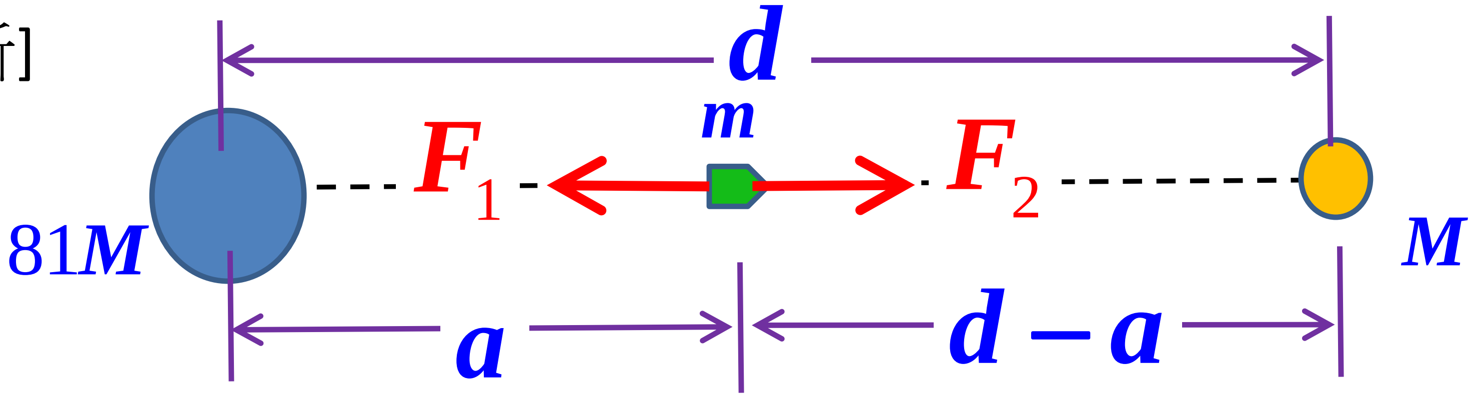
# 第1頁

*1.*地球質量為月球質量之*81*倍，兩者連心線之長度為$d$，設一火箭在連心線上，至地心之距離為$a$，若二星球對火箭之引力和為零，則

$$\frac{a}{d} = ?$$

[解析]




引力和為零　$F_1 = F_2$

$$\frac{G81Mm}{a^2} = \frac{GMm}{(d-a)^2} \rightarrow \frac{9}{a} = \frac{1}{d-a}$$

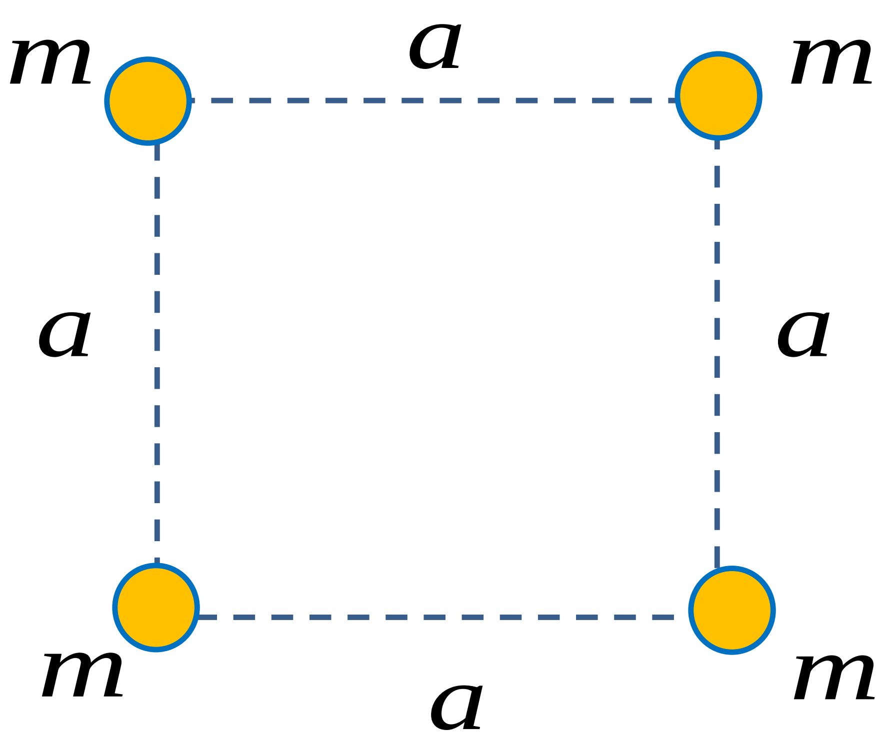
$$\therefore \frac{a}{d} = \frac{9}{10}$$

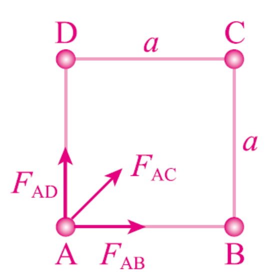
*2.*某星球其平均質量密度與地球相同，半徑則為地球之*2*倍，在地球上重量為*64*公斤重的人到該星球上時，其重量為？

[解析]

$$F_g = \frac{GMm}{R^2} = \frac{G\left(D\frac{4}{3}\pi R^3\right)m}{R^2} \propto R$$

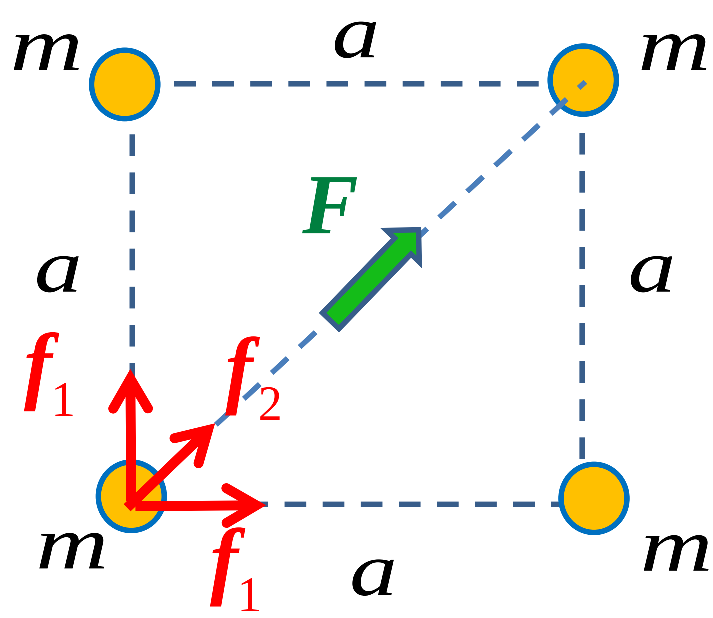
3.邊長為$a$之正方形之四個頂點上，各置質量均為$m$的四個質點，則每一個質點所受之萬有引力的量值為何？



第1頁

[解析]




$$f_1 = \frac{Gm^2}{a^2} \qquad f_2 = \frac{Gm^2}{\left(\sqrt{2}a\right)^2} = \frac{Gm^2}{2a^2}$$

$$\therefore F = f_1 \cos 45° \times 2 + f_2$$

$$= \frac{Gm^2}{a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 + \frac{Gm^2}{2a^2} = \frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)Gm^2}{2a^2}$$

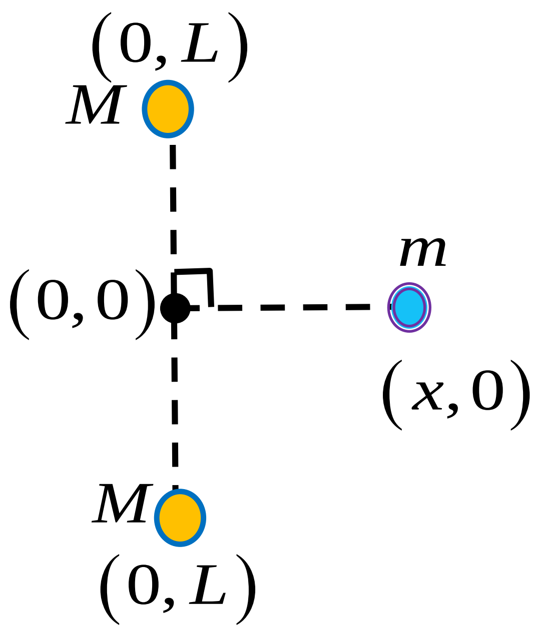
1.有兩個質量均為*M*的質點，位置固定在 (0，*L*) 及 (0，-*L*) 上，如圖所示。今在位置為 (*x*，*0*) 處，放置質量為*m*之質點，試求：

(A) 質量為*m*之質點所受引力為？

(B) 若當*x*>>*L* 時，質量為*m*之質點所受的引力大小為？

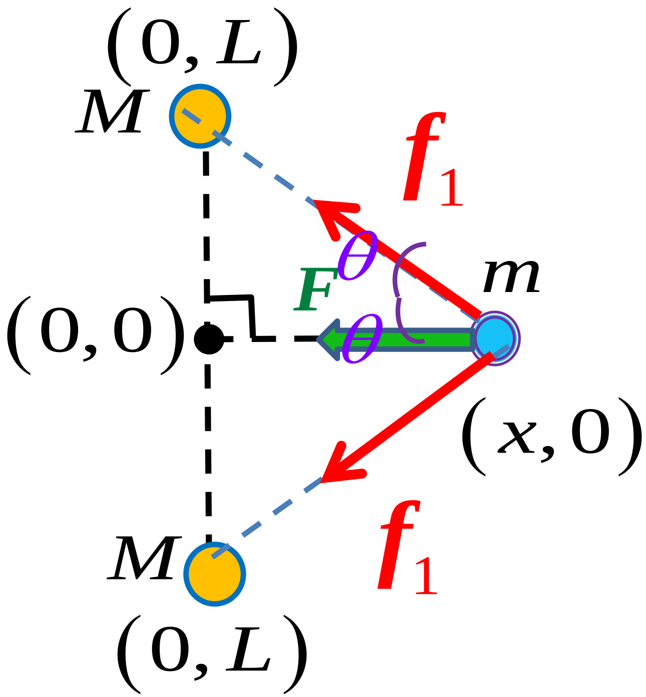
(C) 若當*L*>>*x*時，質量為*m*之質點所受的引力大小為？

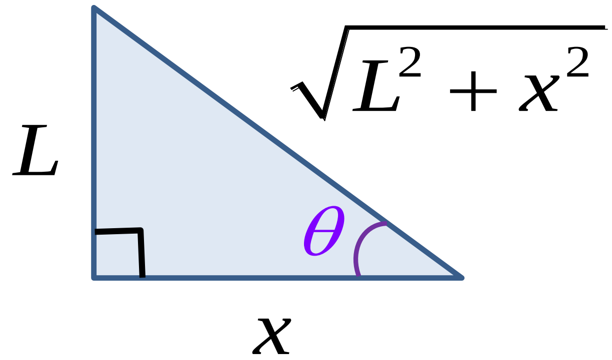
(D) 若當*L*>>*x*時，若只考慮兩球體對*m*的萬有引力，則將質點*m*由靜止釋放後，須費時多久才能回到中央處？



## 第1頁

[解析]




$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}}$$

$$f_1 = \frac{GMm}{\left(\sqrt{L^2+x^2}\right)^2} = \frac{GMm}{L^2+x^2}$$

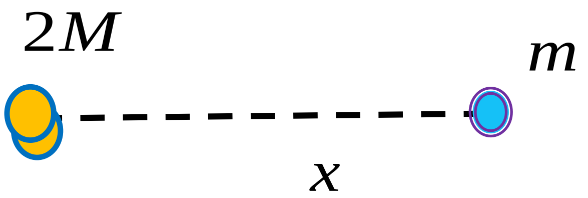
$$\therefore F = f_1\cos\theta \times 2$$

$$= \frac{GMm}{L^2+x^2} \times \frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}} \times 2 = \frac{2GMm}{\left(L^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}x$$

第1頁

[解析]

當$x >> L$時,則$L^2 + x^2 \approx x^2$




$$\therefore F = \frac{2GMm}{\left(L^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} x \approx \frac{2GMm}{x^2}$$

當$L >> x$時,則$L^2 + x^2 \approx L^2$

$$\therefore F = \frac{2GMm}{\left(L^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} x \approx \frac{2GMm}{L^3} x$$

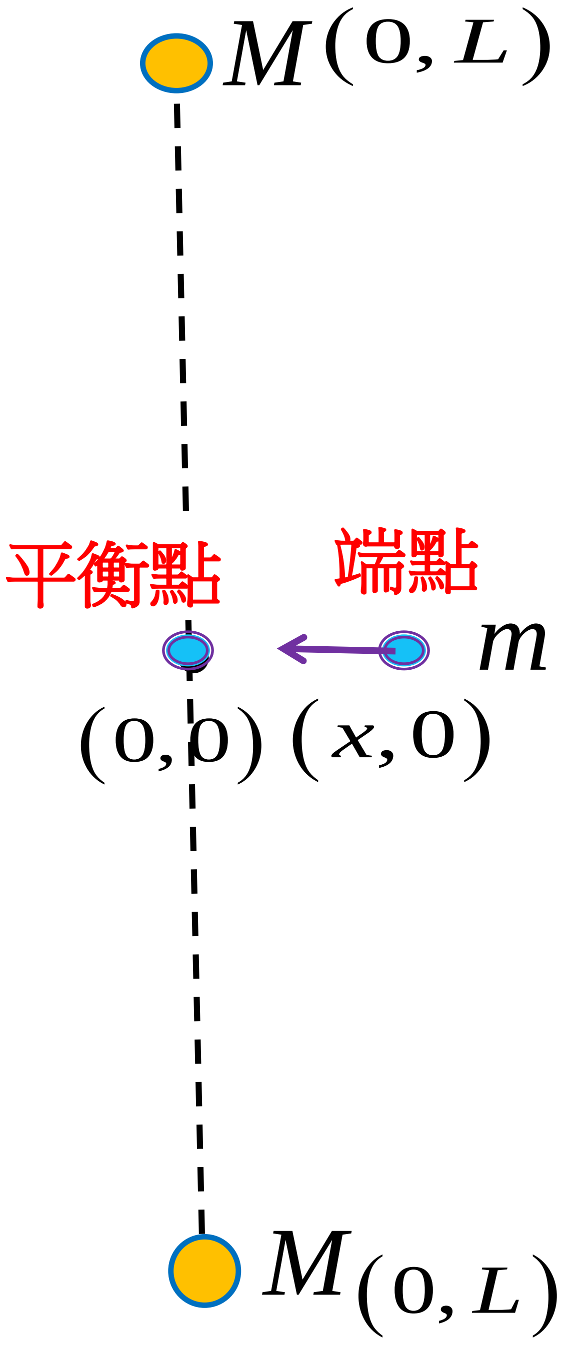
[解析]

$$\because F=\frac{2GMm}{L^3}x=kx......SHM$$

$$k=\frac{2GMm}{L^3}$$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2GMm}{L^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{2GM}}$$

端點到平衡點歷時 $t=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2GM}}$

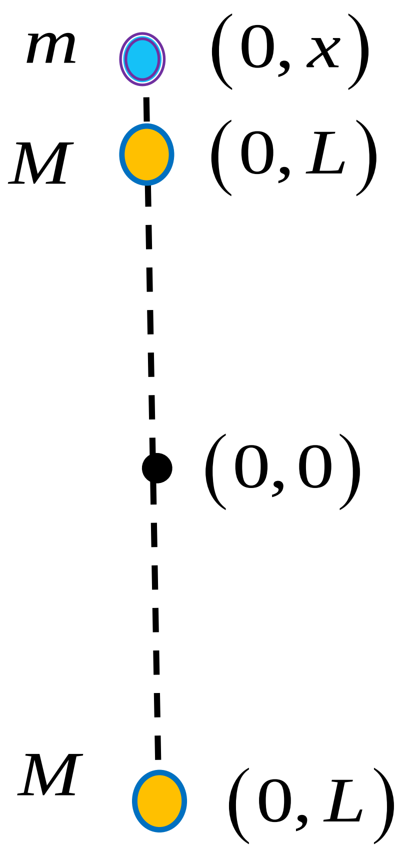


2.有兩個質量均為$M$的質點，位置固定在 (0，$L$) 及 (0，$-L$) 上，如圖所示。今在位置為 (0，$x$) 處$x>L>0$放置質量為$m$之質點，試求：

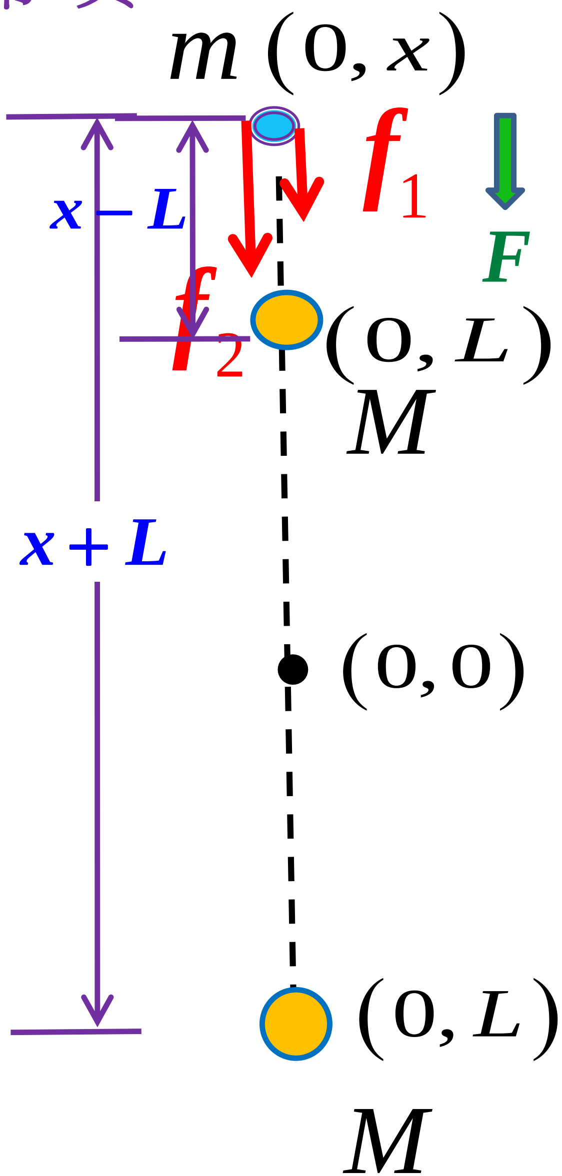
(A) 質量為$m$之質點所受引力為？

(B) 若當$L>>x$時，質量為$m$之質點所受的引力大小為？

(C) 若當$x>>L$時，質量為$m$之質點所受的引力大小為？



[解析]




$$f_1=\frac{GMm}{(x+L)^2}\qquad f_2=\frac{GMm}{(x-L)^2}$$

$$\therefore F=f_1+f_2$$

$$=\frac{GMm}{(x+L)^2}+\frac{GMm}{(x-L)^2}=\frac{2\left(x^2+L^2\right)GMm}{\left(x^2-L^2\right)^2}$$

[解析]

當$L >> x$時，則$L^2 + x^2 \approx L^2$

$$\therefore F = \frac{2\left(x^2 + L^2\right)GMm}{\left(x^2 - L^2\right)^2} \approx \frac{2GMm}{L^2}$$

當$x >> L$時，則$L^2 + x^2 \approx x^2$

$$\therefore F = \frac{2\left(x^2 + L^2\right)GMm}{\left(x^2 - L^2\right)^2} \approx \frac{2GMm}{x^2}$$

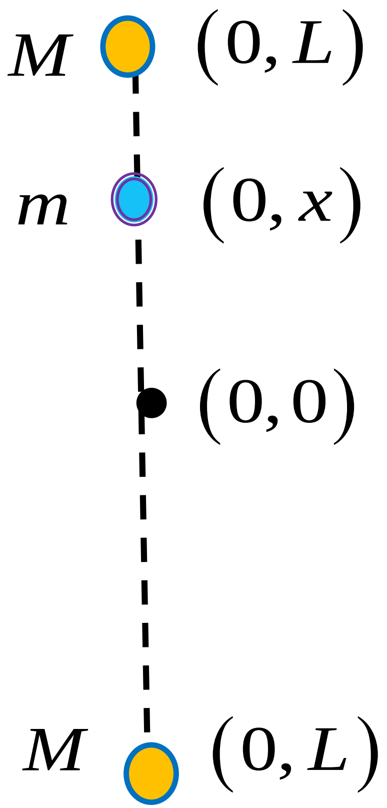
2.有兩個質量均為*M*的質點，位置固定在 (0，*L*) 及 (0，-*L*) 上，如圖所示。今在位置為 (*0* ，*x*) 處， *L>x>0* ，放置質量為*m*之質點，試求：

(A) 質量為*m*之質點所受引力為？

(B) 若當*L>>x*時，質量為*m*之質點所受的引力大小為？

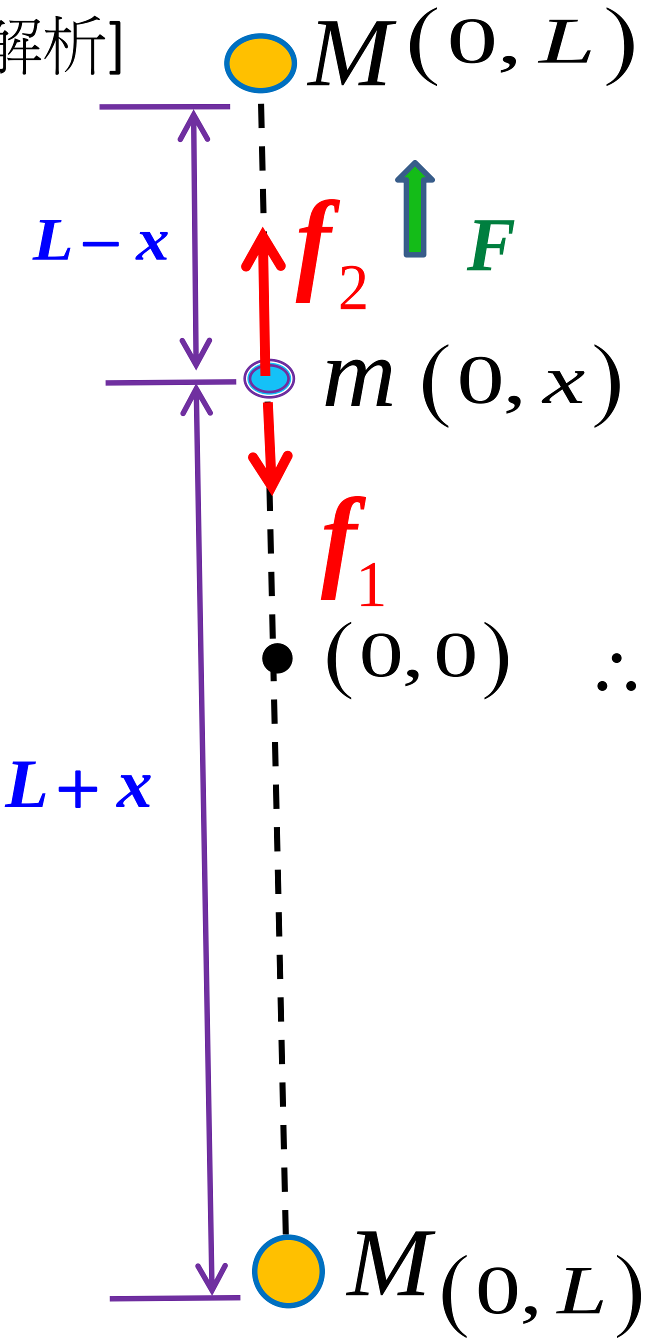
(C) 若當*x>>L*時，質量為*m*之質點所受的引力大小為？

(D) 若當*L>>x*時，若只考慮兩球體對*m*的萬有引力，則將質點*m*由靜止釋放後，須費時多久才能回到中央處？



第1頁

[解析]




$$f_1 = \frac{GMm}{(L+x)^2} \qquad f_2 = \frac{GMm}{(L-x)^2}$$

$$\therefore F = f_1 + f_2$$

$$= \frac{GMm}{(L-x)^2} - \frac{GMm}{(L+x)^2} = \frac{4LxGMm}{\left(x^2 - L^2\right)^2}$$

## 第1頁

[解析]

當$L >> x$時，則$L^2 + x^2 \approx L^2$

$$\therefore F = \frac{4LxGMm}{\left(x^2 - L^2\right)^2} \approx \frac{4GMm}{L^3}x$$

當$x >> L$時，則$L^2 + x^2 \approx x^2$

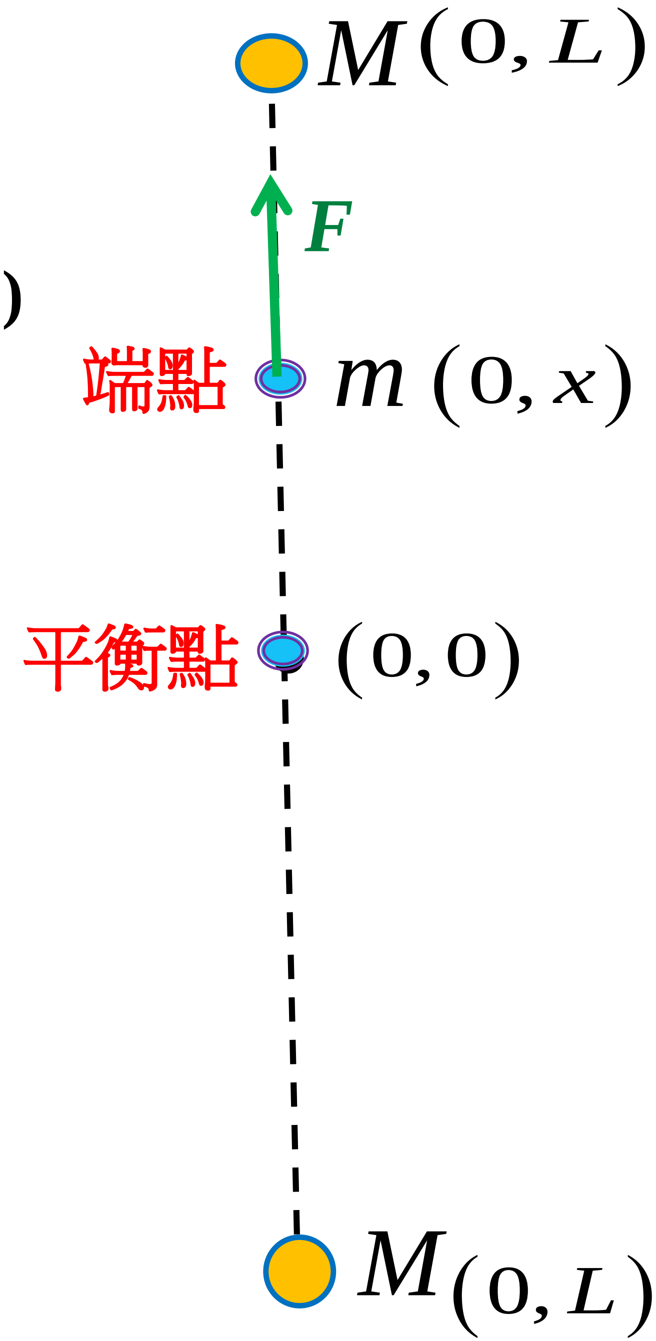
$$\therefore F = \frac{4LxGMm}{\left(x^2 - L^2\right)^2} \approx \frac{4GLMm}{x^3}$$

[解析]

∵ $F$的方向與$x$同向(如圖所示不是指向平衡點)

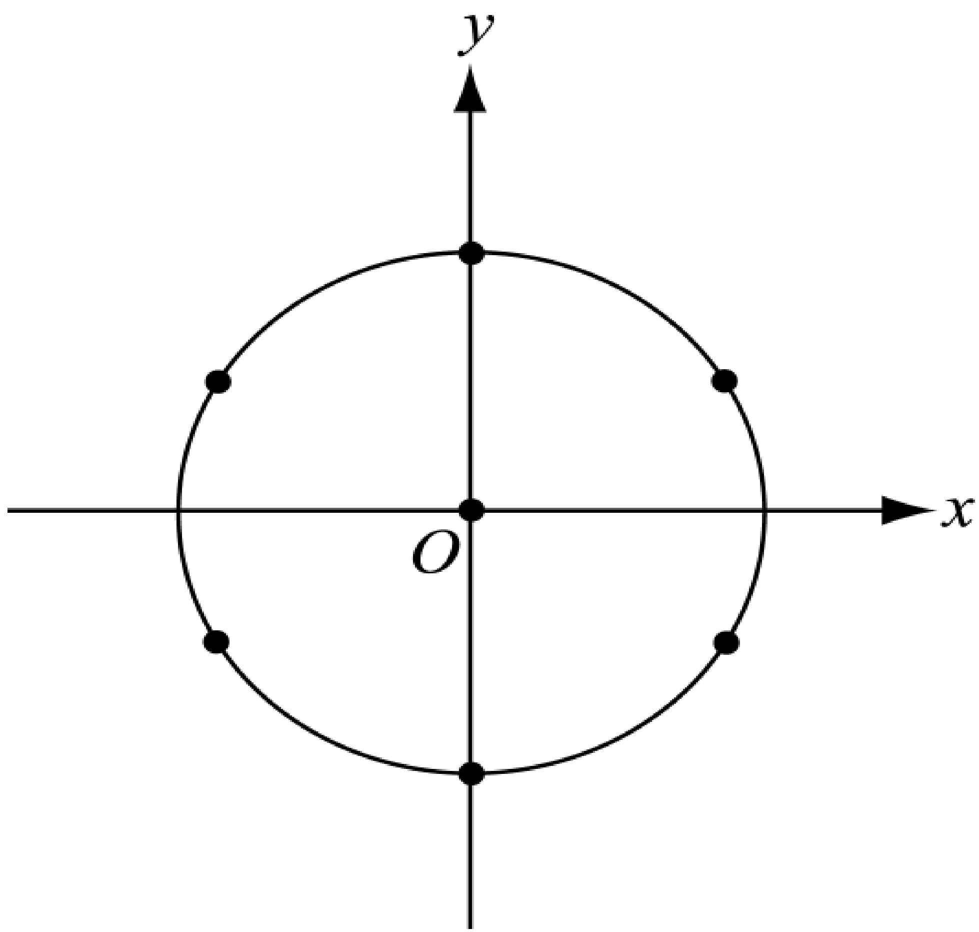
∴ 不是$SHM$　不會回來

端點到平衡點歷時 $t=\frac{1}{4}T=\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM}}$

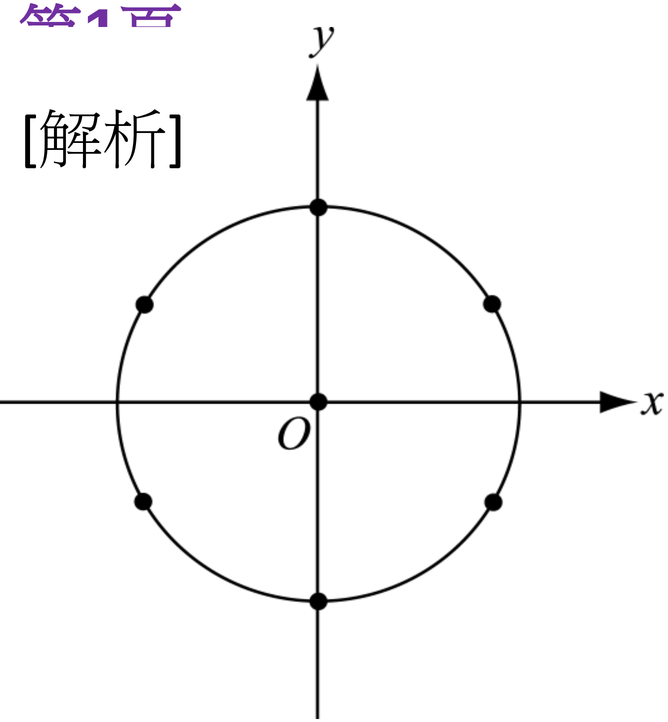


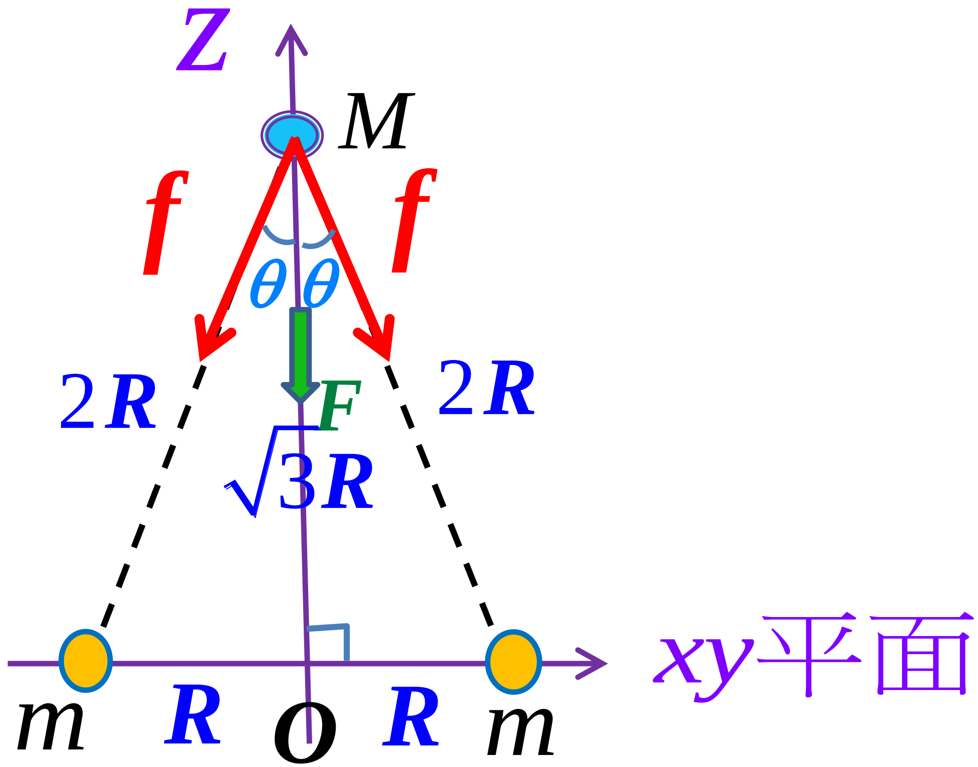
# 第1頁

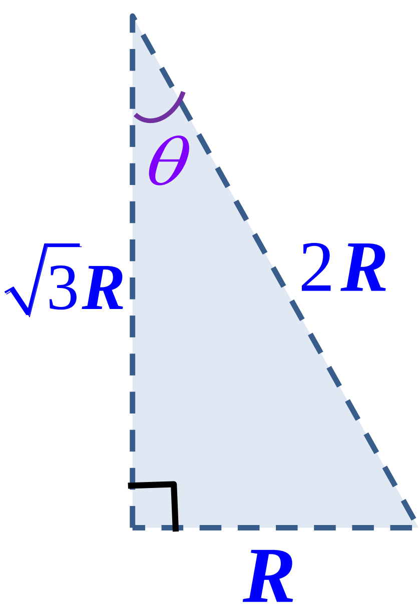
*1.* 如圖所示，在半徑為$R$的圓上，每隔60°固定放置一質量為 $m$之質點，則在通過圓心$O$的$+Z$軸距圓心$\sqrt{3}R$處有一質量為$M$的質點，則該質點所受的萬有引力（$F_x,F_y,F_z$）為何？



[解析]

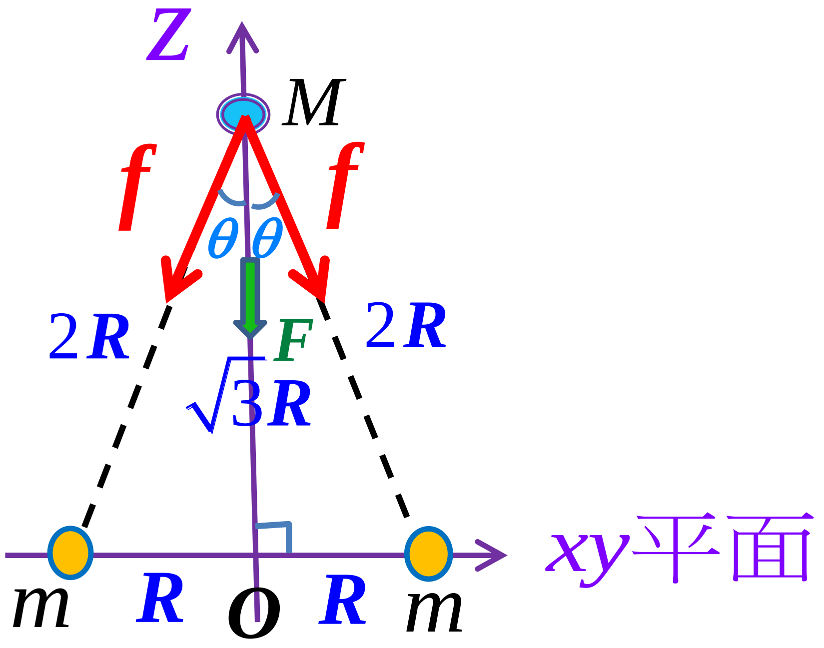



$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ$$

[解析]




$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = 30^\circ$$

$$\therefore F = f\cos\theta \times 6$$

$$= \frac{GMm}{(2R)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}GMm}{4R^2}$$ 方向 $-z$

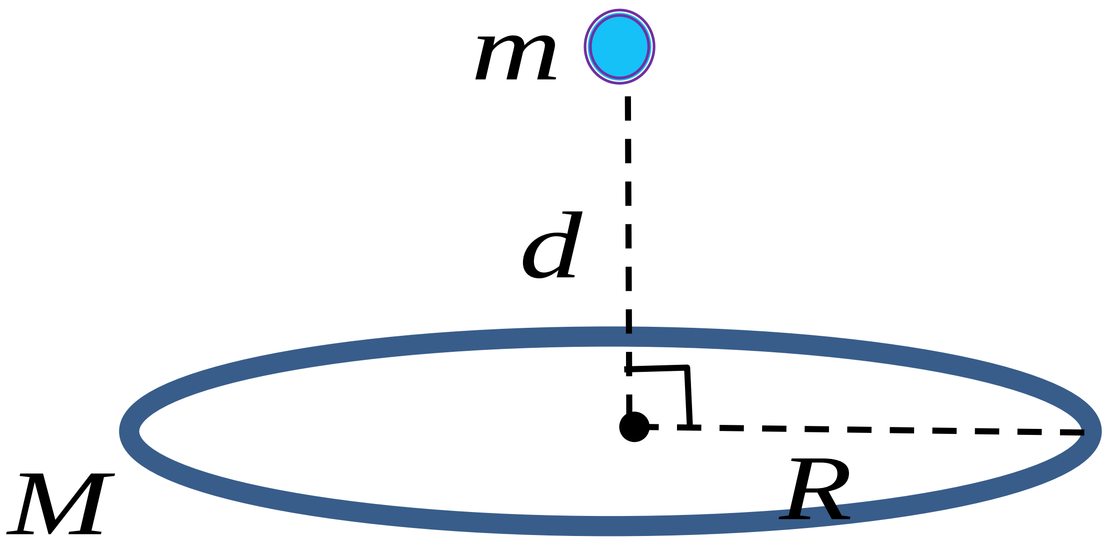
***2.*** 均勻的圓環半徑為*R*（寬度可以不計），質量為*M*，中心軸上距環心*d*處有質量為*m*的質點，試求：

(1) *m*受環的萬有引力量值是多少？

(2) 若*m*置於環心則*m*受環的萬有引力量值是多少？

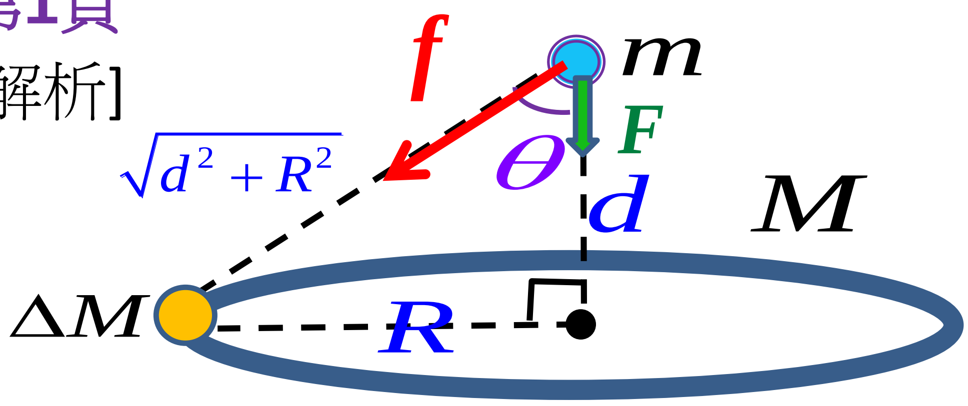
(3) *d*>>*R*時，*m*受環的萬有引力量值是多少？

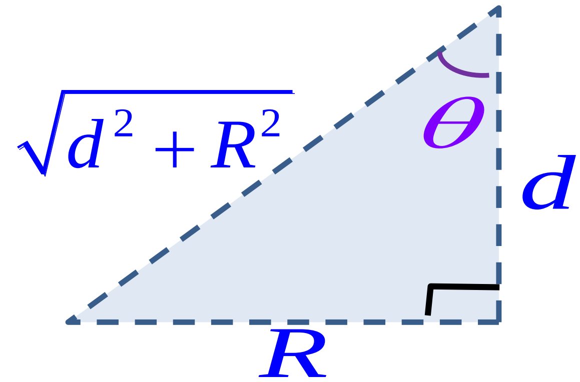
(4) *R*>>*d*時，將質點從靜止釋放，則質點*m*會如何運動？週期為何？



第1頁

[解析]




△$M$對$m$的萬有引力大小為 $f=\dfrac{G\Delta Mm}{\left(R^2+d^2\right)}$

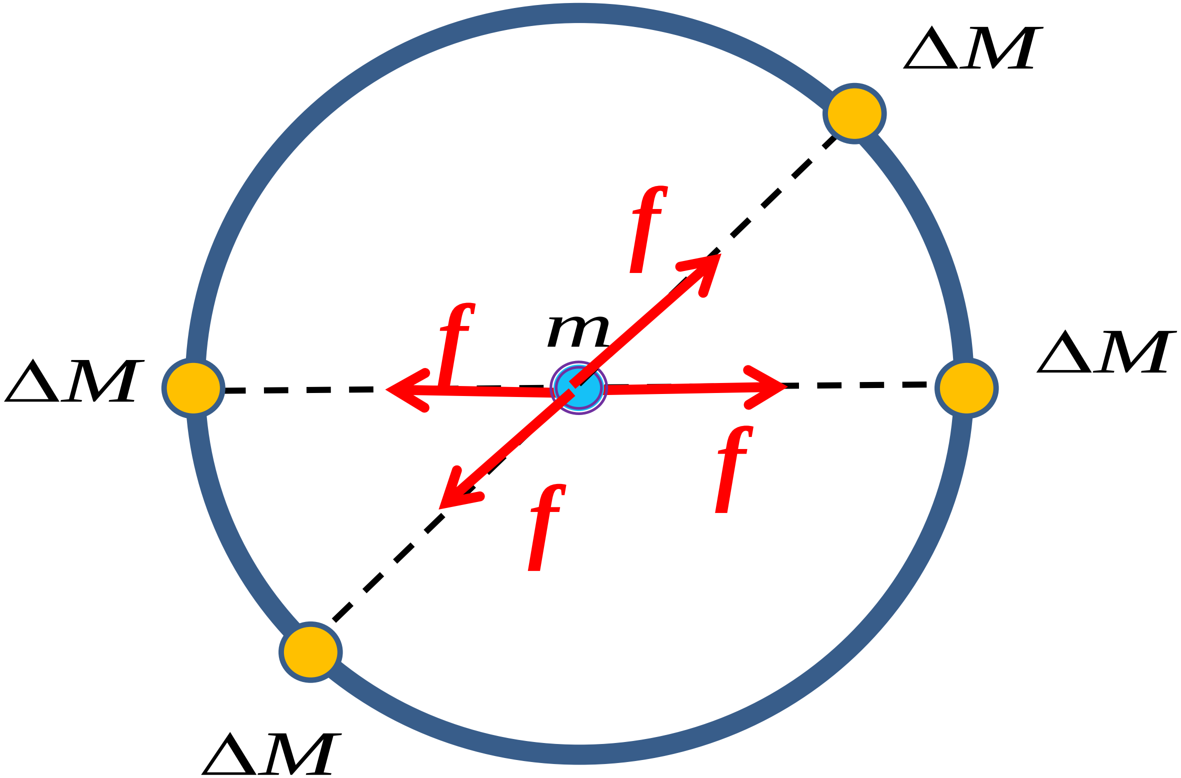
$f$ 在與軸垂直的方向上的分量 $f\sin\theta$（與軸垂直的方向成對抵銷）

$f$ 在軸上的分量 $f\cos\theta=\dfrac{G\Delta Mm}{\left(R^2+d^2\right)}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}=\dfrac{G\Delta Mmd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}$

整個環對$m$的萬有引力的和

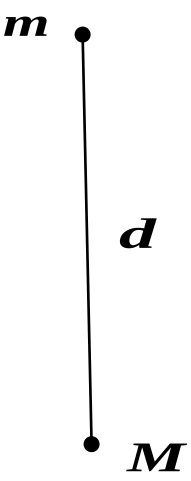
$$F=\sum_i f_i\cos\theta=\sum_i\frac{G\Delta M_i m}{\left(R^2+d^2\right)}\cdot\frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}=\frac{G\sum_i\Delta M_i md}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}=\frac{GMmd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}$$

[解析]



# 第1頁

[解析]




若$d>>R$時 $R^2+d^2 \approx d^2$

$$F=\frac{GMmd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}} \approx \frac{GMmd}{\left(d^2\right)^{3/2}}=\frac{GMm}{d^2}$$

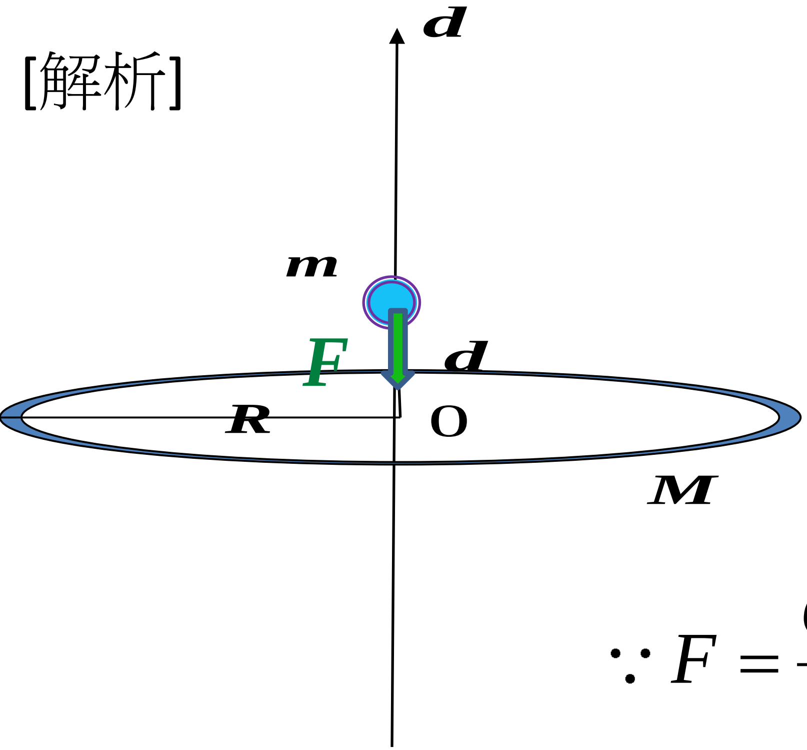
若$R>>d$時

$$R^2+d^2 \approx R^2$$

$$F=\frac{GMmd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}} \approx \frac{GMmd}{\left(R^2\right)^{3/2}}=\frac{GMm}{R^3}d$$

# 第1頁

[解析]

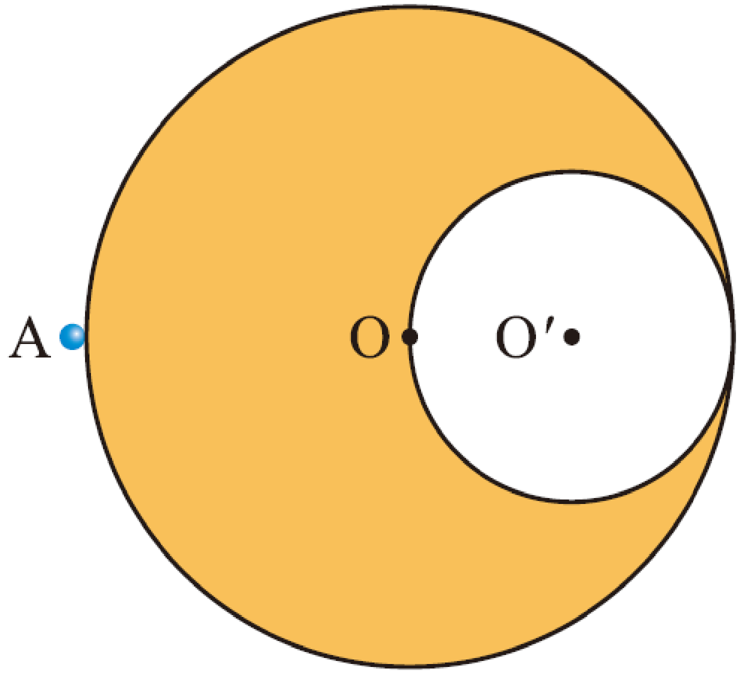



$$\because F=\frac{GMm}{R^3}d=kd\ldots SHM$$

$$k=\frac{GMm}{R^3}$$

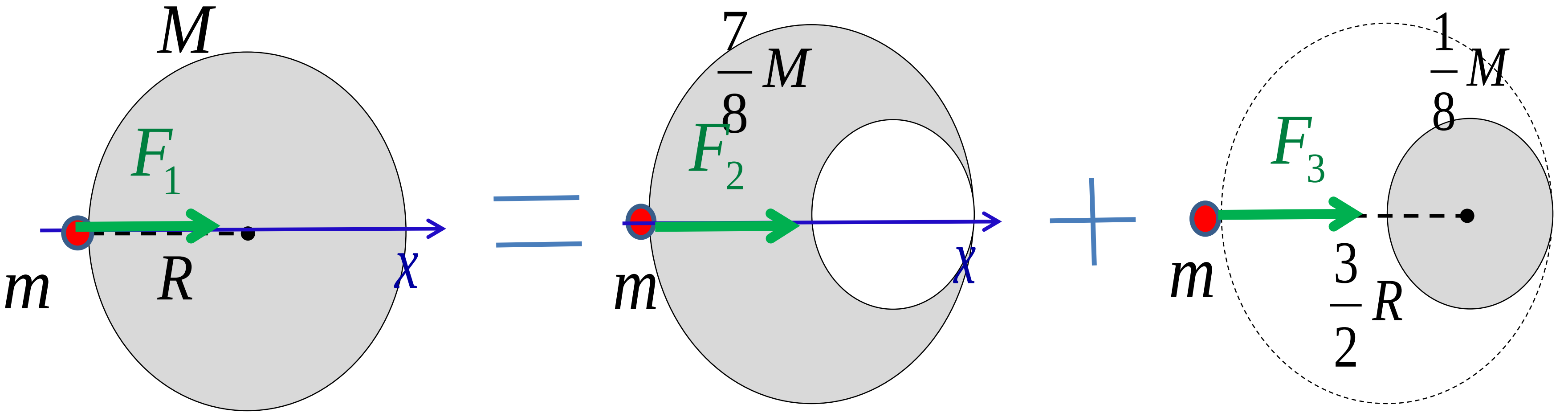
$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

將一質量為$M$且半徑為$R$的球挖去直徑為$R$之內切小球（球心為O'），如右圖所示，再將一質量為$m$的質點放在A點時（A、O、O'位於同一直線），則質點所受的萬有引力為若干？



第45頁

[解析]

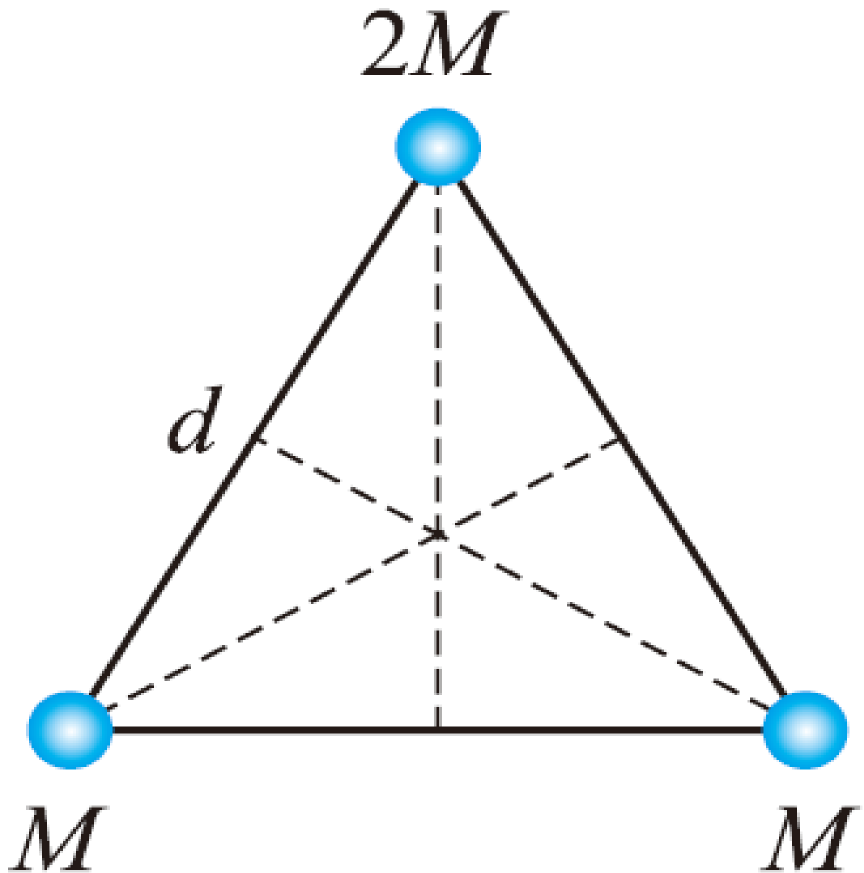



$$F_1 = \frac{GMm}{R^2} \qquad F_3 = \frac{G\frac{1}{8}Mm}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = \frac{GMm}{18R^2}$$

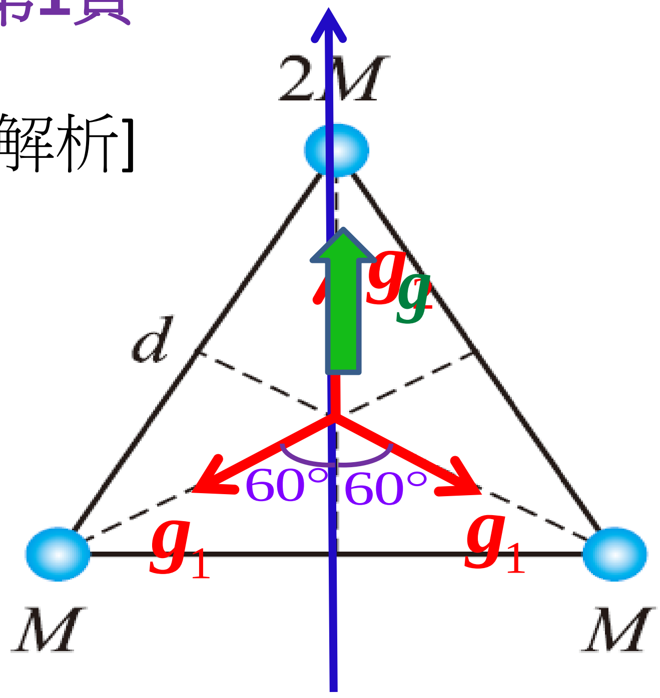
$$F_1 = F_2 + F_3 \rightarrow F_2 = F_1 - F_3 = \frac{GMm}{R^2} - \frac{GMm}{18R^2} = \frac{17GMm}{18R^2}$$

## 第1頁

1.如圖所示，在邊長為$d$的正三角形頂點分別放置質點，其質量分別為$M$、$M$及$2M$。在三角形重心的重力場強度大小為何？



[解析]




$$g_1=\frac{GM}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}=\frac{3GM}{d^2}$$

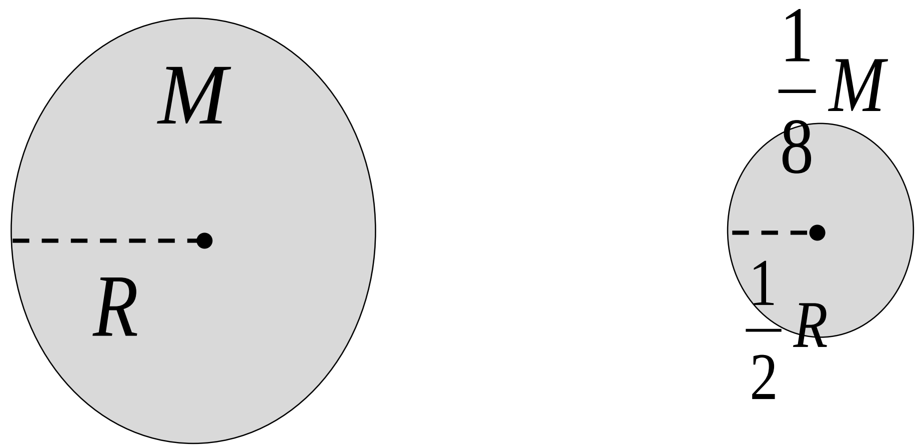
$$g_2=\frac{2GM}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}=\frac{6GM}{d^2}$$

$$\therefore g=g_2-g_1=\frac{6GM}{d^2}-\frac{3GM}{d^2}\times\cos 60^\circ\times 2=\frac{3GM}{d^2}$$

# 第1頁

2.一個密度均勻的星球分裂為8個密度不變，質量相等的星球。則每個星球表面的重力加速度變為原來的若干倍?

[解析]




$$\therefore g=\frac{GM}{R^2}\propto\frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

*3.*有一單擺在地面上的週期為*T*，在某高處的週期為*T′*，則某高處的離地高度與地球半徑的比值為？

[解析]

$$g=\frac{GM}{R^2}\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\propto R$$

$$\frac{T'}{T}=\frac{R+h}{R}=1+\frac{h}{R}$$

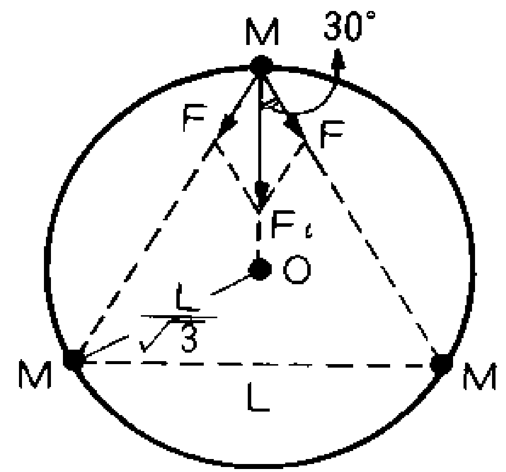
$$\therefore \frac{h}{R}=1-\frac{T'}{T}$$

第1頁

註：**三星運動**

如圖所示，質量為*M*且兩兩相距*L*之三個星球成一獨立系統而環繞共同質心運轉

軌道半徑 $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L=\frac{\sqrt{3}}{3}L$




萬有引力

$$F_t=2F\cos 30^\circ=2\cdot\frac{GM^2}{L^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2}$$

$$\left[F=ma_C\right]\qquad \frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2}=M\frac{v^2}{r}=M\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

週期 $T=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{3GM}}$　　軌道速率 $v=\sqrt{\frac{GM}{L}}$

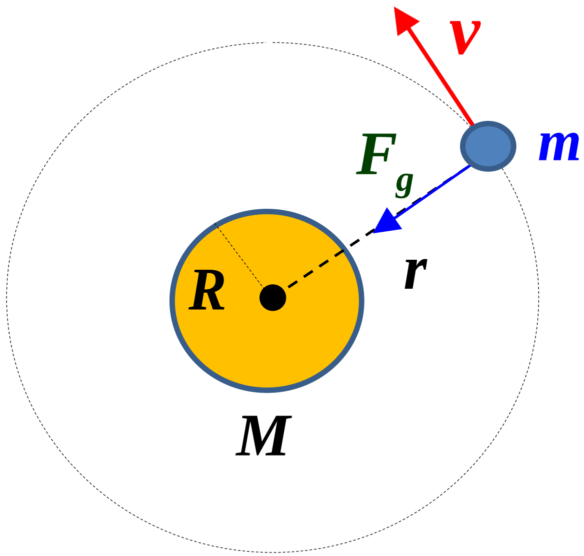
# 第1頁

**1.**半徑為$R$的一行星，旁有一質量為$m$的小衛星繞其轉動，軌道半徑為$r$，週期為$T$萬有引力常數為$G$，則：
(A)此行星的質量為？ (B)衛星的加速度為？
(C)衛星所受行星的引力為？ (D)行星表面的重力加速度為？
(E)行星的密度為？ 。

[解析]

等速率圓周運動 $\left[\sum F = ma_c\right]$ (萬有引力＝圓周運動的向心力)

$$(A)\ \frac{GMm}{r^2} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$




$$(B)\ g_1 = a_C = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$(C)\ F_g = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$(D)\ g_2 = \frac{GM}{R^2} = \frac{G\dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}{R^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{R^2 T^2}$$

$$(E)\ \frac{M}{V} = \frac{\dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}{\dfrac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi r^3}{GT^2 R^3}$$

2.如果萬有引力定律中兩質點間引力的大小與其距離的$n$次方( $n \neq 2$ )成反比，考慮一群以圓形軌道繞行同一恆星的行星，設各行星的週期與其軌道半徑的平方成正比，則$n$的值應為？

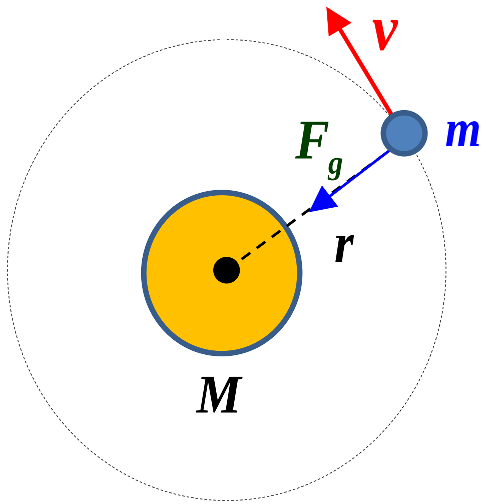
[解析]

等速率圓周運動 $\left[\sum F = ma_c\right]$ (萬有引力＝圓周運動的向心力)

$$\frac{GMm}{r^n} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \rightarrow \frac{r^{(n+1)}}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \rightarrow T \propto r^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\because \frac{n+1}{2} = 2 \quad \therefore n = 3$$

1.繞同一星球中心作圓周運動的二顆衛星之週期比為*27：1*，則
（A）軌道半徑比為？　（B）速率比為？
（C）向心加速度之大小比為？　（D）向心力之大小的比為？
（E）掠掃之面積速率的比為？




[解析]

$$(A)\ \frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\rightarrow \frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\rightarrow r\propto T^{\frac{2}{3}}$$

$$\because T_1:T_2=27:1 \quad \therefore r_1:r_2=9:1$$

$$(B)\ \frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\rightarrow rv^2=GM\rightarrow v\propto r^{-\frac{1}{2}}$$

$$\because r_1:r_2=9:1 \quad \therefore v_1:v_2=1:3$$

# 第1頁

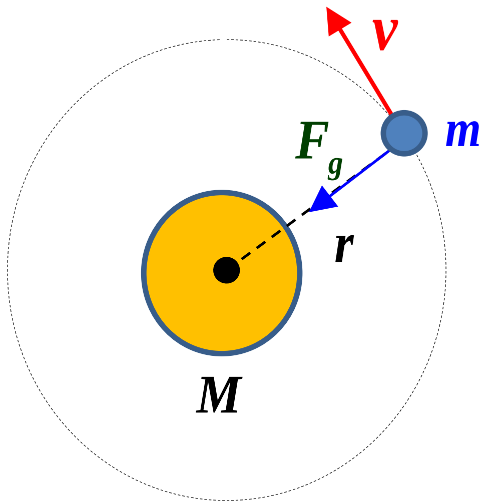
[解析]

$$(C)\frac{GMm}{r^2}=ma_C \to a_C=\frac{GM}{r^2}\propto\frac{1}{r^2}$$

$$\because r_1:r_2=9:1 \quad \therefore a_1:a_2=1:81$$

$$(D)\frac{GMm}{r^2}=F_C \to F_C=\frac{GMm}{r^2}\propto\frac{m}{r^2}$$

$\because m$關係未知 $\therefore F_C$關係未知




$$(E)\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\pi r^2}{T}\propto\frac{T^{\frac{4}{3}}}{T}=T^{\frac{1}{3}}$$

$$\because T_1:T_2=27:1 \quad \therefore \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_1:\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_2=3:1$$

*2*.設由兩相距甚遠之恆星*A*與*B*，平均密度比為$\rho_A$：$\rho_B$=1：2，質量比為$M_A$：$M_B$=4：1，如果兩恆星旁各有一質量同為m的小行星分別以圓軌道繞*A*與*B*運動，假設繞行的軌道半徑相同，則：

（*a*）此兩恆星之半徑比$R_A$：$R_B$為？

（*b*）此兩恆星表面之重力加速度比$g_A$：$g_B$為？

（*c*）兩行星之週期比為$T_A$：$T_B$為？

[解析]

（$a$）

$$\left[M = DV\right] M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow R \propto \left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\because \rho_A : \rho_B = 1:2 \qquad M_A : M_B = 4:1$$

$$\therefore R_A : R_B = \left(\frac{4}{1}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2:1$$

（$b$）

$$g = \frac{GM}{R^2} \propto \frac{M}{R^2} \qquad \therefore g_A : g_B = \frac{4}{2^2} : \frac{1}{1} = 1:1$$

[解析]

（$c$）

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\rightarrow\frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\rightarrow T\propto M^{-\frac{1}{2}}$$

$$\because M_1:M_2=4:1\qquad\therefore T_1:T_2=1:2$$

*1.*地球半徑為*R*，距地心*r*處有一同步衛星；密度和地球相同之*A*星球，半徑2*R*，距其球心2*r*處亦有一同步衛星，則*A*星球之自轉週期為？

[解析]

**令星球半徑*R* 密度*D* 衛星軌道*r***

$$\begin{cases} M = D\dfrac{4}{3}\pi R^3 \\ \dfrac{GMm}{R^2} = m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2} \rightarrow T = \left(\dfrac{4\pi^2 R^2 r}{GM}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{4\pi^2 R^2 r}{GD\dfrac{4}{3}\pi R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \propto \left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\therefore T_{地} : T_A = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{2r}{2R}\right)^{\frac{1}{2}} = 1:1$$

2.某行星的半徑為地球的兩倍，密度為地球的3倍，則其表面運行的衛星與地球表面人造衛星

(1)週期比？ (2)速率比？ (3)向心加速度量值比？

[解析]

令星球半徑$R$ 密度$D$ 衛星軌道$R$

$$M = D\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$(A)\ \frac{GMm}{R^2} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \rightarrow T = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{GM}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{GD\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \propto \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore T_{行} : T_{地} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 : \sqrt{3}$$

$$(B)\frac{GMm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\rightarrow v=\left(\frac{GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{GD\frac{4}{3}\pi R^3}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\propto\left(R^2D\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore v_{行}:v_{地}=\left(2^2\times 3\right)^{\frac{1}{2}}:\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}:1$$

$$(C)a_C=\frac{GM}{R^2}=\frac{GD\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}\propto DR$$

$$\therefore a_{行}:a_{地}=3\times 2:1=6:1$$

# 【補充】萬有引力定律的應用

## 一、牛頓的球殼定理：

均勻密度的球殼，對殼內物體的萬有引力合力為零。

[說明]

任取通過m之任一小角度對稱角錐, 錐面的球殼質量各為$M_1$ $M_2$ ,

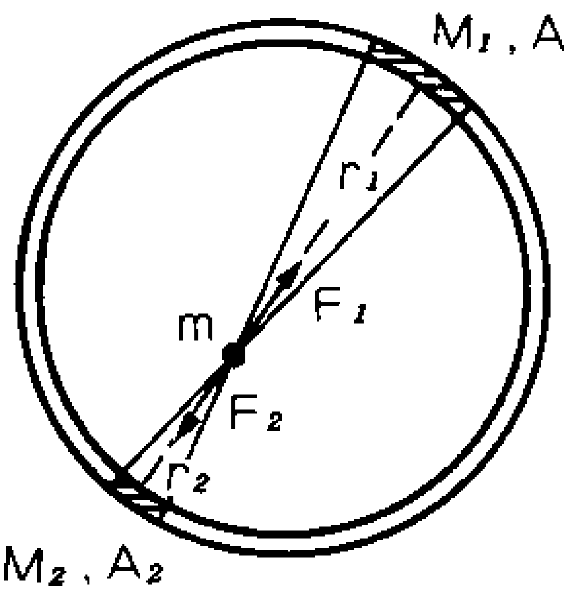
面積各為$A_1$ $A_2$ , m距兩錐面各為$r_1$ $r_2$ ,

兩錐面球殼對m的引力$F_1$ $F_2$ :

$$\because \frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}=\frac{M_1}{M_2}\rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{GM_1m/r_1^{\,2}}{GM_2m/r_2^{\,2}}=1$$

, 且$F_1$ $F_2$方向相反

$\therefore F_1$ $F_2$抵銷



## （1）（球殼定理）均勻薄球殼：（半徑$R$、質量$M$）

**1 球殼內部 ：**

任何成對的兩個角錐的錐面對質點$m$的萬有引力大小相等方向相反互相抵銷，而整個球殼可以看成一些成對的錐面的組合，故球殼對球殼內的質點$m$的萬有引力為$0$。

**2 球殼外部 ：**

假設球殼外的質點$m$，距離球心$r$，計算質點$m$所受的萬有引力，可以將球殼所有的質量$M$視為集中於球殼的球心，

質點$m$所受的萬有引力為

$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}$$

**（2）（密度均勻）實心球**（可視為許多球殼的組合）

質量$M$、半徑$R$

**1 球外**（r≧R）：

假設球外質點$m$距離球心$r$，受實體球的萬有引力為

$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}$$

可以將球殼所有的質量$M$視為集中於球殼的球心

**2 球內（r≦R）：**

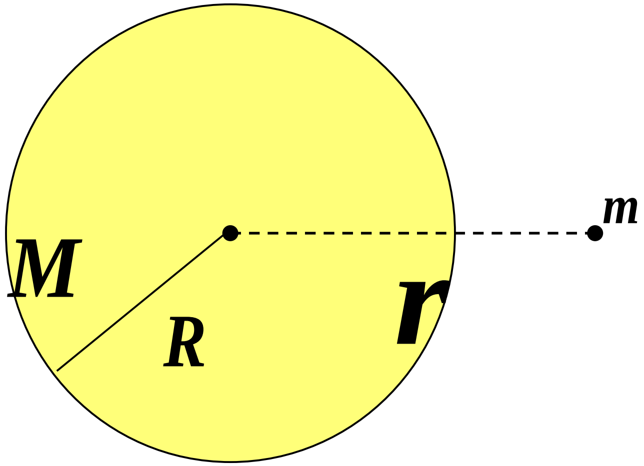
如圖，做一通過球內的質點*m*的同心圓，將原來的實體球分成兩部份。一為在圓內的小實體球，與在圓外的球殼。

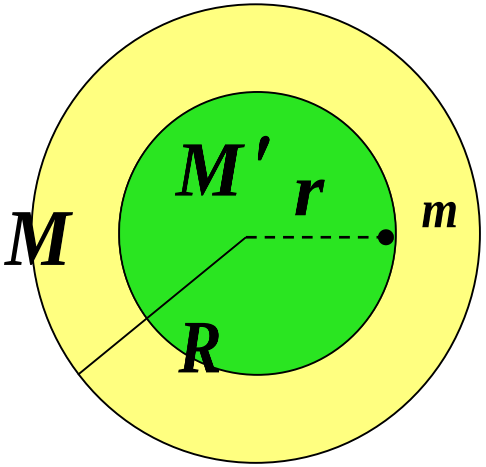
在此圓外的球殼對質點*m*的萬有引力為*0*。

而在圓內的小實體球（質量為 $M' = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \dfrac{r^3}{R^3} M$ ）對質點*m*的萬有引力則為

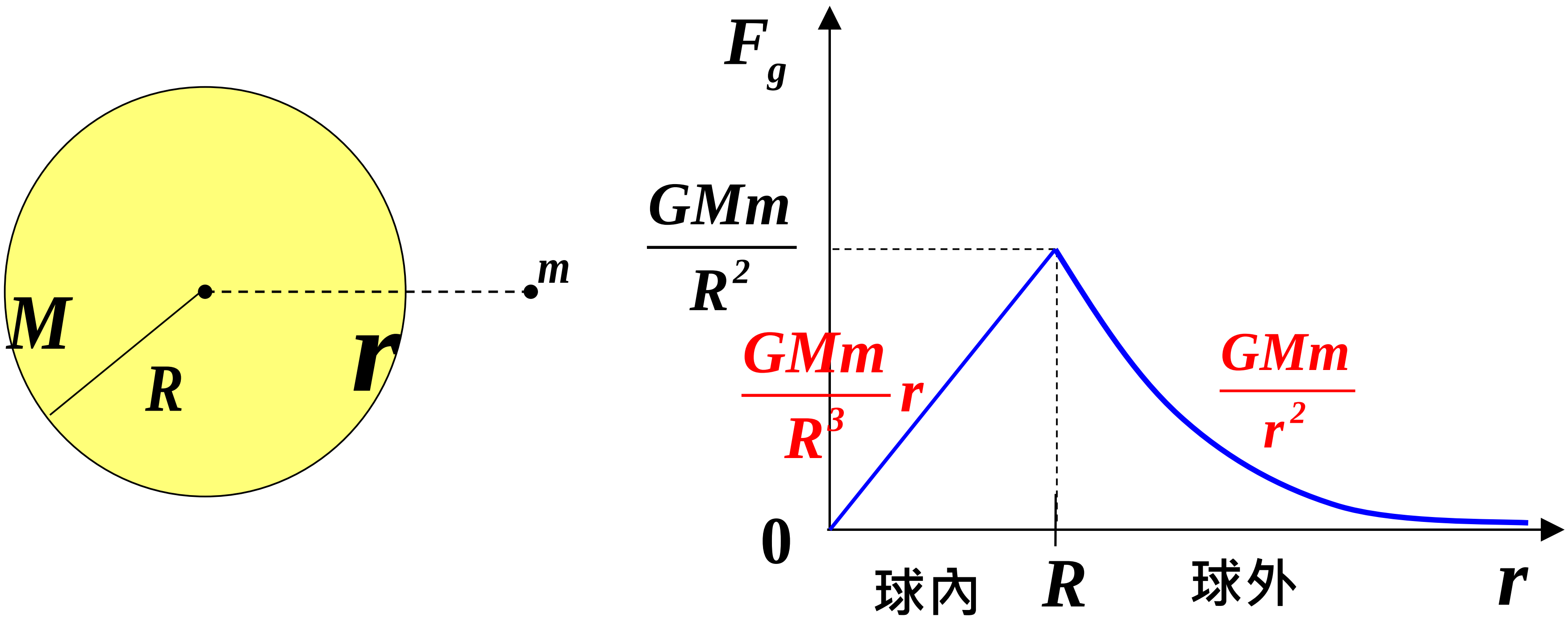
$$\boxed{F = \frac{GM'm}{r^2} = \frac{GMm}{R^3} r}$$

（與距球心的距離*r*成正比）



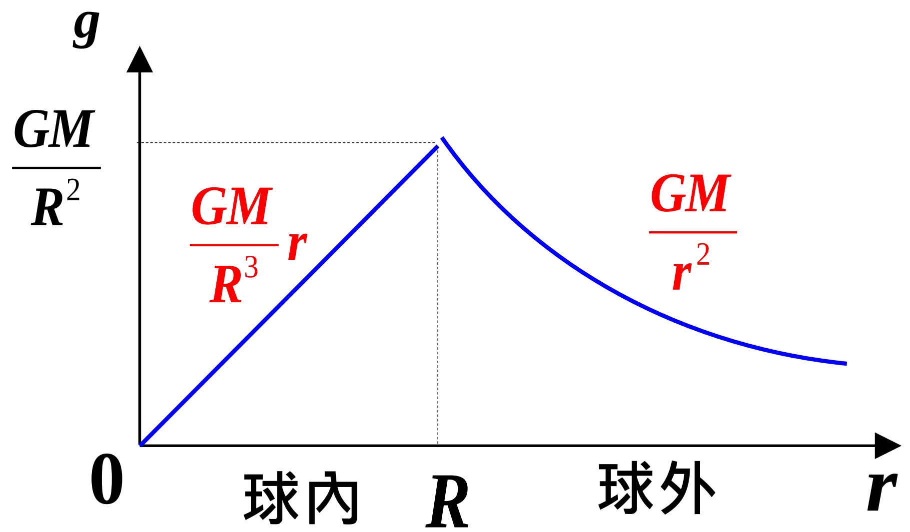



3. 萬有引力 $F_g$ 與距離球心 $r$ 的關係圖：球半徑 R



# （3）重力場（重力加速度）：

## 1 密度均勻的實心球所建立的重力場



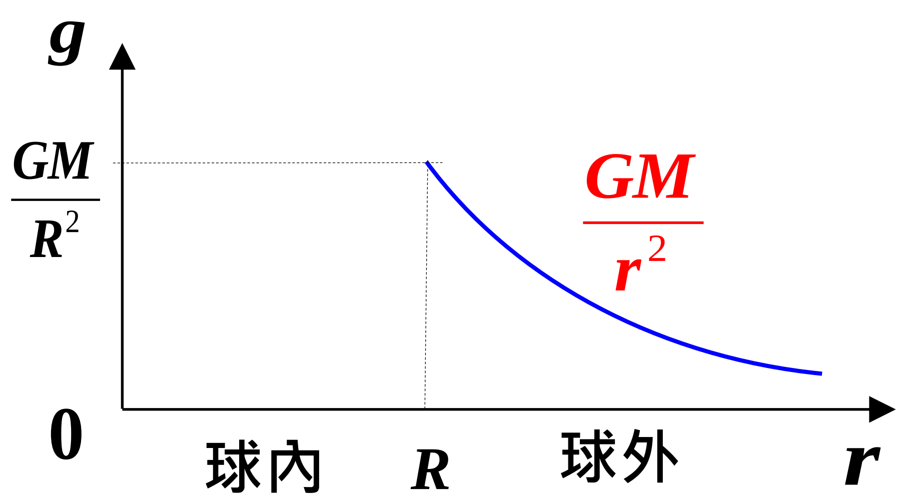

球外：$\boxed{g=\frac{GM}{r^2}}$

球內：$\boxed{g=\frac{GM}{R^3}r}$

球心：$\boxed{g=0}$

[證明] $g=\frac{F}{m}=\frac{G}{r^2}\left(M\times\frac{r^3}{R^3}\right)=\frac{GM}{R^3}r$

## 2 空心球殼所建立的重力場：




球殼內部 $\boxed{g = 0}$

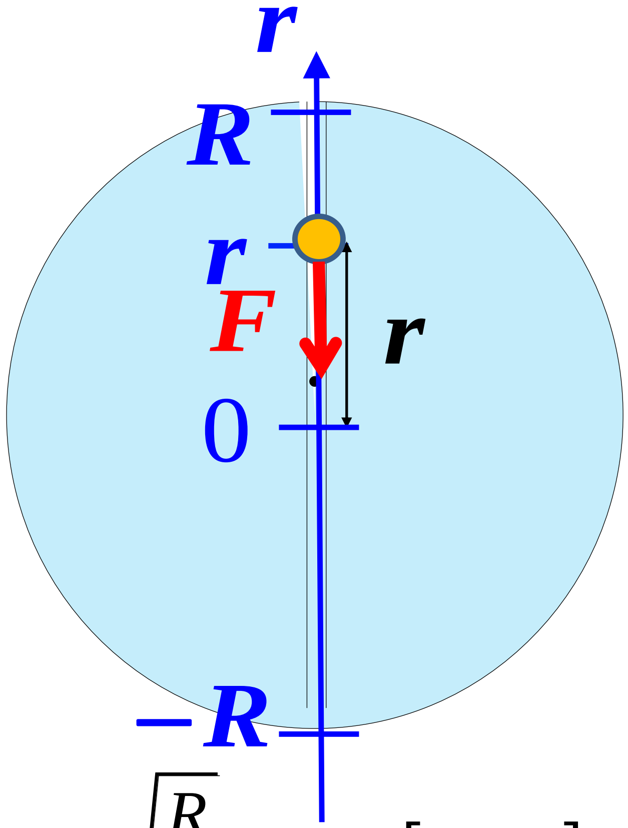
球殼外部： $\boxed{g = \frac{GM}{r^2}}$

## （4）通過密度均勻實心球心的直線光滑隧道物體的運動

挖一條穿過球心的隧道，一物體落入隧道將做簡諧運動。

球半徑$R$，質量$M$

當物體距離球心$r$處，萬有引力




$$F=\frac{GMm}{R^3}r$$ 指向地心

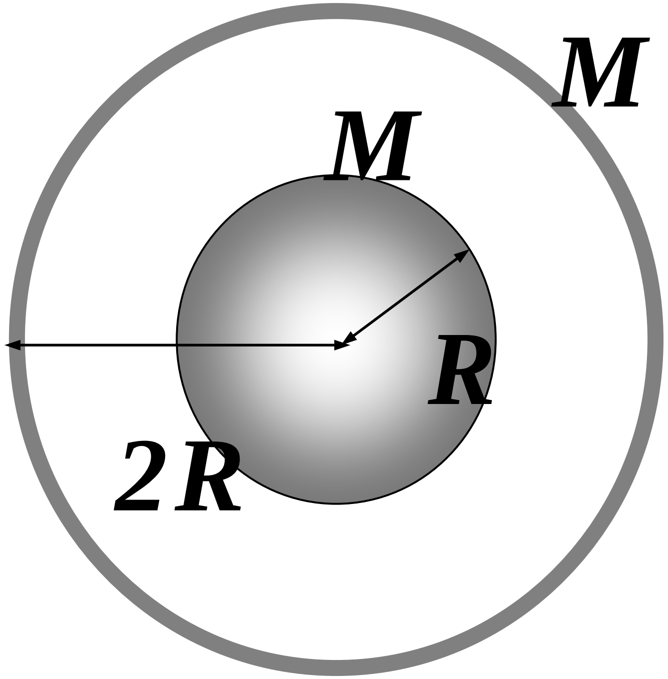
與簡諧運動 $\vec{F}=-k\vec{r}$

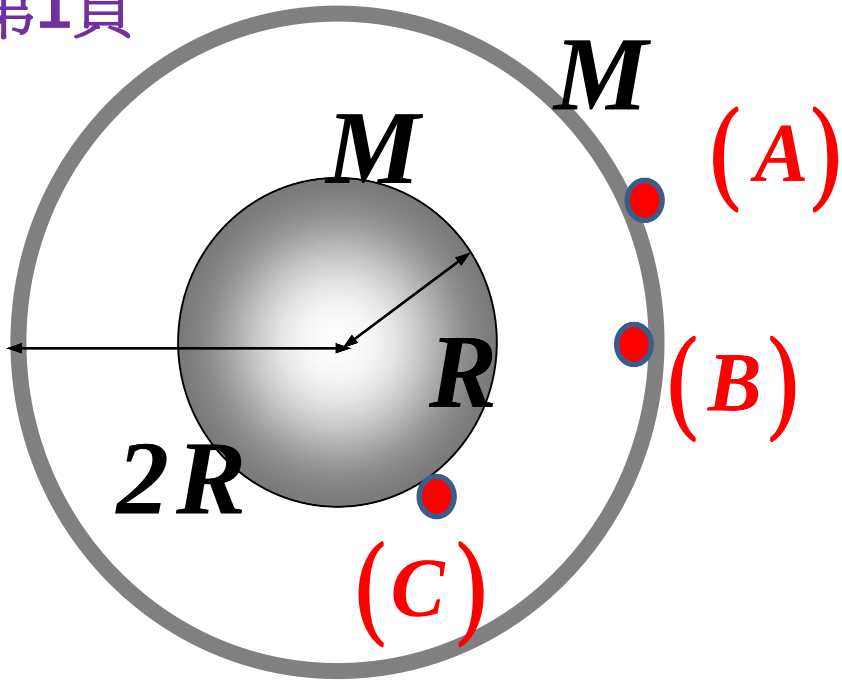
比較 $k=\dfrac{GMm}{R^3}$

週期 $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R^3}}}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\approx 84.2[\text{分鐘}]$$

似地表衛星週期

***1.*** 圖示，質量*M*的薄球殼（厚度不計）中心處有一相同質量M的小球（兩者球心位置相同）， 已知小球半徑為*R*，在不同位置處的重力場強渡，則：
（A）球殼的外表面處重力場強渡為？
（B）球殼的內表面處重力場強渡為？
（C）小球的表面處重力場強渡為？。





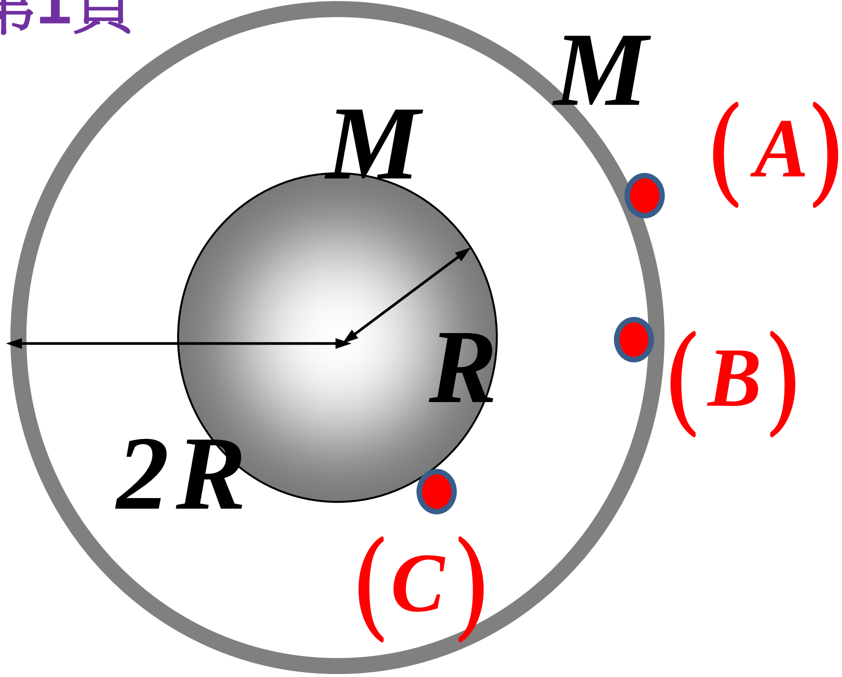

$$g = g_{球殼} + g_{小球}$$

(A)

$$球殼外：g_{球殼} = \frac{GM}{(2R)^2} = \frac{GM}{4R^2}$$

$$小球外：g_{小球} = \frac{GM}{(2R)^2} = \frac{GM}{4R^2}$$

$$\therefore g = g_{球殼} + g_{小球} = \frac{GM}{4R^2} + \frac{GM}{4R^2} = \frac{GM}{2R^2}(指向球心)$$

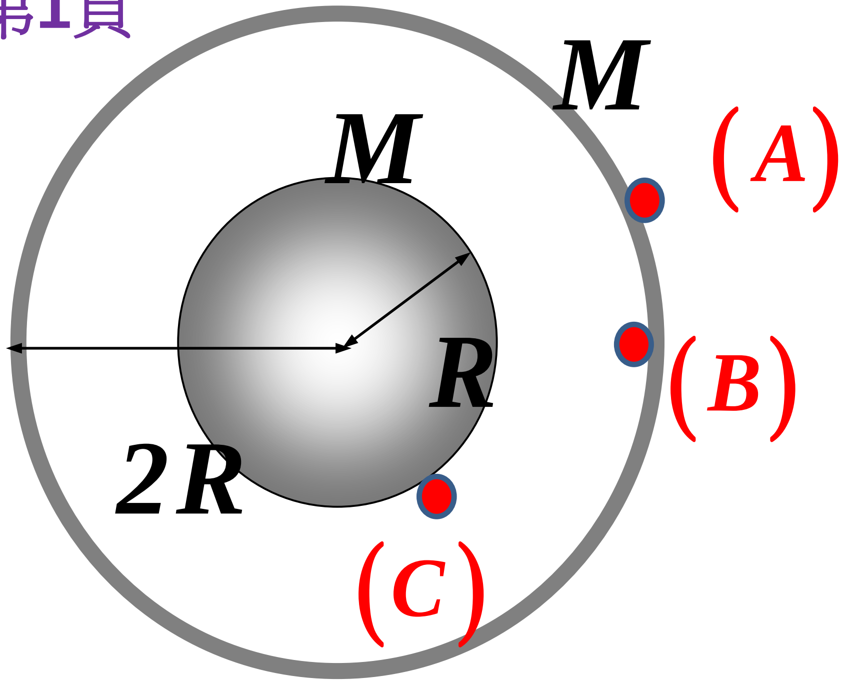



$$g = g_{球殼} + g_{小球}$$

(B) 球殼內：$g_{球殼} = 0$

小球外：$g_{小球} = \dfrac{GM}{(2R)^2} = \dfrac{GM}{4R^2}$

$$\therefore g = g_{球殼} + g_{小球} = 0 + \frac{GM}{4R^2} = \frac{GM}{4R^2}$$ (指向球心)




$$g = g_{球殼} + g_{小球}$$

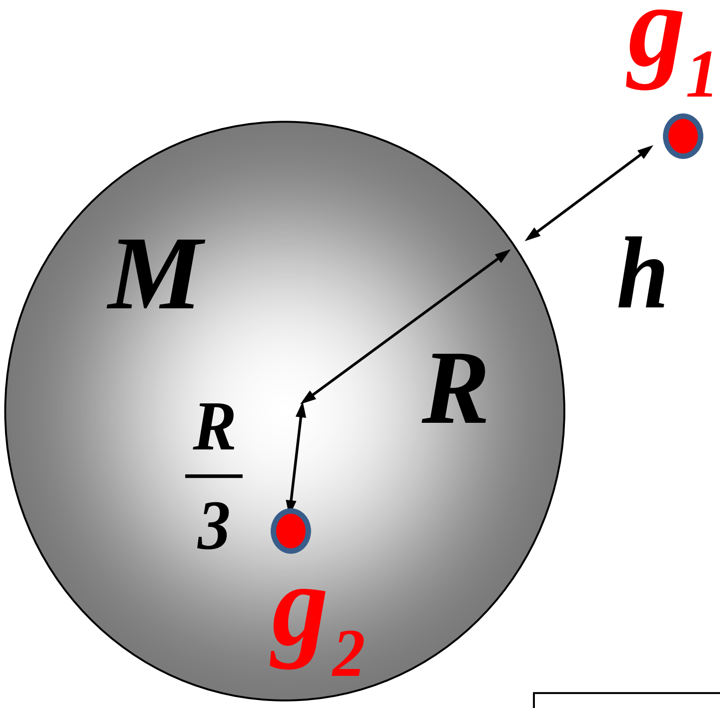
$(C)$

$$球殼內: g_{球殼} = 0$$

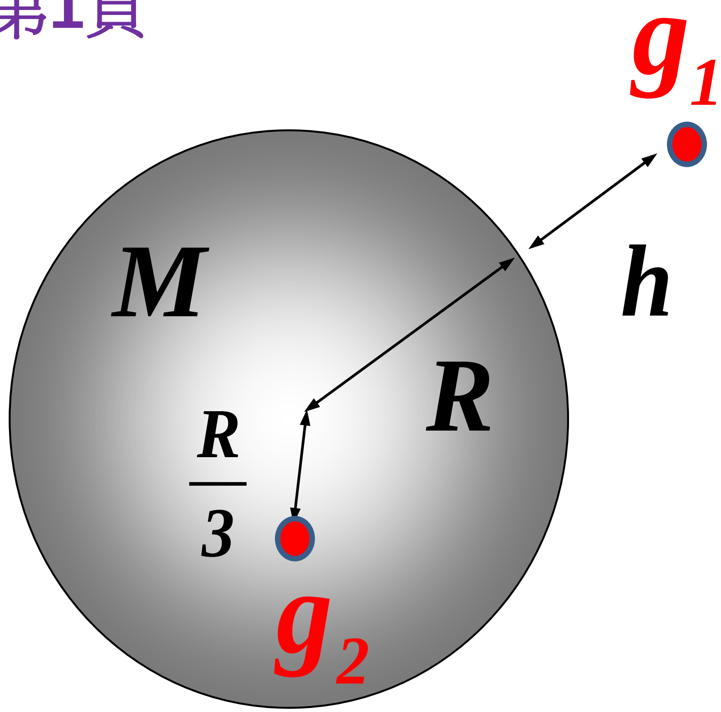
$$小球外: g_{小球} = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore g = g_{球殼} + g_{小球} = 0 + \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2}(指向球心)$$

**2.** 設地球為密度均勻的實心球，地球半徑$R$，離地心$\frac{R}{3}$處，與地球表面外離地$h$高處之重力場強度相同，則$h$為何?




實心球內部重力場 $g=\frac{GM}{R^3}x$




$$g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$g_2 = \frac{GM}{R^3} \times \frac{R}{3} = \frac{GM}{3R^2}$$

$$g_1 = g_2 \qquad \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{3R^2} \rightarrow R+h = \sqrt{3}R$$

$$\therefore h = \left(\sqrt{3}-1\right)R$$

# 第1頁

若地球為均質的球體，質量為*M*，半徑為*R*。現由北極通過地心挖一地道至南極，將一物由洞口靜止釋放。若忽略其他阻力，萬有引力常數G，則：

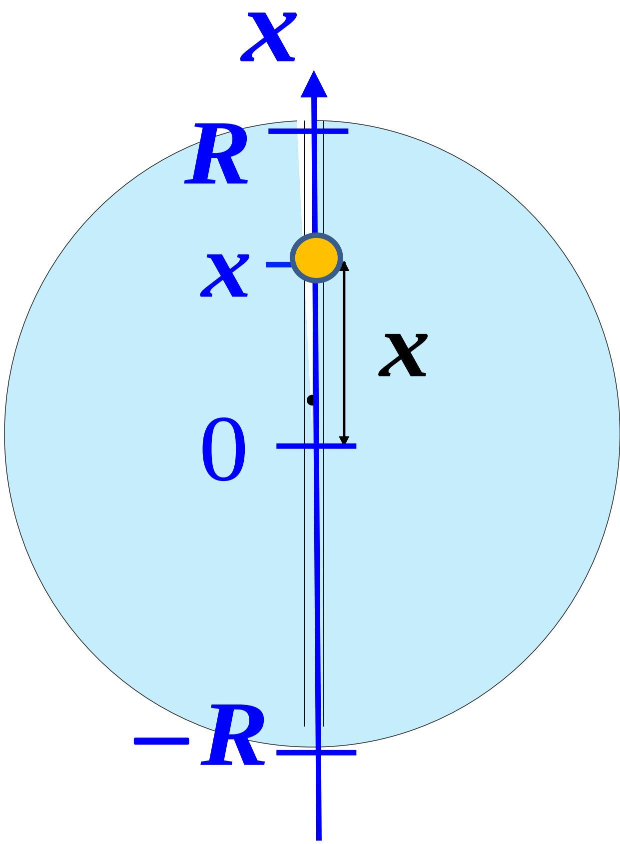
(*a*)當此物體距離地心*X*時，所受重力大小若干？

(*b*)物體來回運動的週期*T*為何？

(*c*)物體通過球心時的速率為何？

(*d*)由端點移動 $\frac{\boldsymbol{R}}{2}$ ，所需之最少時間為何？

。

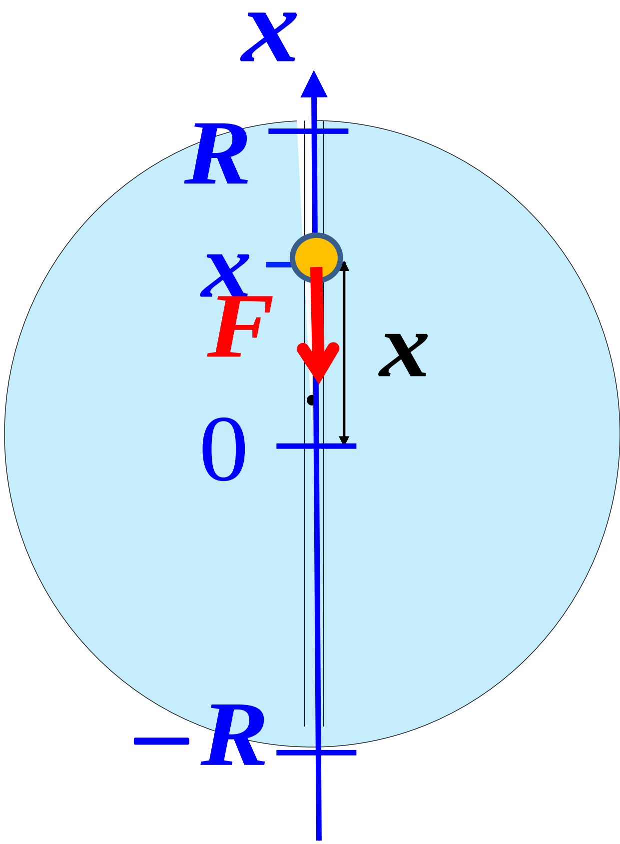


$$(a)\ F = \frac{GMm}{R^3}x$$

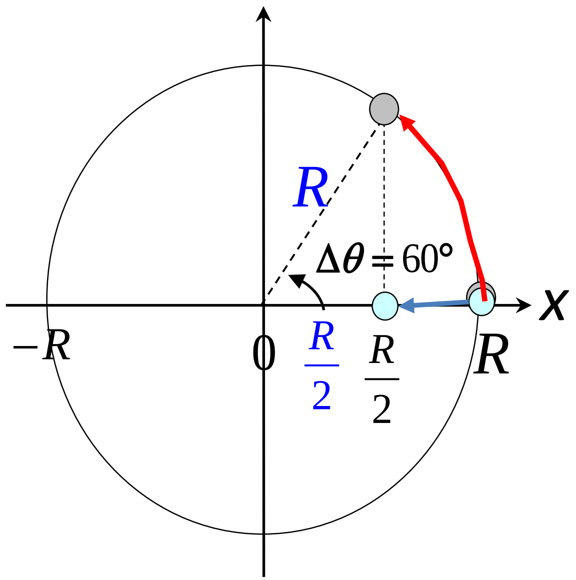
$$(b)\ \boldsymbol{SHM : F = \frac{GMm}{R^3}x = kx \to k = \frac{GMm}{R^3}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$(c)\ v_{max} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



$(d)$




$$\Delta\theta = 60°$$

$$\Delta t = \frac{60}{360} \times T = \frac{1}{6} \times 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$