{64}x^2 = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2$$

$$(a)\tan\theta = \frac{3}{4} \rightarrow \theta = 37°$$

$$(b)\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta} = \frac{5}{64} \rightarrow \frac{10}{2v_o^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{5}{64} \rightarrow v_0 = 10$$

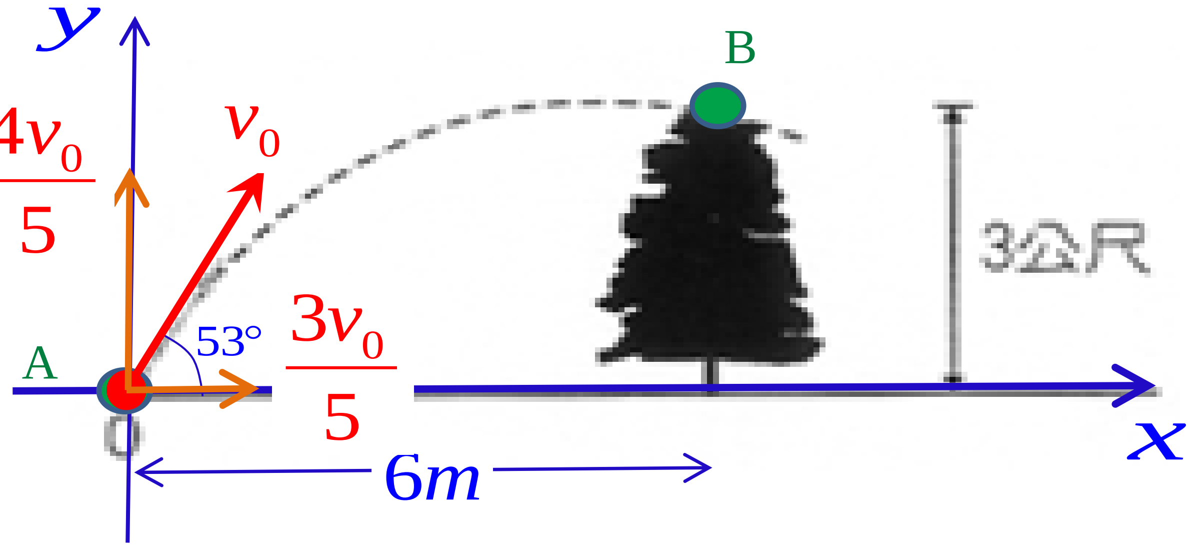
[解析]

$$(c)\,T=\frac{2v_o\sin\theta}{g}=\frac{2\times10\times\frac{3}{5}}{10}=\frac{6}{5}[s]$$

$$(d)\,R=\frac{{v_0}^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{10^2\times2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}{10}=\frac{48}{5}[m]$$

$$(e)\,H=\frac{{v_o}^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{10^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2}{2\times10}=\frac{9}{5}[m]$$

[解析]

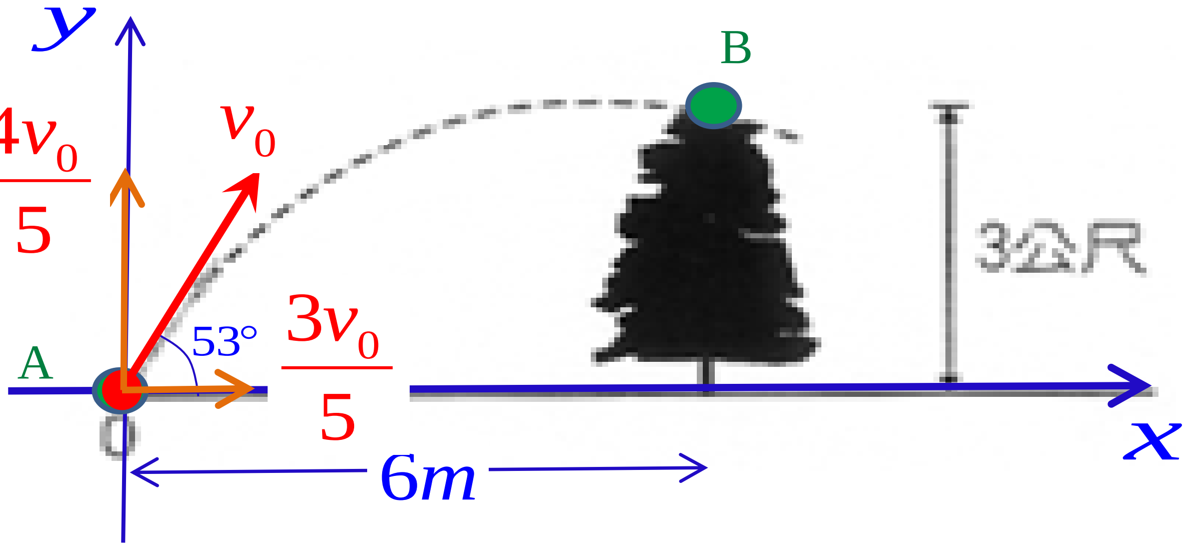


$$\begin{cases} x = v_o\cos 53^\circ \cdot t \rightarrow 6 = \frac{3}{5}v_o t \cdots\cdots① \\ y = v_0\sin 53^\circ \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 3 = \frac{4}{5}v_o t - \frac{1}{2}\times 10\times t^2 \cdots\cdots② \end{cases}$$

①代入②得 $3 = \frac{4}{5}\times 10 - \frac{1}{2}\times 10\times t^2 \therefore t = 1[s]$

代入①得 v_o=10$[m/s]$

[另解]



$$y=\tan\theta\cdot x-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2 \rightarrow y=\tan 53°\cdot x-\frac{10}{2v_o^2\cos^2 53°}x^2$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{帶入 } 3=\frac{4}{3}\times 6-\frac{10}{2v_o^2\left(\frac{3}{5}\right)^2}\times 6^2 \ \therefore\ v_o=10\left[m/s\right]$$

$$x:\left[\Delta x=vt\right]\ 6=6t\ \therefore t=1\left[s\right]$$

[另解]

[討論]

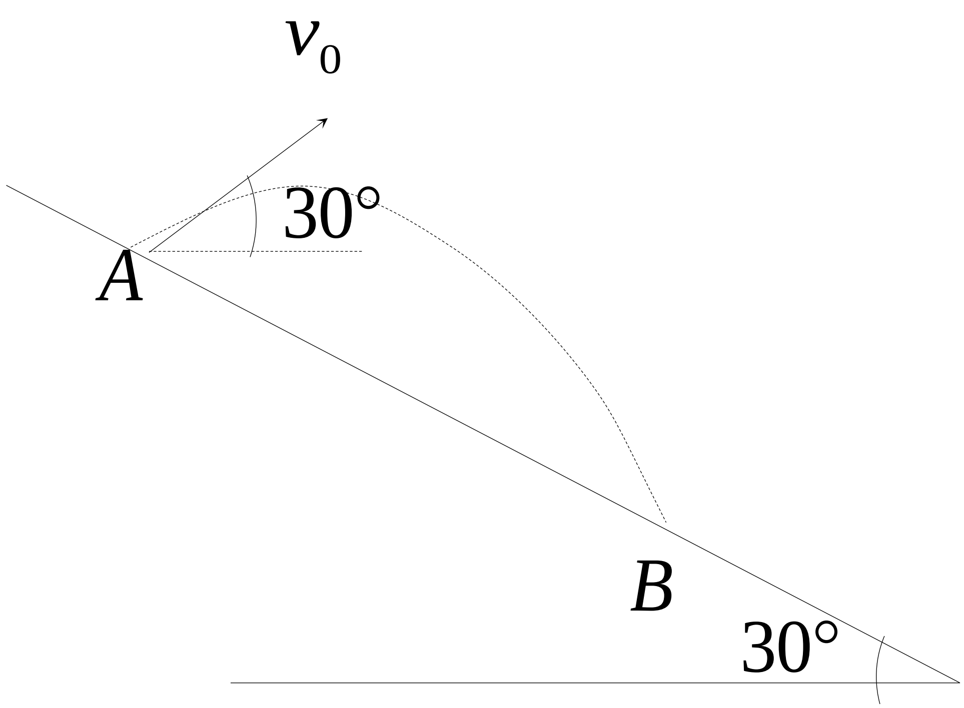
$$y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]\ 3 = 8t - 5t^2$$

$\therefore t = 1[s]$ 或0.6[s]但只有$t = 1$，$x = 6$才會成立

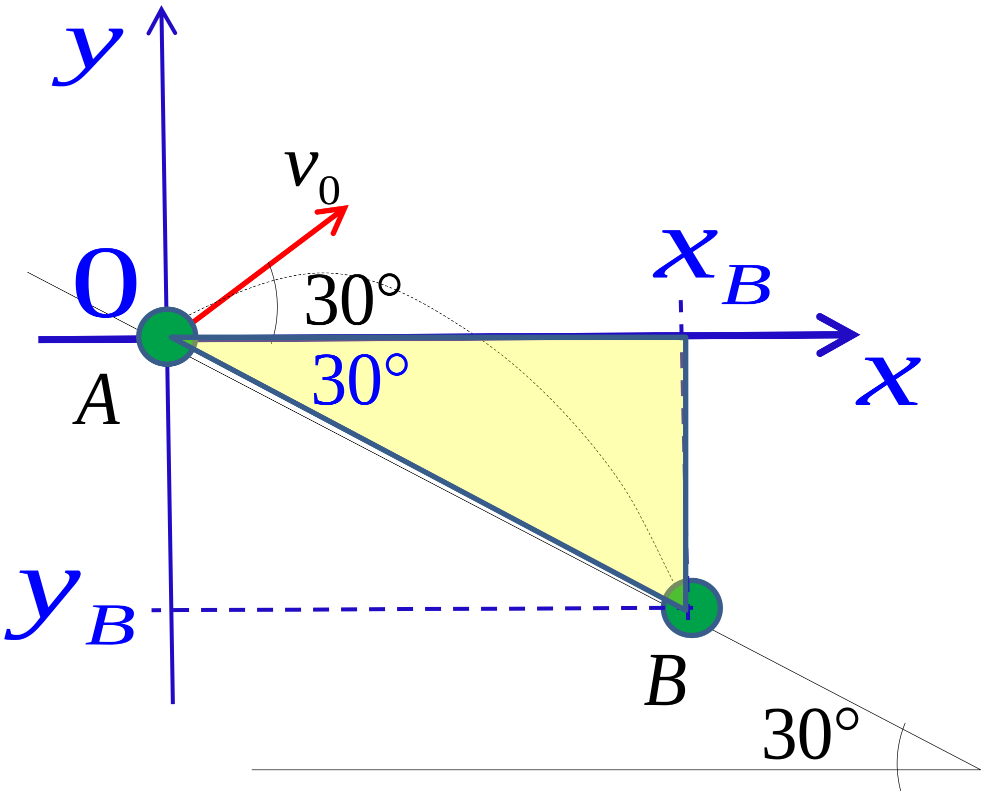
2.從與一水平成*30*°角之斜面上一點*A*以v_0初速，*30*°仰角斜拋出一物體而落於斜面上*B*點，重力加速度g，求：

（1）物體落到*B*點所需的時間？（2）*A*、*B*兩點間距離？

（3）物體碰撞B點時速度量值？



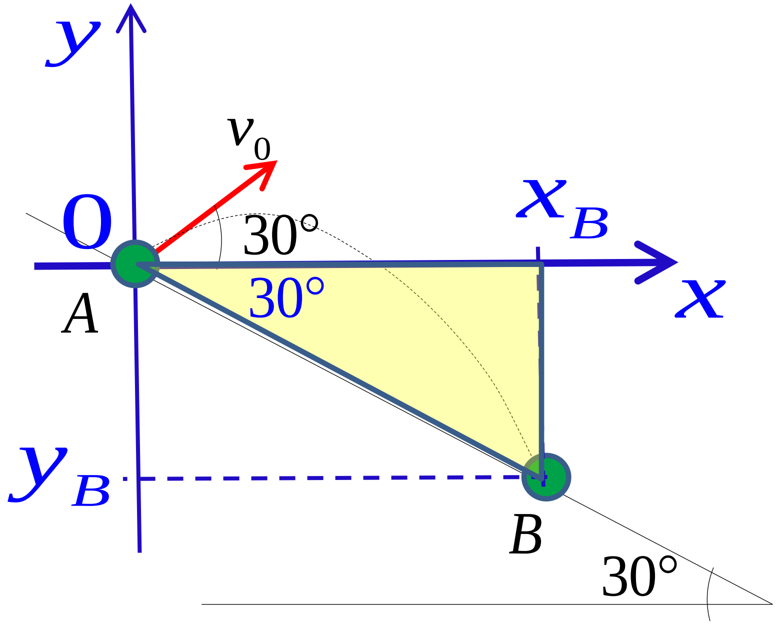
[解析]

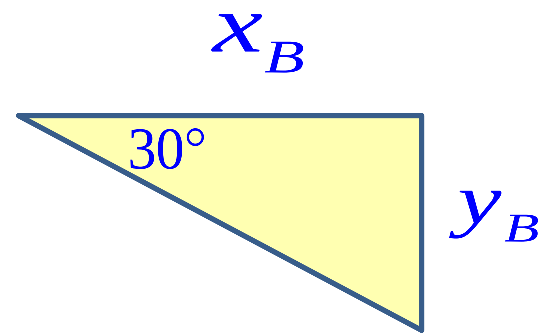


恰落於斜面時 $\boxed{\dfrac{y}{x}=\tan\theta}$

第68頁

[解析]

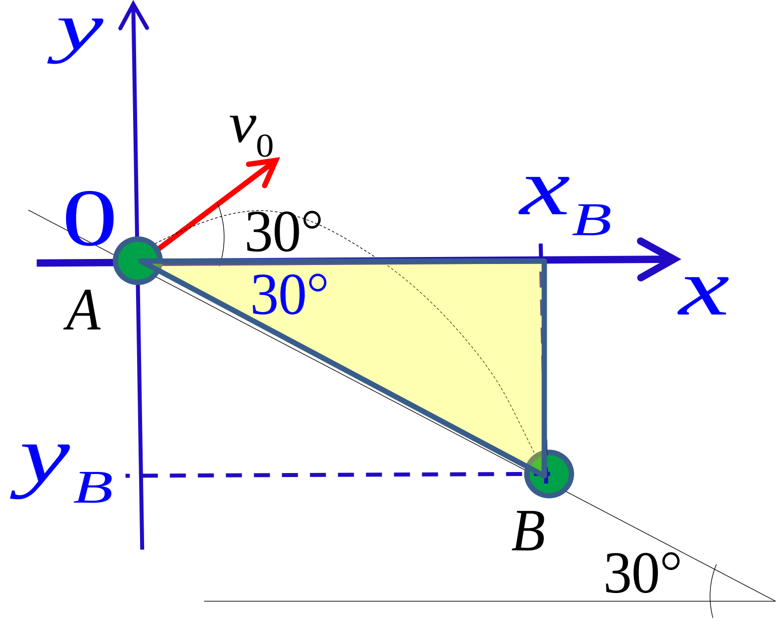




$$(1)\ \frac{y_B}{x_B} = -\tan 30^\circ \rightarrow \frac{v_0 \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}{v_o \cos 30^\circ \cdot t} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

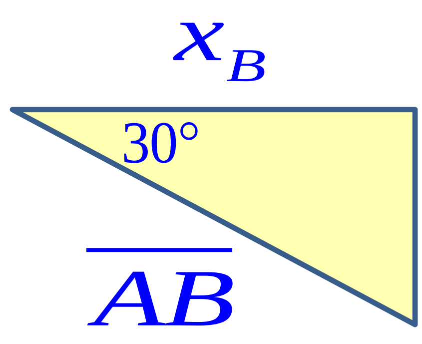
$$\rightarrow \frac{v_0 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} g t}{v_o \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow -v_0 + g t = v_0 \ \therefore t = \frac{2 v_0}{g}$$

[解析]

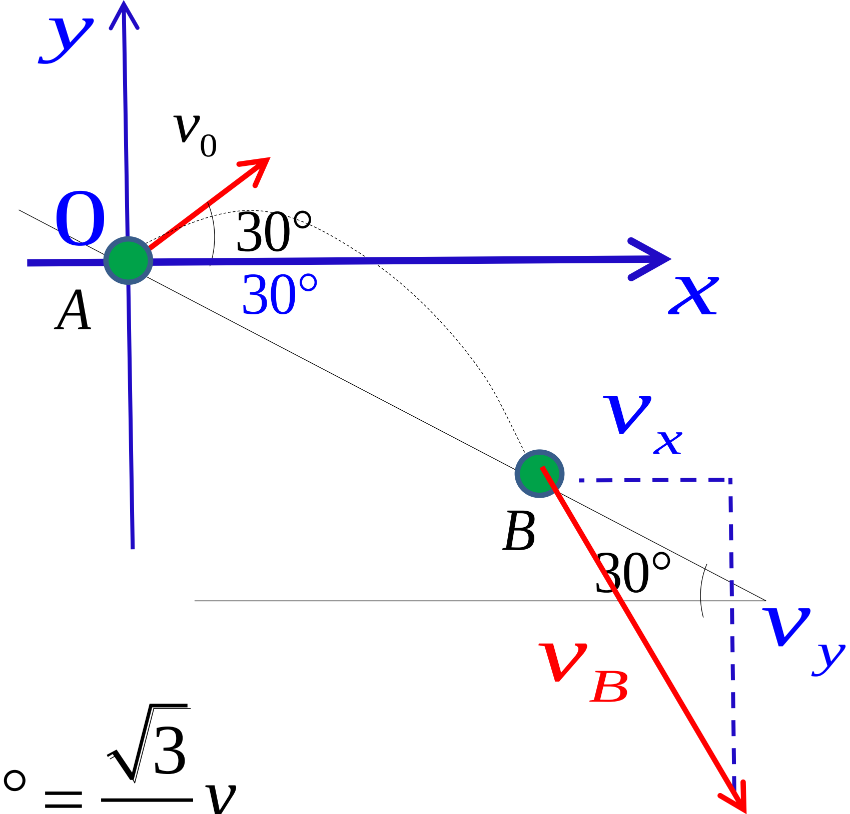


$$(2)\ x_B = v_o \cos 30° \cdot t = v_o \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2v_0}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{g}$$

$$\rightarrow \overline{AB} = \frac{x_B}{\cos 30°} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}v_0^2}{g}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2v_0^2}{g}$$



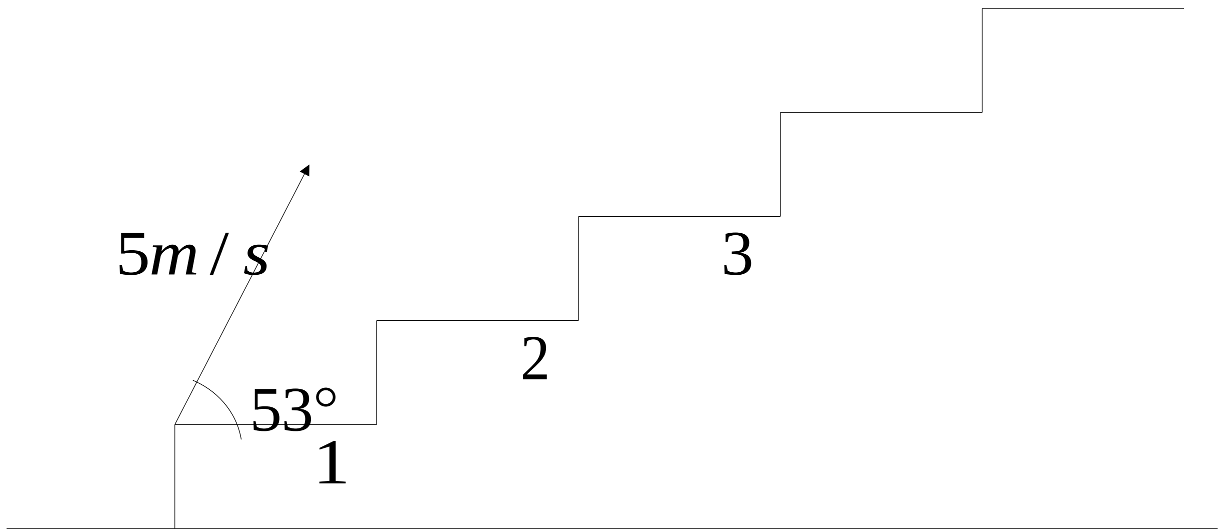
[解析]



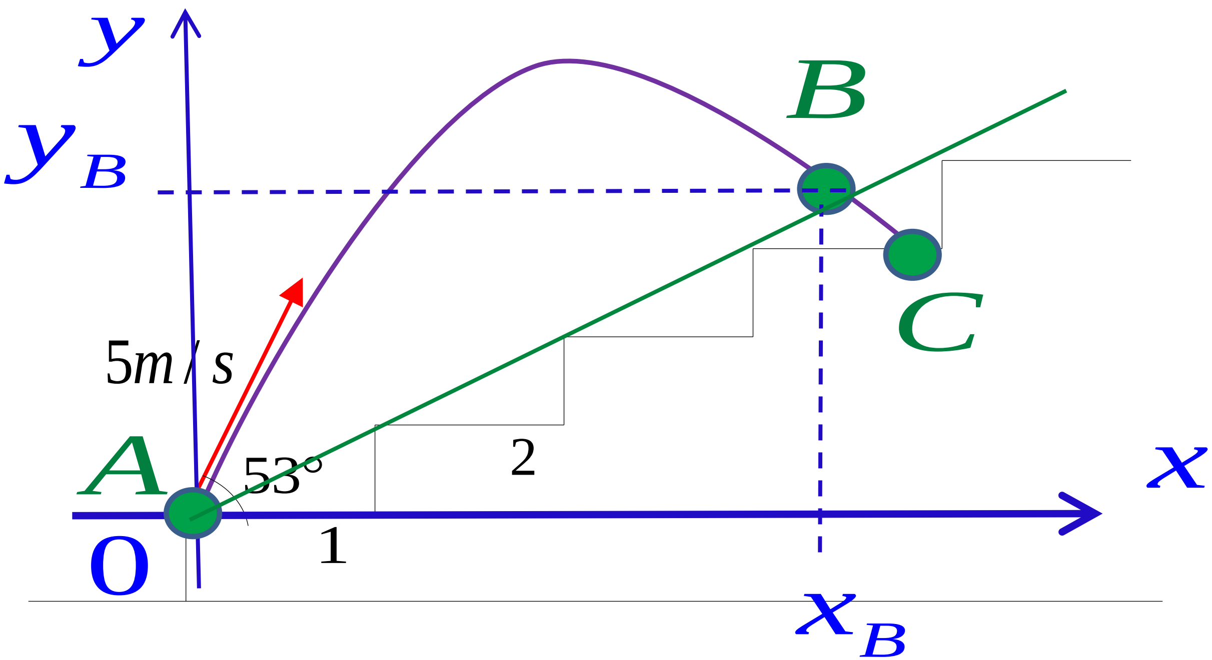
$$(3)\begin{cases} v_x = v_o\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_o \\ v_y = v_0\sin 30^\circ - gt = v_0\sin 30^\circ - g\times\dfrac{2v_0}{g} = -\dfrac{3}{2}v_o \end{cases}$$

$$\therefore v_B = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_o\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}v_o\right)^2} = \sqrt{3}v_o$$

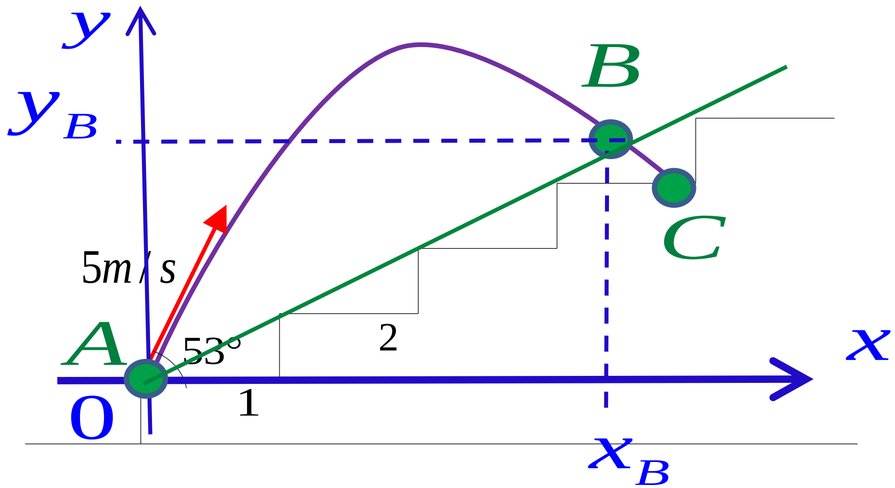
有一階梯每階高*10 cm*，寬*20 cm*，有一小石頭由底端以*5 m / s*，仰角*53°*拋出，如圖所示，若 $g = 10\ m/s^2$，則(1)將擊中第__階 (2)擊中階梯歷時？



[解析]



[解析]



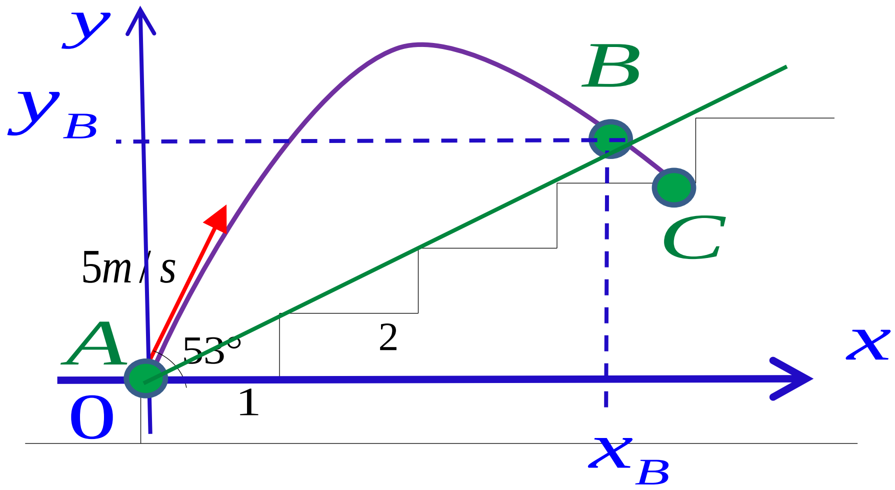
（1）如圖所示，物體運動之拋物線軌跡與各階頂點連線相交於B點，物體落於階梯上 C 點，依題意

$$\frac{y_B}{x_B}=\frac{5\sin 53°\cdot t-\frac{1}{2}\times 10\times t^2}{5\cos 53°\cdot t}=\frac{10}{20}\rightarrow\frac{4-5t}{3}=\frac{1}{2}\ \therefore t=0.5[s]$$

B點的水平坐標 $x_B=5\cos 53°\cdot t=3\times 0.5=1.5[m]=150[cm]$

落於第N階 $N=\frac{150}{20}=7.5\rightarrow$ 第8階

[解析]



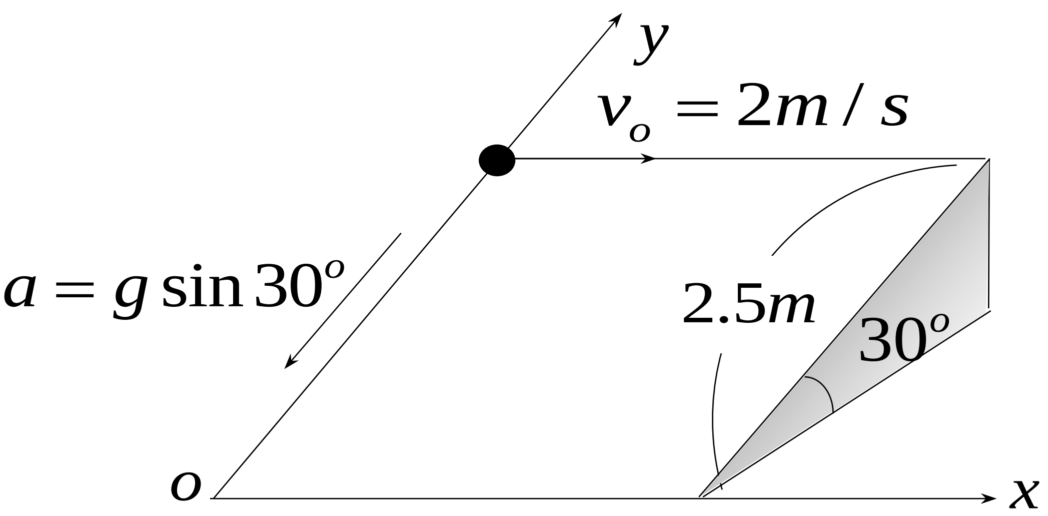
（2）C點的 y 坐標 $y'_C = \frac{10}{100}\times(8-1) = \frac{7}{10}[m]$

$$y'_C = 5\sin 53°\cdot t' - \frac{1}{2}\times 10\times t'^2 \rightarrow \frac{7}{10} = 4t' - 5t'^2$$

$$\rightarrow 50t'^2 - 40t' + 7 = 0 \quad \therefore t' = \frac{1}{5}\text{或}\frac{7}{5}[s] \rightarrow \text{取}\frac{7}{5}s = 0.35s$$

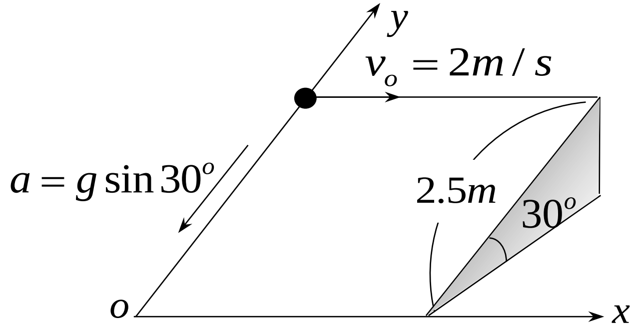
1. 由斜面頂左端以2 m/s的初速水平拋出鋼珠，已知$g = 10\ m/s^2$，利用圖中座標系，試求

(*a*)抵達底邊時在 *x* 方向的位移？ (*b*)寫出鋼珠軌跡方程式？

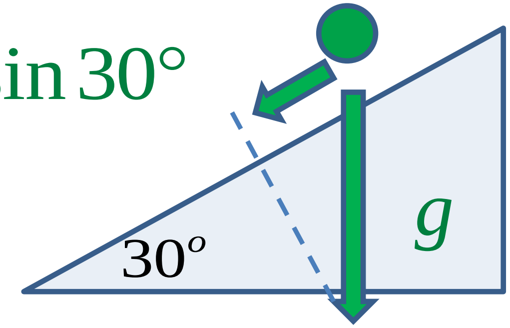


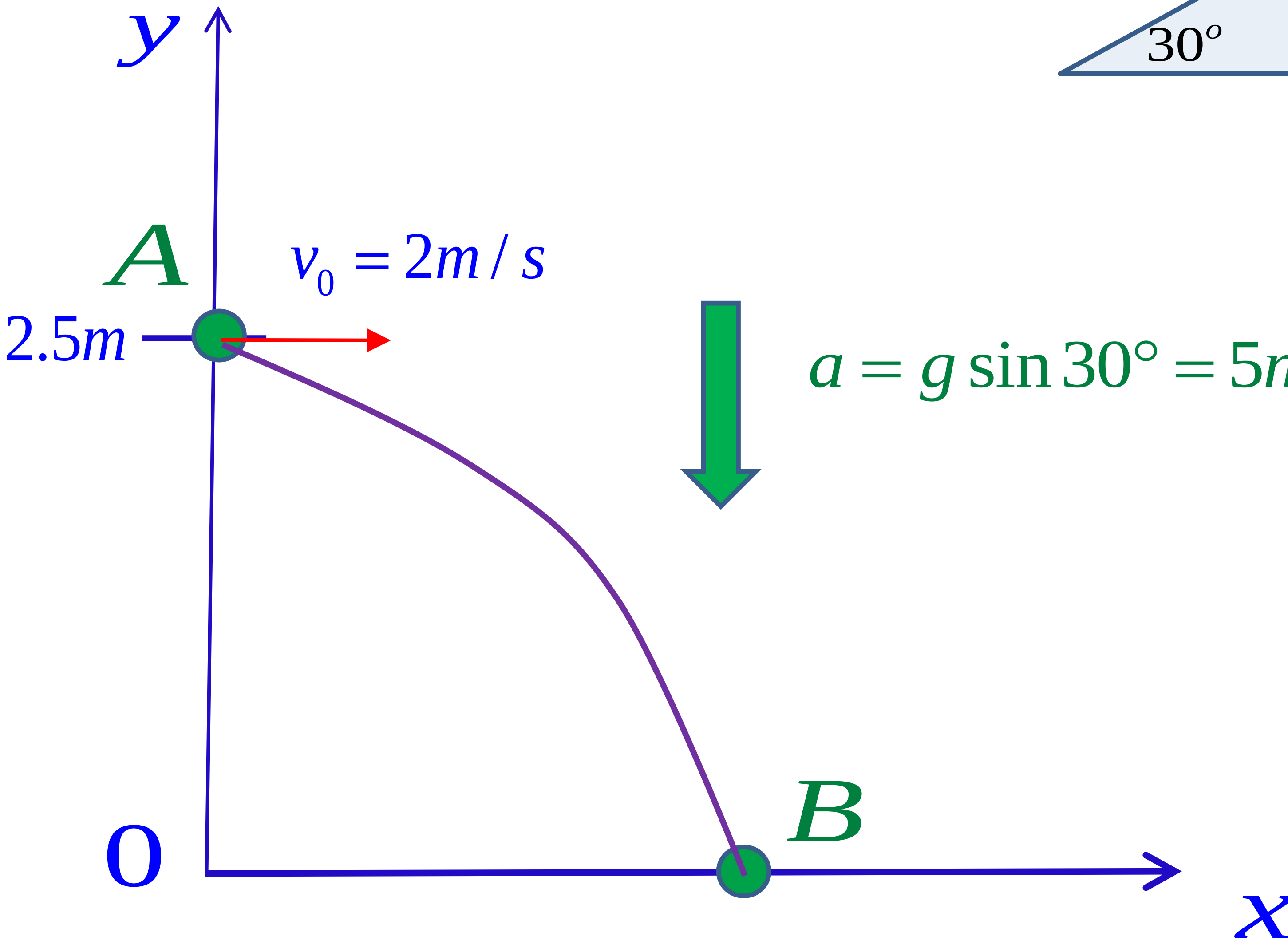
第70頁

[解析]



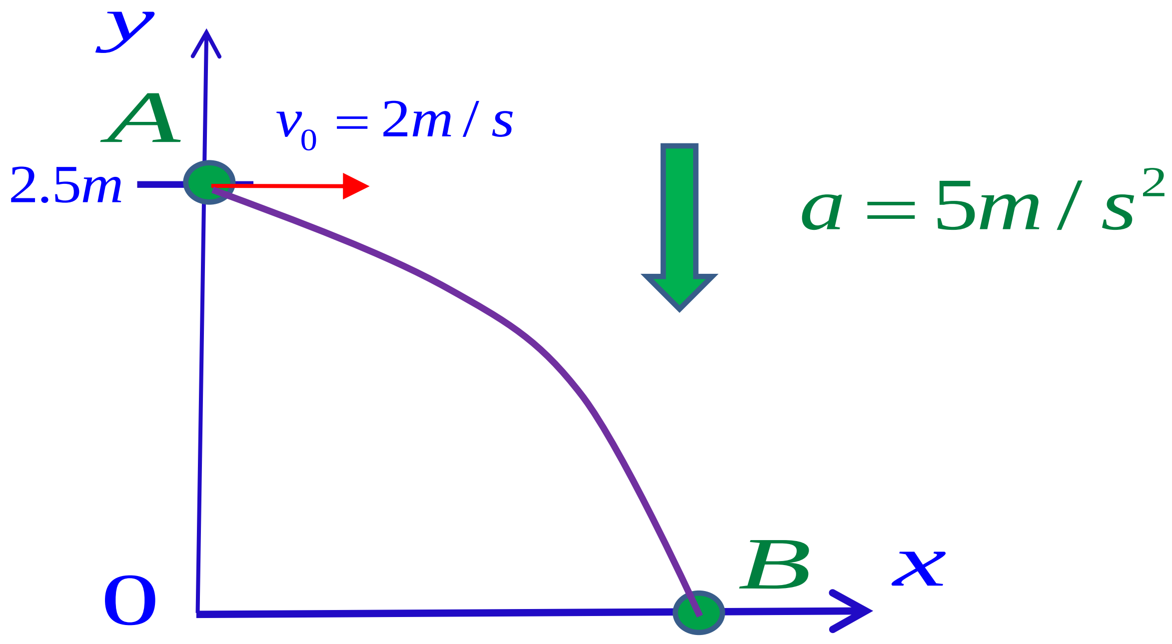
$$a = g\sin 30°$$





$$a = g\sin 30° = 5m/s^2$$

[解析]

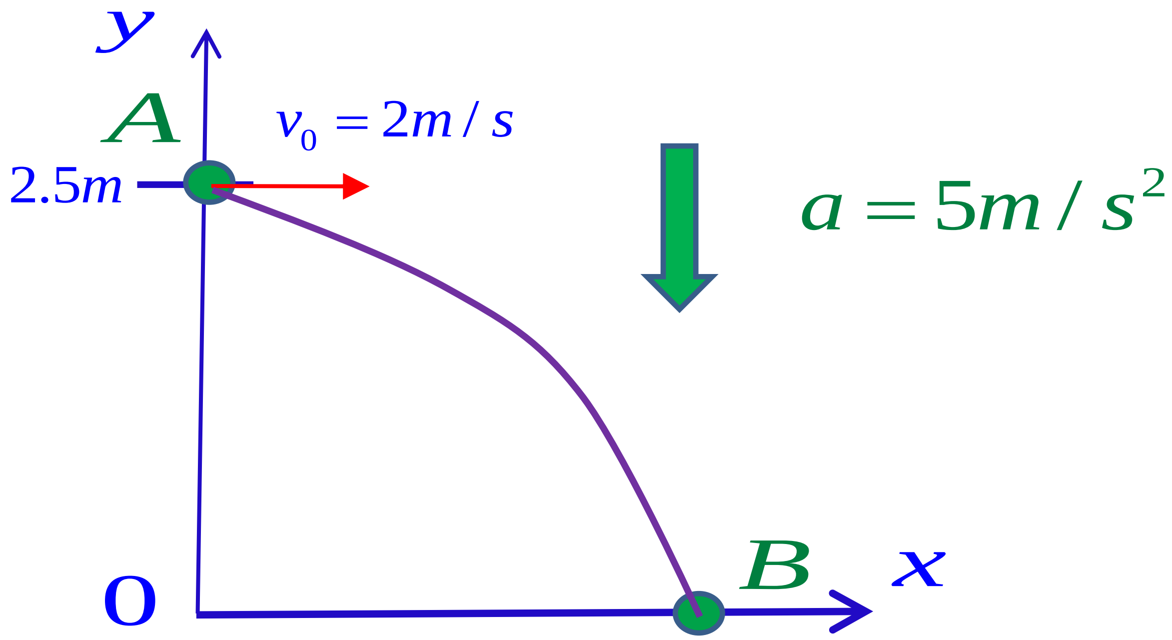


$(1)(A \to B):$

$$y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] -2.5 = -\frac{1}{2}\times 5t^2 \ \therefore t = 1[s]$$

$$x:[\Delta x = v_0 t]\,\Delta x = 2\times 1 = 2[m]$$

[解析]

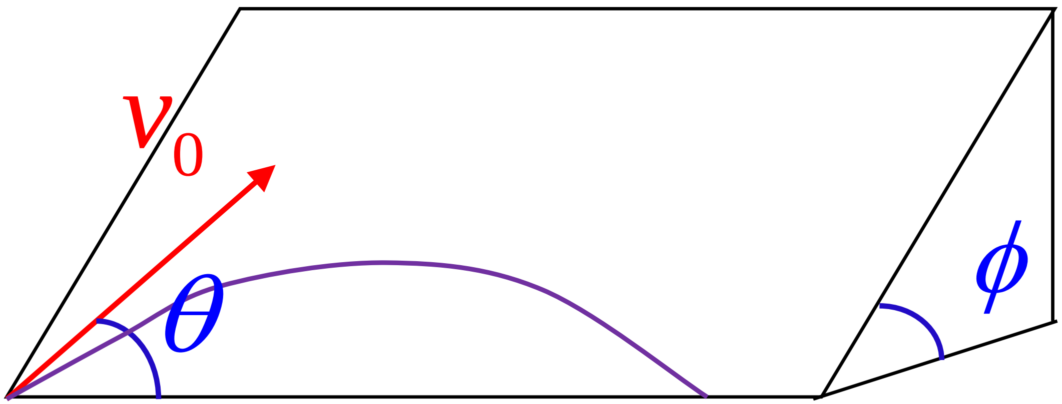


$$(2)\begin{cases} x:\left[\Delta x = v_0 t\right] x = 2t \cdots\cdots ① \\ y:\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right] y = 2.5 - \frac{1}{2}\times 5t^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①代入② $y = 2.5 - \frac{1}{2}\times 5\times\left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow y = 2.5 - \frac{5}{8}x^2$

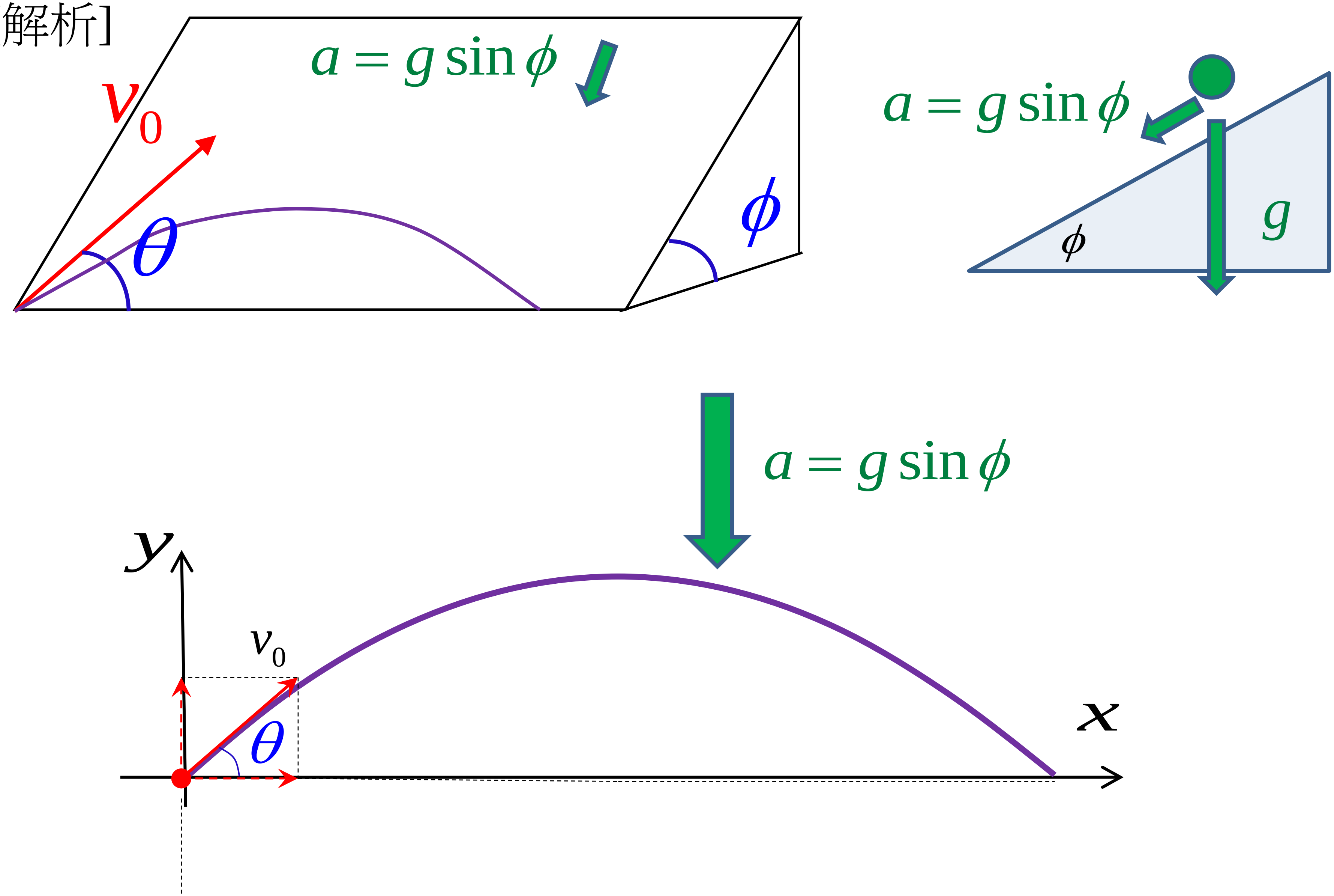
2. 如右圖所示將一質點在斜角ϕ 之斜面上，以初速v_0仰角θ斜向拋出，求此質點

(*a*)飛行時間 (b)水平射程 (c)最大高度各為若干。

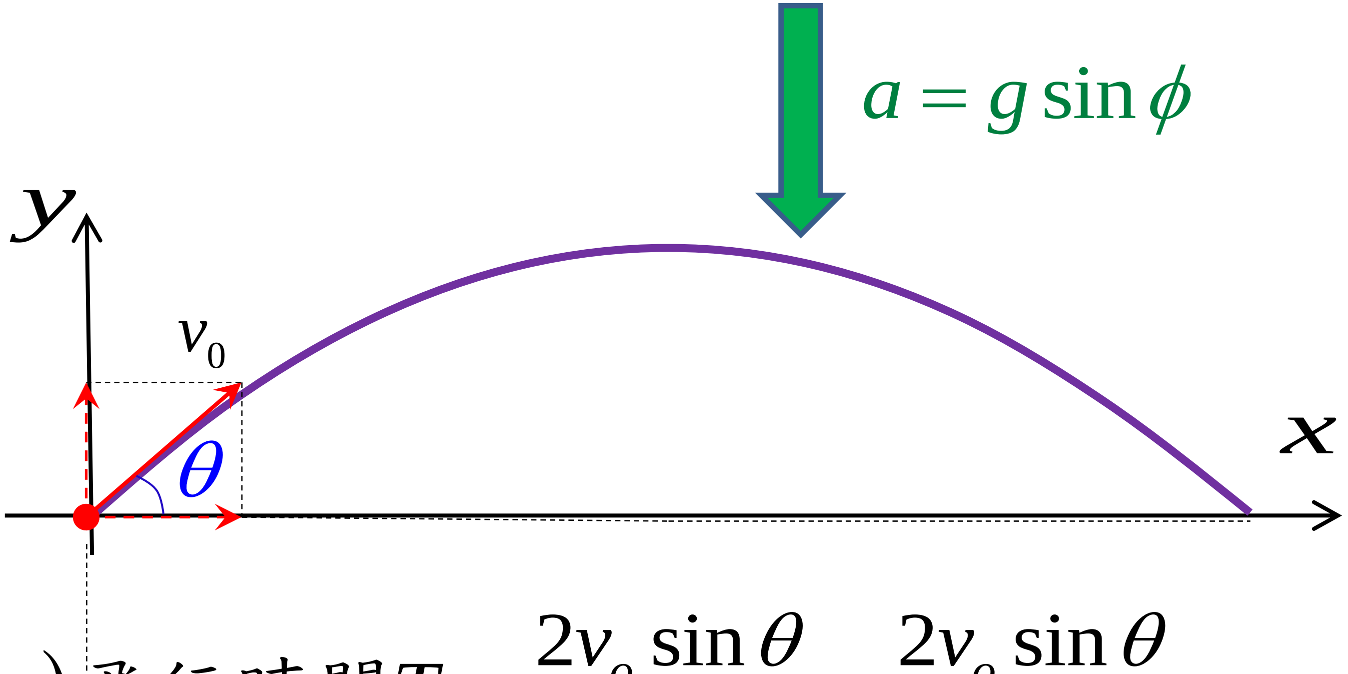


第70頁

[解析]



[解析]



$$(a)\text{飛行時間}T = \frac{2v_o\sin\theta}{a} = \frac{2v_o\sin\theta}{g\sin\phi}$$

$$(b)R = \frac{v_0{}^2\sin 2\theta}{a} = \frac{v_0{}^2\sin 2\theta}{g\sin\phi}$$

$$(c)H = \frac{v_o{}^2\sin^2\theta}{2a} = \frac{v_o{}^2\sin^2\theta}{2g\sin\phi}$$

一球由斜角37°的斜面上拋出，已知球拋出的初速為10 m/s，方向與斜面垂直。若重力加速度為10 m/s²，則根據右圖的座標分析小球運動時

(a) 初速度的*x*、*y* 分量為何

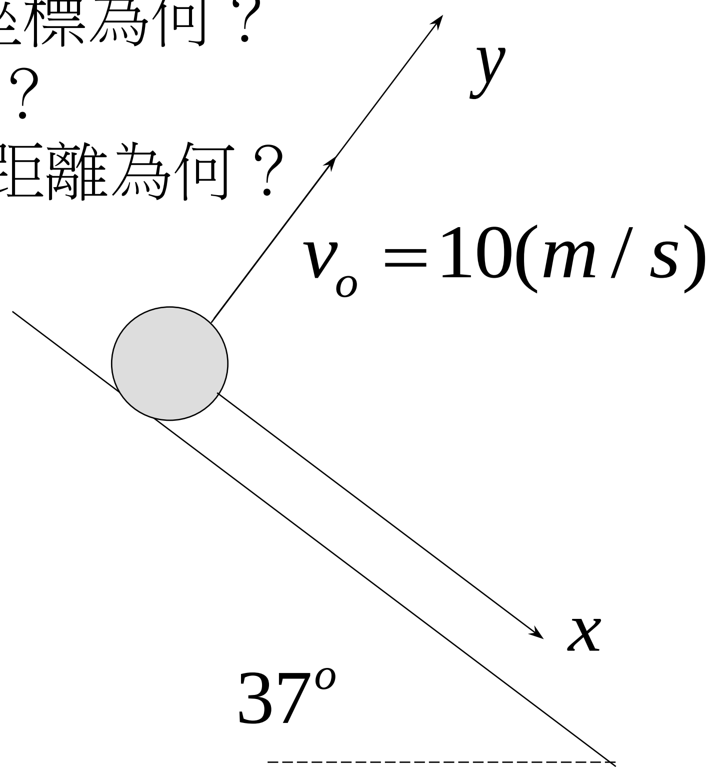
(b) 小球在空中運動時加速度的 *x*、*y* 分量為何？

(c) 小球在*x*、*y*軸的運動方程式為何？

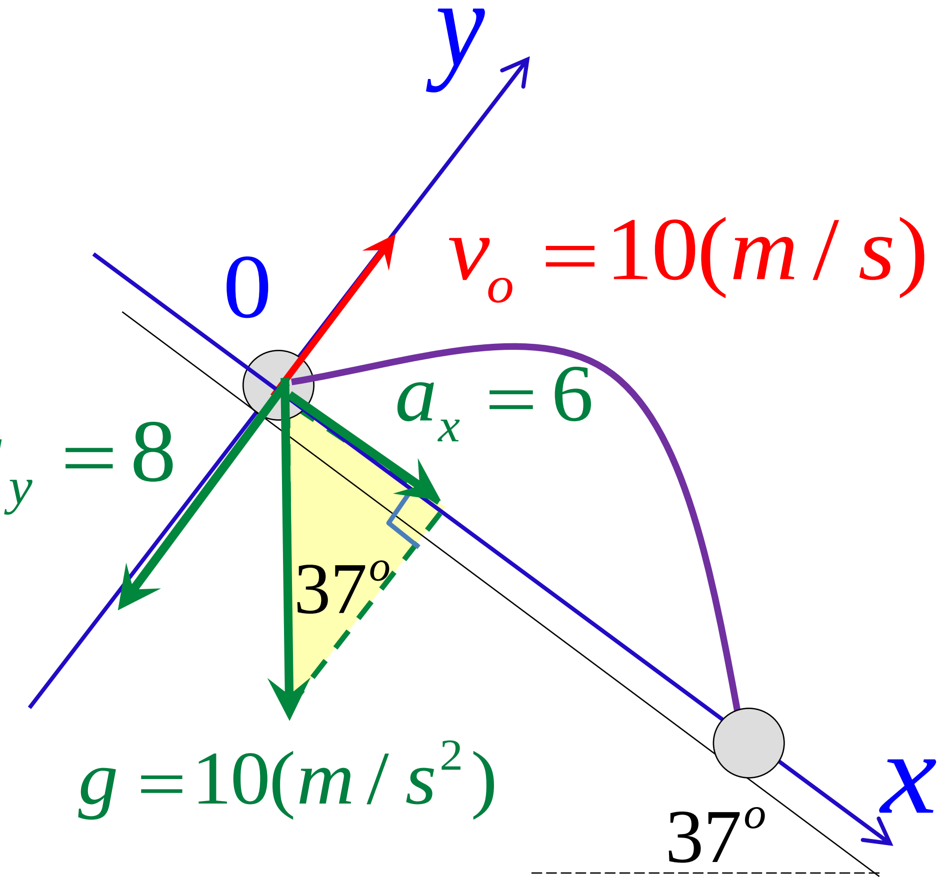
(d) 小球在斜面上落點處的*y*座標為何？

(e) 小球在空中飛行時間為何？

(f) 小求知落點與出發點間的距離為何？



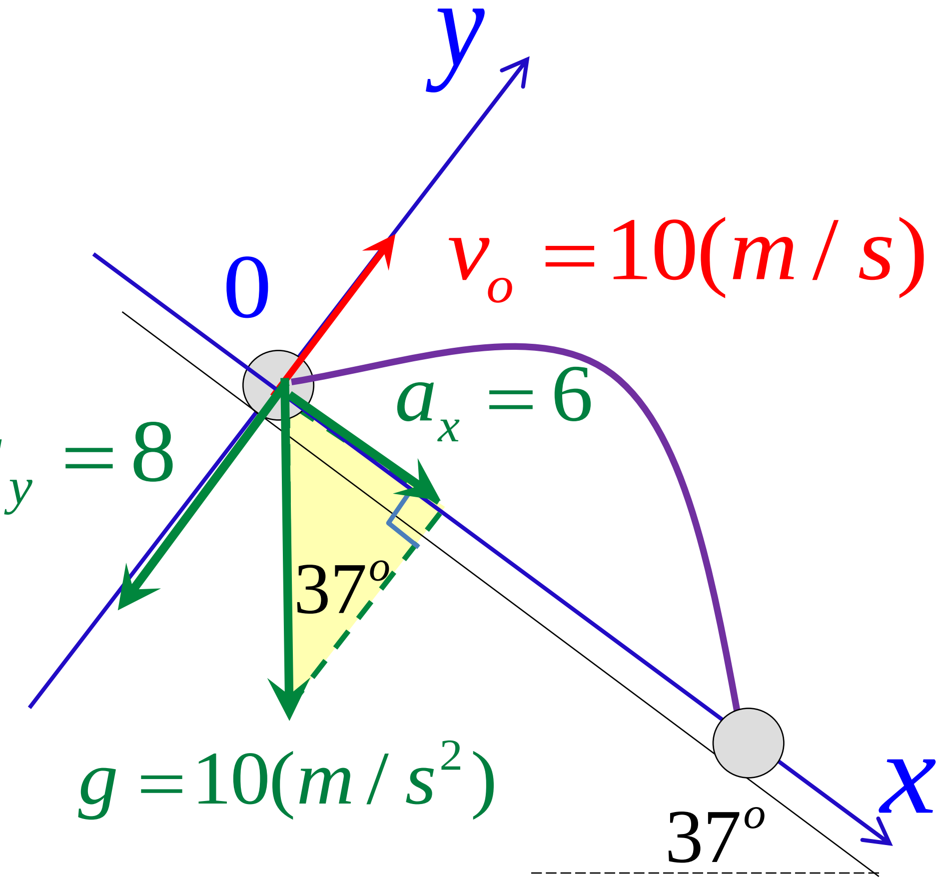
[解析]



$$(a)\begin{cases} v_{x0} = 0 \\ v_{y0} = v_0 = 10(m/s) \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} a_x = g\sin 37° = 6m/s^2 \\ a_y = -g\cos 37° = -8m/s^2 \end{cases}$$

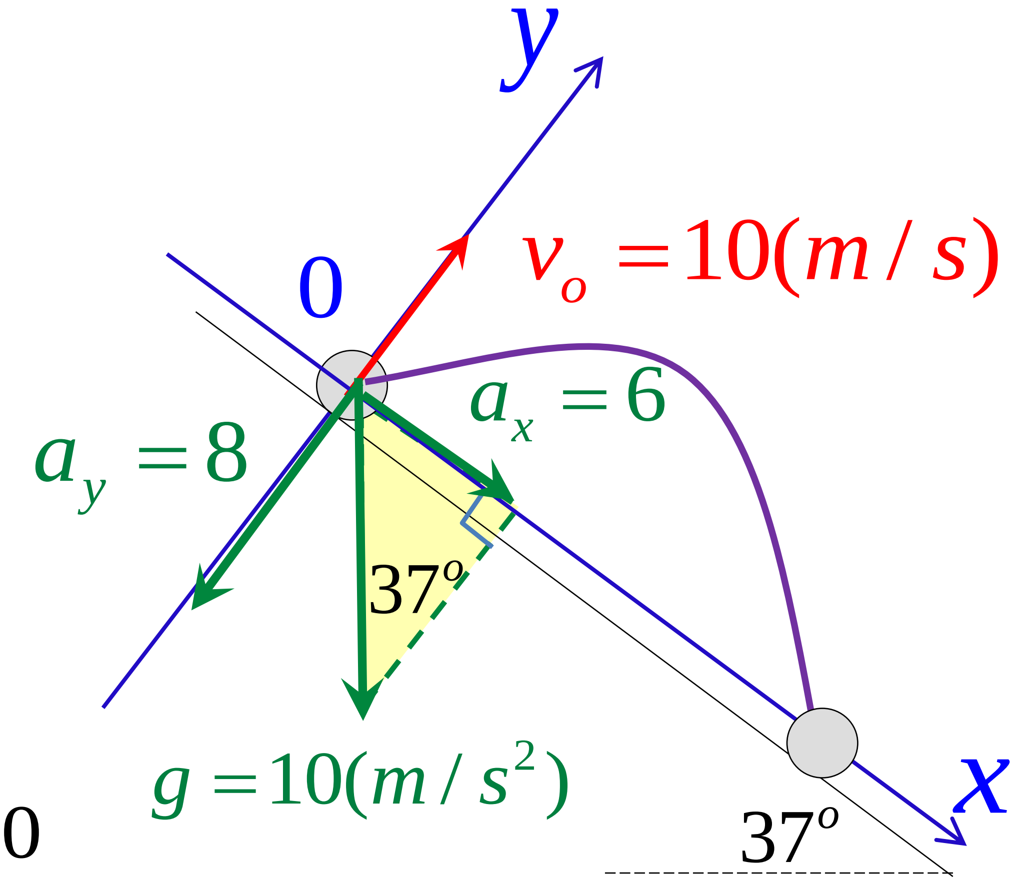
[解析]



$$(c)\left[\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t_2\right]$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} a_x t^2 = \dfrac{1}{2} \times 6t^2 = 3t^2 \\ y = v_{y0} + \dfrac{1}{2} a_y t^2 = 10t + \dfrac{1}{2} \times 8t^2 = 10t + 4t^2 \end{cases}$$

[解析]



$(d)(e)$ 著地時 $y = 0$

$10t + 4t^2 = 0 \rightarrow t = 0$ 或 2.5 (0不合)

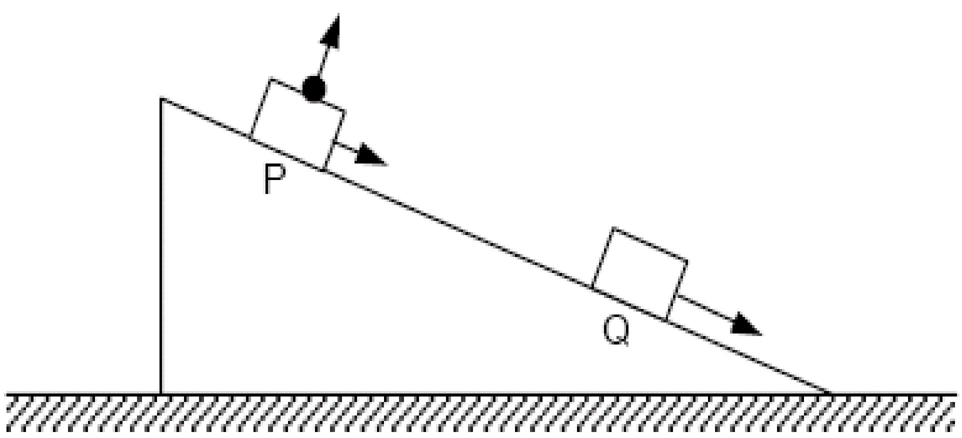
$(f)\ x = 3t^2 = 3 \times (2.5)^2 = 18.75$

練功題

1.圖所示，在一個光滑的長斜面上，有一輛滑車沿著斜面自由下滑。當該滑車經過P 點時，突然**<u>往垂直於斜面的方向上（從滑車上看）</u>**，向上彈射一小球。當小球掉落到斜面上時，該滑車的位置移至Q點。若空氣的阻力很小， 可忽略不計，則小球將落在下列哪一個位置？(A)正落在Q 點上　　(B)落在Q 點的前面

(C)仍然落在P 點上　(D)落在P 點和Q 點之間

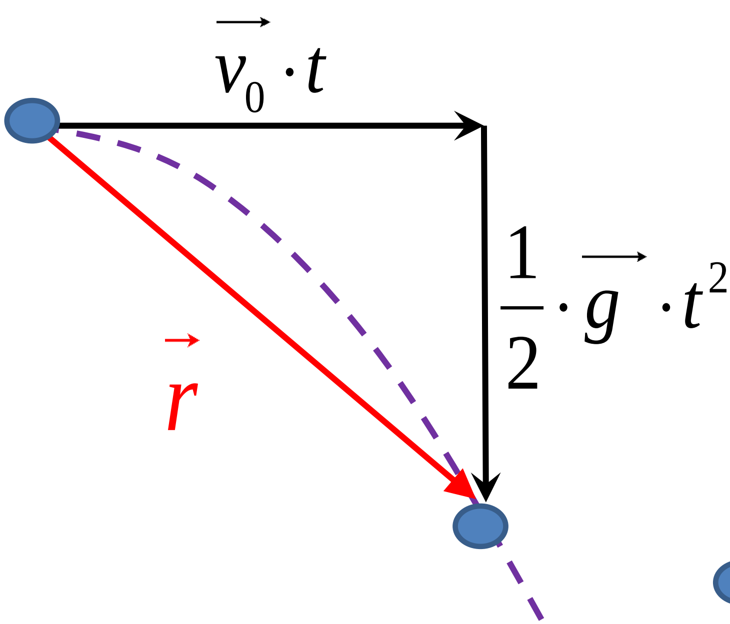
(E)須視小球往上彈射的初速大小而定。

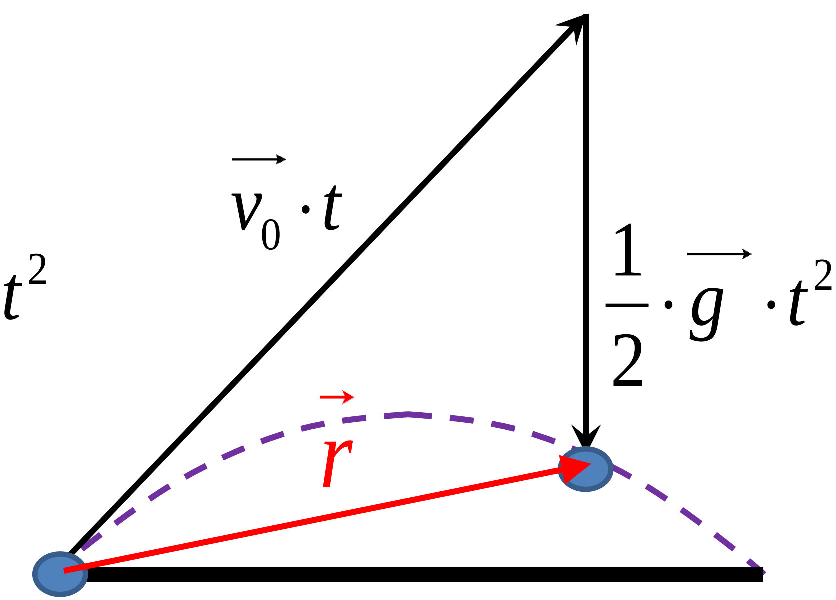


[補充]

拋體運動可視為 $\begin{cases} \text{速度為} \overrightarrow{v_0} \text{的等速直線運動} \\ \text{鉛直自由落體運動} \end{cases}$ 兩個運動的合成。

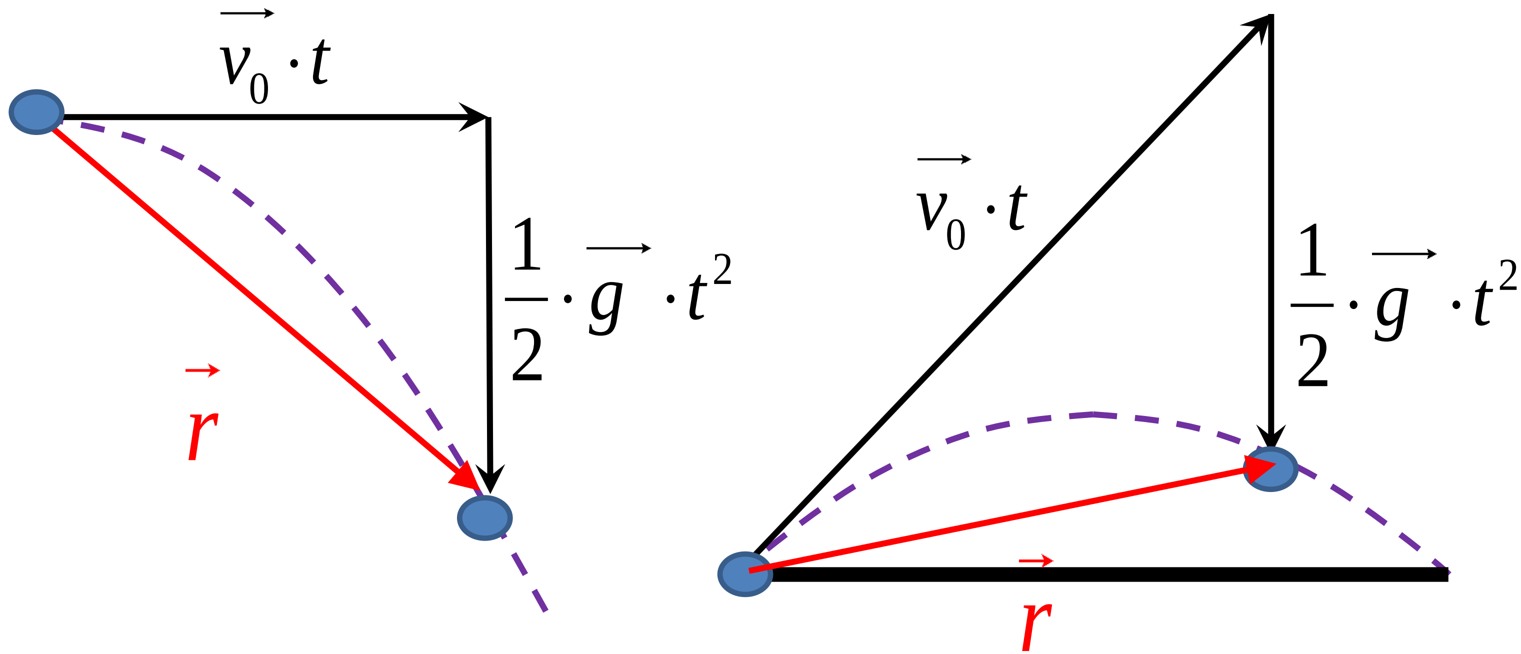
$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{g} \cdot t^2}$$





第72頁

[說明]



$$\vec{r}=(v_0\cos\theta t)\vec{i}+\left(v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

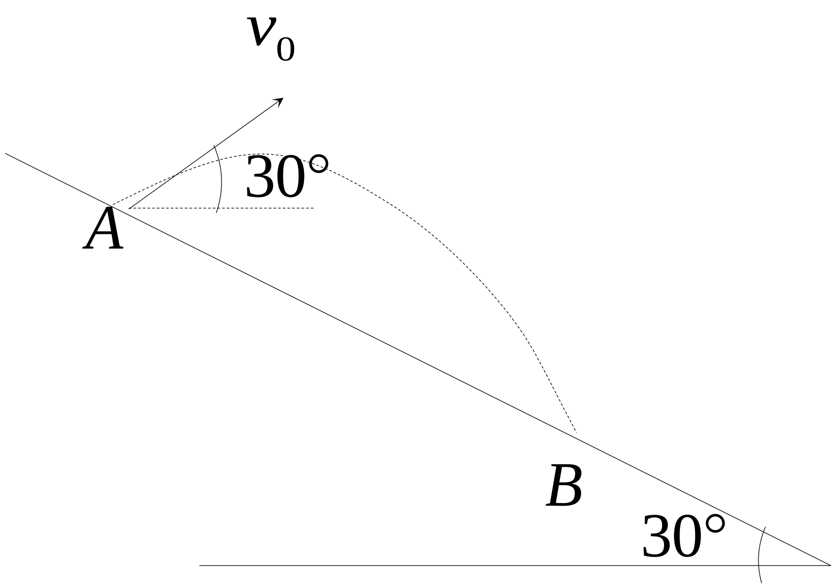
$$=(v_0\cos\theta t)\vec{i}+(v_0\sin\theta t)\vec{j}+\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

$$=\overrightarrow{v_0}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2$$

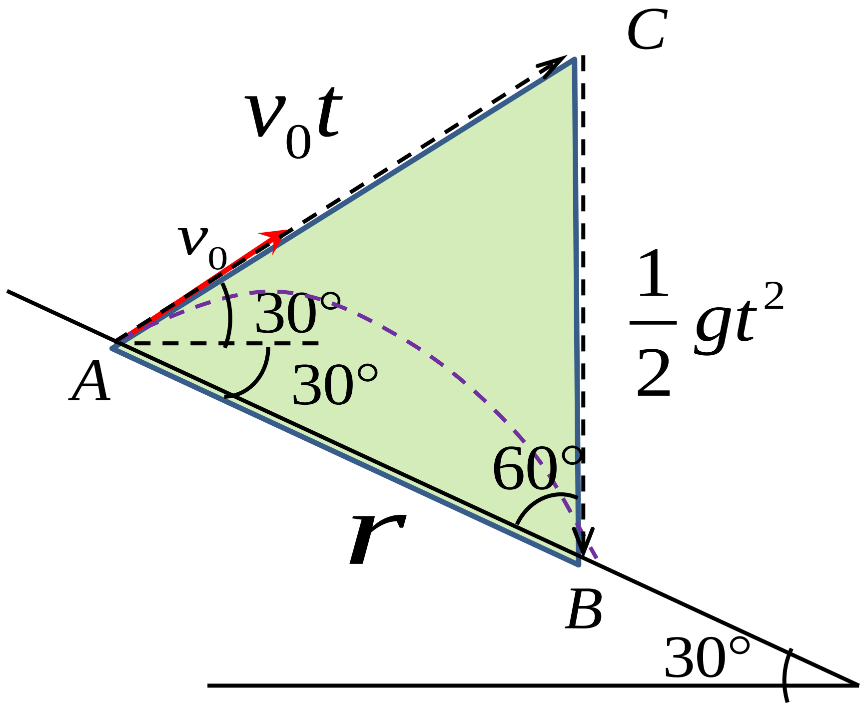
1.從與一水平成*30*°角之斜面上一點*A*以v_0初速，*30*°仰角斜拋出一物體而落於斜面上*B*點，求：

（1）物體落到*B*點所需的時間？

（2）*A*、*B*兩點間之距離？



[解析]



由比較 $\left|\vec{r}\right|, \left|\overrightarrow{v_0}t\right|, \left|\frac{1}{2}\vec{g}t^2\right|$ 三量值關係,恰為三角形三邊長與角度關係

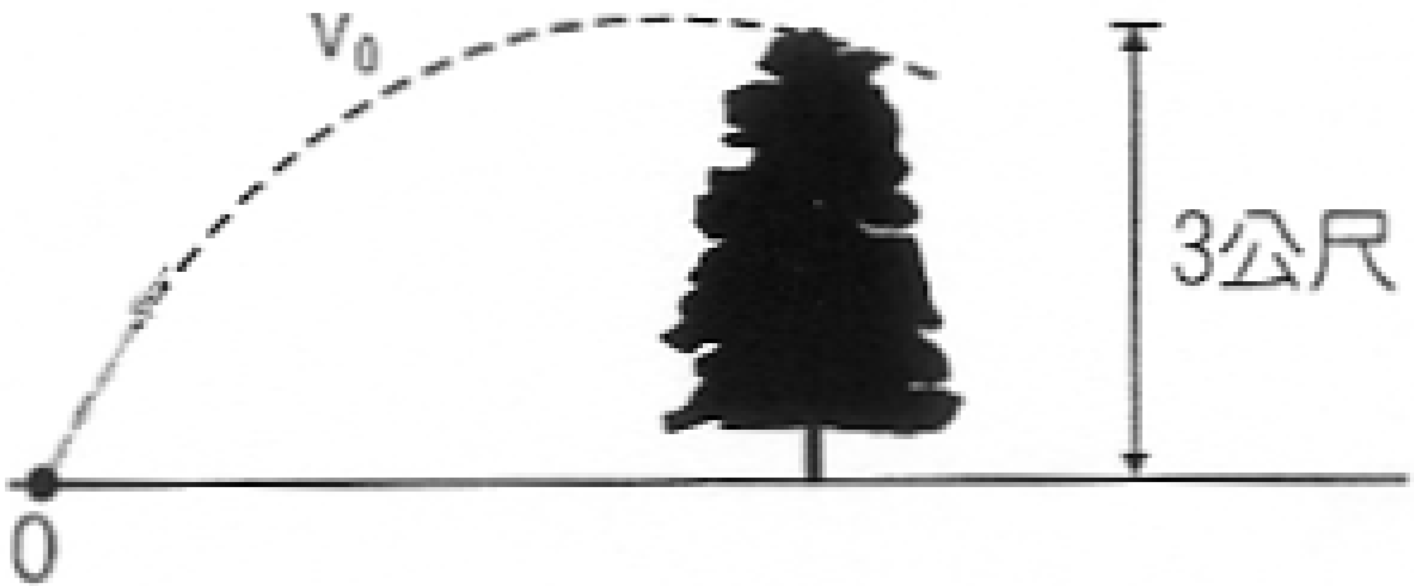
由圖知 ΔABC 為正三角形 $\therefore r = v_0t = \frac{1}{2}gt^2$

$\rightarrow t = \frac{2v_0}{g} \quad r = v_0 \times \frac{2v_0}{g} = \frac{2{v_0}^2}{g}$

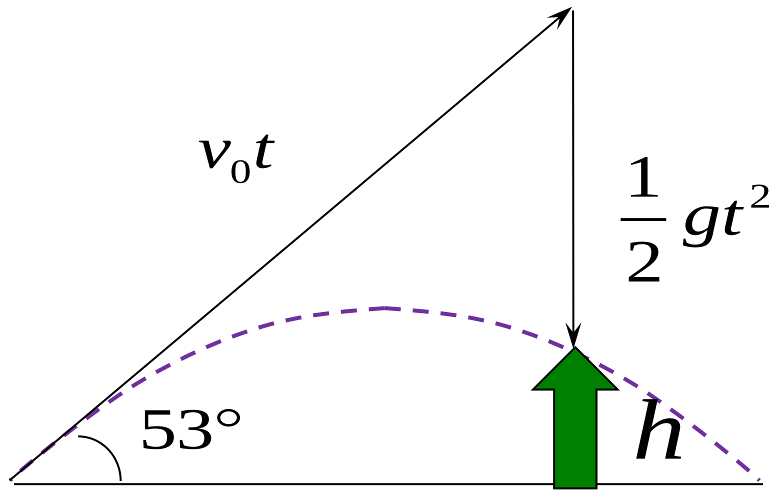
2.如圖所示，一物自O點以53°仰角斜向拋出，欲 使它恰掠過前方6公尺，高度3公尺的耶誕樹，若g =10公尺/秒^2，則:

(1) 物自拋出幾秒後恰抵達耶誕樹上方？

(2) 拋出之初速v_o為若干？

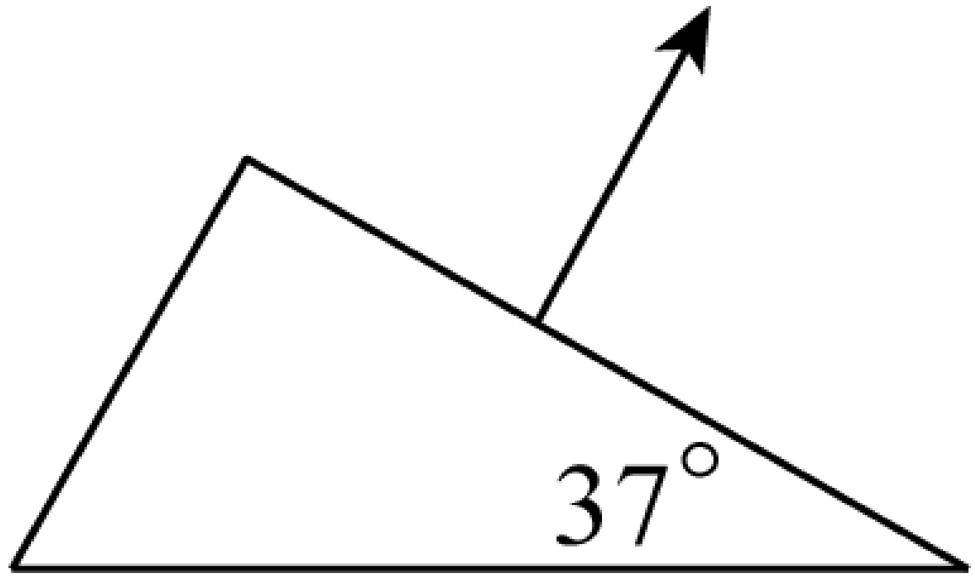


[解析]

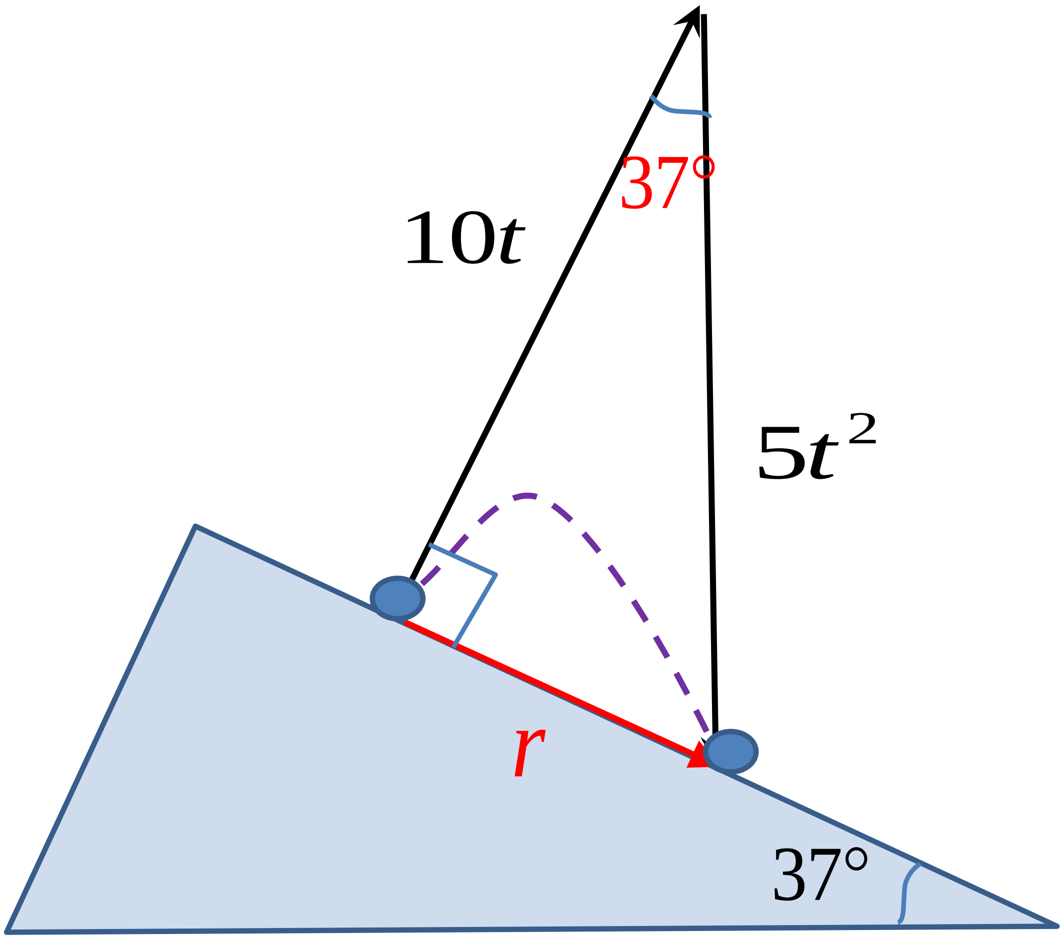


$$\begin{cases} v_0t = 6\times\dfrac{5}{3} \\ 5t^2+3 = 6\times\dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \therefore \quad t=1[\mathrm{s}] \quad v_0=10[\mathrm{m/s}]$$

2.一球由斜角37°的斜面上拋出，已知球拋出的初速為10 m/s，方向與斜面垂直。若重力加速度為10 m/s²，則小球之落點(仍在斜面上)與出發點間的距離為何？



[解析]



$$\frac{10t}{5t^2}=\frac{4}{5}\rightarrow t=\frac{5}{2}$$

$$r=10t\times\frac{3}{4}=10\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$$