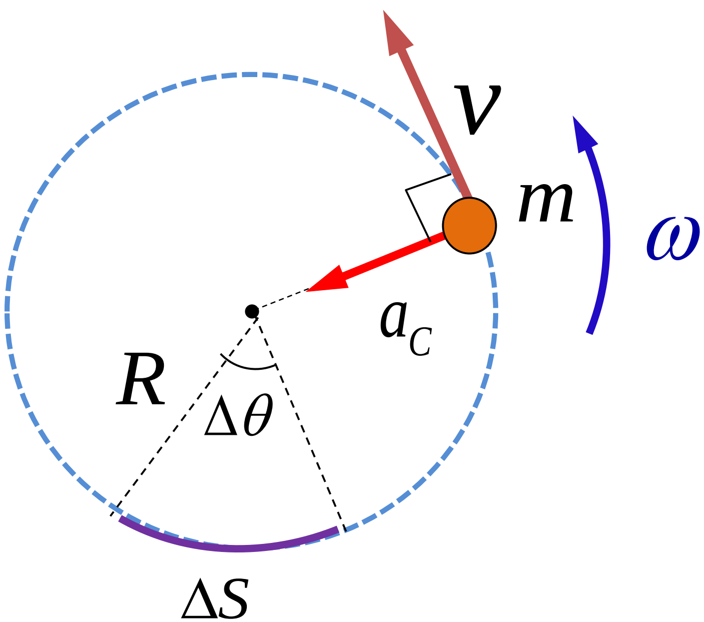
第三章 周期運動

單元一：等速率圓周運動和向心力

一、等速率圓周運動：

（平面運動）等角速度圓周運動、變速度、變加速度運動

質點以等速率v，
半徑R，作週期T
，頻率f 之圓周運動



（1）角位移$\Delta\theta$：

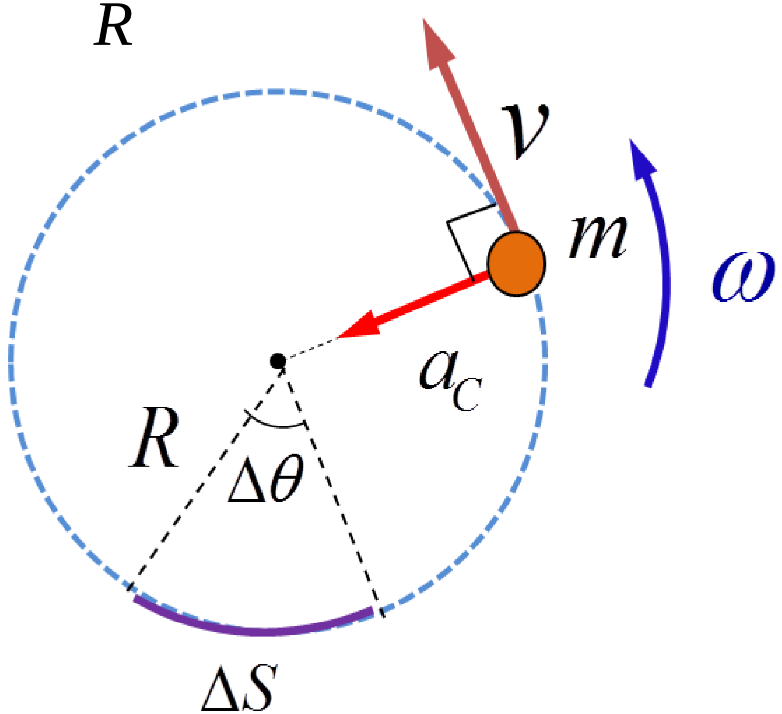
$$\boxed{\text{角位移}\Delta\theta = \frac{\text{路徑長}\Delta S}{\text{半徑}R}}$$

單位為弳或弧度（*rad*）

路徑長（弧長） $\Delta S = R\,\Delta\theta$

轉一圈的角位移 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi = 360^\circ$

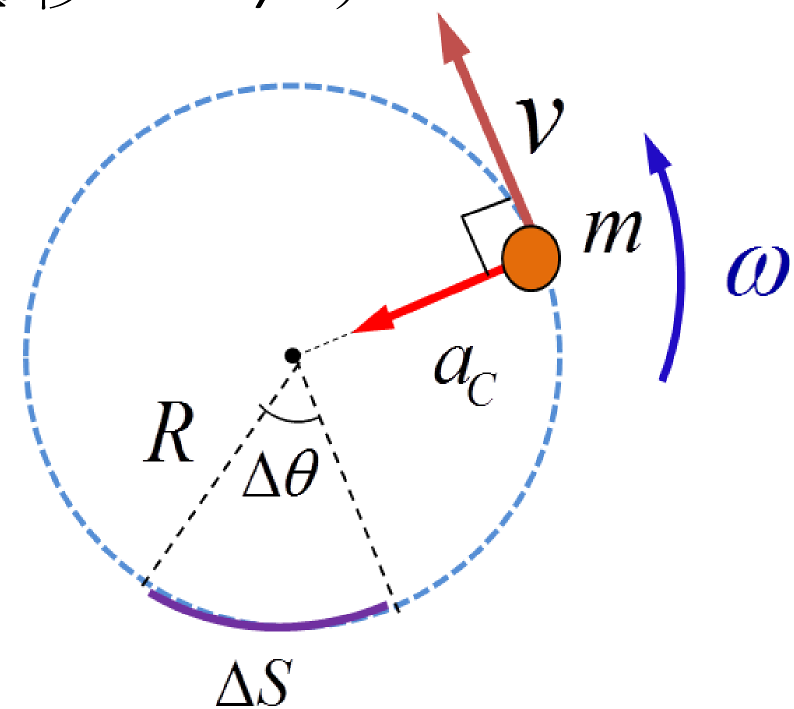
$\pi = 180^\circ$



（2）角速度 ω：　（描述物體轉動快慢的物理量）
單位時間內質點轉過圓心角。

$$\begin{cases} 平均角速度\ \bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ 瞬時角速度\ \omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \end{cases}$$

（單位：弳/秒，rad/s）



等速率圓周運動為等角速度轉動
（平均角速度＝瞬時角速度）

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

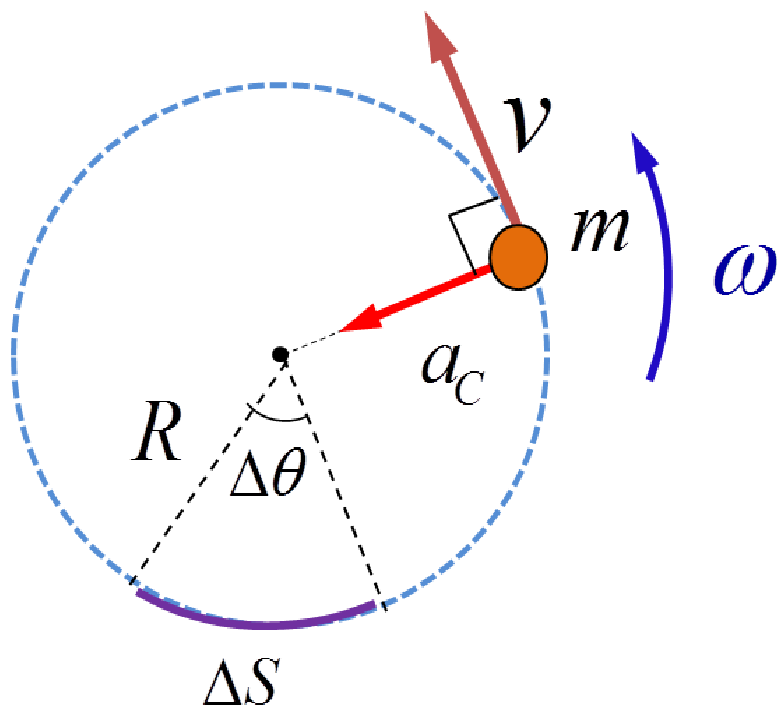
【角速度，又稱<u>角頻率</u>】

註：轉/分(rpm)　轉/秒(rps)

（3）速率：$\boxed{v = R\omega}$

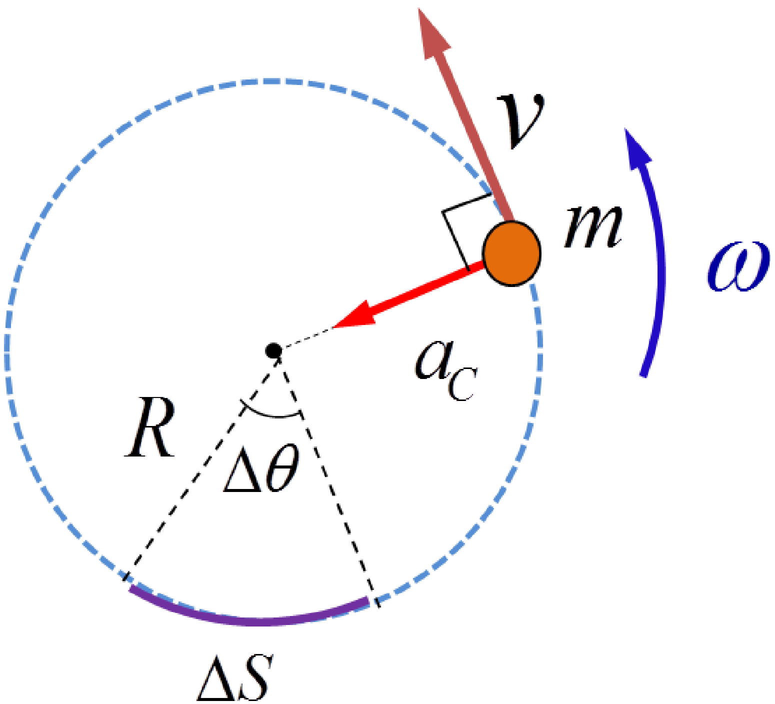
$$[\text{說明}]\, v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = R\omega$$

（瞬時）速度：大小＝ $\boldsymbol{v}$，方向<u>**切線**</u>



（4）週期T： $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi R}{v}}$

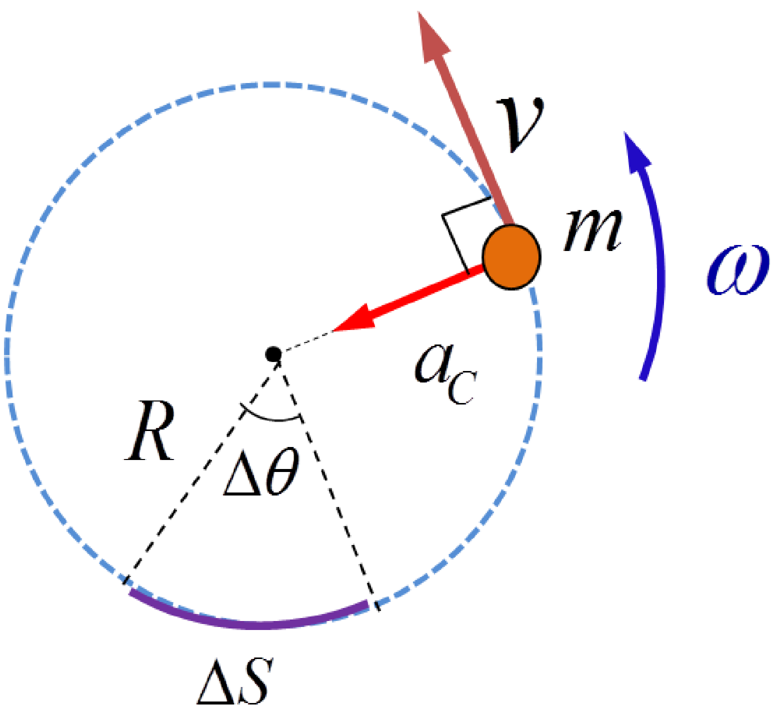
$$\left.\begin{array}{l}\text{週期}T\text{：每轉}T\text{秒}\\ \text{頻率}f\text{：每秒}f\text{轉}\end{array}\right\}T=\frac{1}{f}$$



（5）向心加速度a_c：（等速率圓周運動的瞬時加速度）

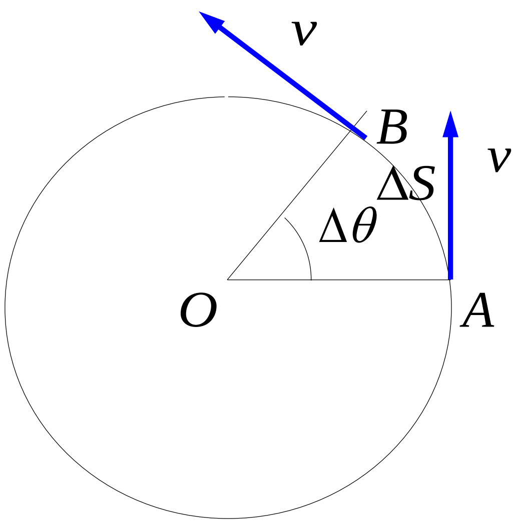
瞬時加速度＝向心加速度 $\boxed{a_C = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = \dfrac{2\pi v}{T}}$

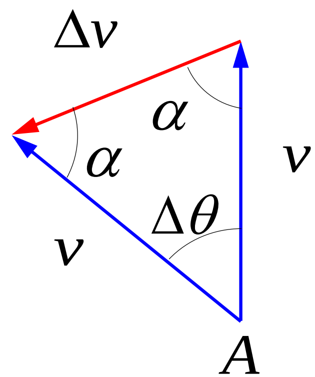
【方向恆指向<u>圓心</u>】



[證明]

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\begin{cases}\text{大小}:a_c=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}=v\cdot\omega=\begin{cases}\omega^2 R\\ \dfrac{v^2}{R}\end{cases}\xrightarrow{\text{等速率圓周運動}}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\cdot v}{T}\\ \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}\end{cases}\\ \text{方向}:\text{當}\Delta\theta\to 0\text{ 時},\alpha\to 90^\circ,\text{即 }\vec{a_c}\perp\vec{v}\ (\text{指向圓心})\end{cases}$$





當$\Delta t\to 0$時,Δv可視為以v為半徑的小圓弧,對應的圓心角為$\Delta\theta$

$$\text{等速率}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{無切線加速度}\\ \text{只有法線加速度}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{加速度指向圓心(向心加速度)}$$

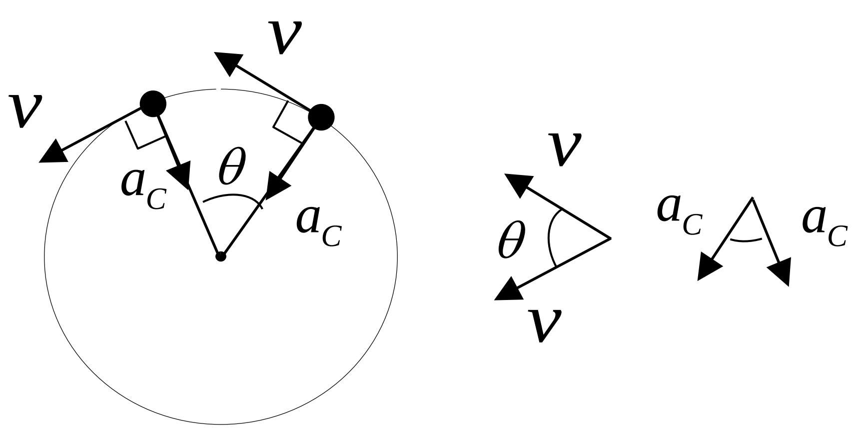
《性質》：等速率圓周運動的性質

1 變速度運動（速度大小不變、但方向改變）

2 變加速度運動（加速度大小不變、但方向改變）

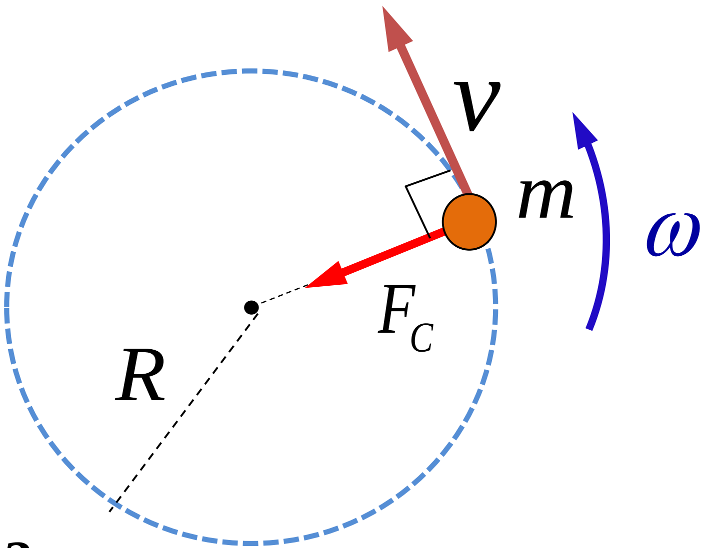
3 只有法線加速度、無切線加速度

4 當質點轉過θ角，則速度與加速度的方向均轉θ角。



二、向心力 F_C：

（1）定義：作等速率圓周運動的物體必受一**指向軌道圓心的合力**，此合力稱為向心力。



（2）公式：

等速率圓周運動牛二：

$$\sum F = F_C = ma_C$$

$$F_C = ma_C = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} = m\frac{2\pi v}{T}$$

註：1向心力並不是另有一力，而是作用在物體上，所有外力指向圓心的**合力**。

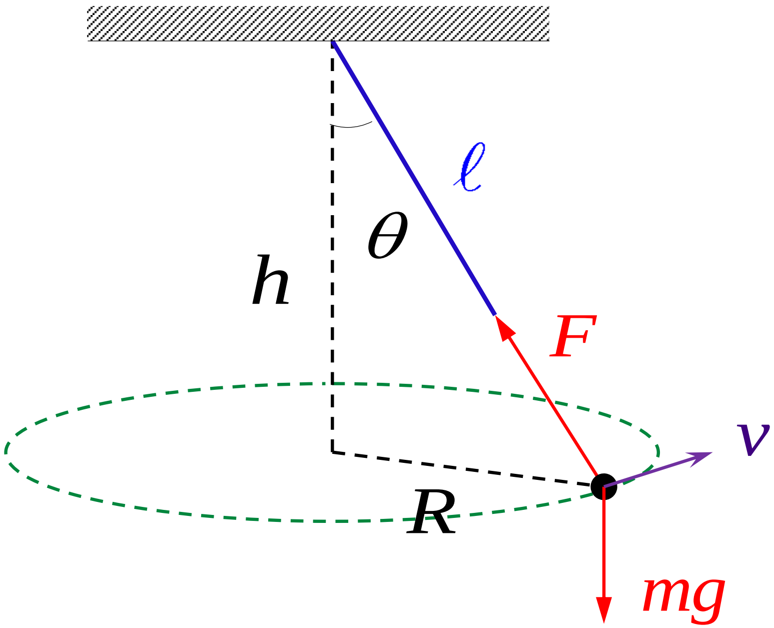
三、常見等速率圓周運動的問題：

等速率圓周運動計算概念：

$$\begin{cases}\text{圓軌道面方向}\left(\text{沿半徑指向圓心}\right)\text{:合力}\sum F=ma_C \\ \text{垂直圓軌道面方向：合力}=0\end{cases}$$

1. 錐動擺

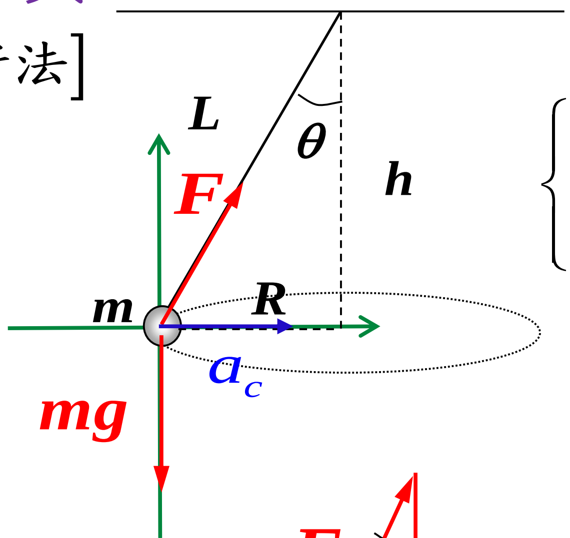
如圖所示為一錐動擺，擺錘在水平面上作等速率圓周運動，擺線長ℓ，擺角θ



擺錘受兩個外力重力 mg 與張力 F 作用

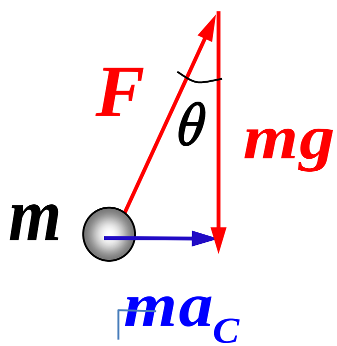
迴轉半徑 $R = \ell \sin\theta$

[解析法]



$$\begin{cases}水平方向(等速率圓周運動):F\cdot\sin\theta=m\cdot a_c\\ 鉛直方向(靜止):F\cdot\cos\theta=mg\end{cases}$$

[幾何法]



$$牛二:[F=ma]\vec{F}+m\vec{g}=m\vec{a_C}$$

$$\therefore F=\frac{mg}{\cos\theta}$$

$$a_c=g\tan\theta\rightarrow\begin{cases}\dfrac{v^2}{R}=g\tan\theta\rightarrow v=\sqrt{gR\tan\theta}=\sqrt{gh\tan^2\theta}\\ \dfrac{4\pi^2R}{T^2}=g\tan\theta\rightarrow T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g\tan\theta}}=2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}\end{cases}$$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

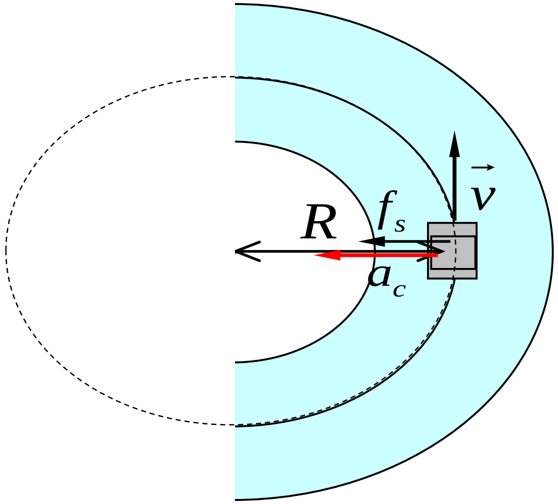
[高度*h*相同時,週期*T*相同與角度*θ*無關]

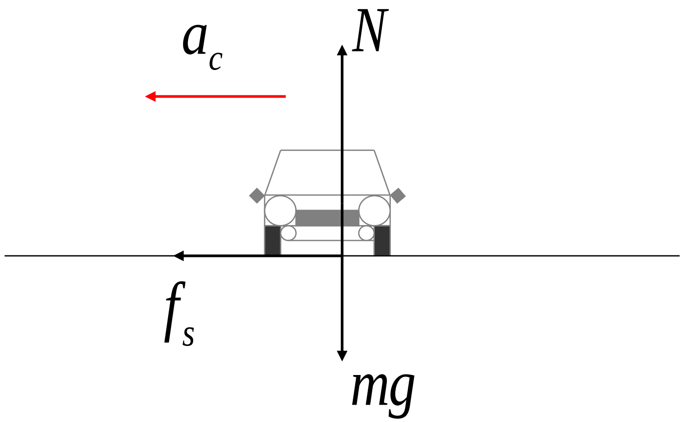
2. 車子轉彎

（1）粗糙水平路面： 向心力由靜摩擦力提供

$$f_s = ma_C \le f_{s(\max)} = \mu_s mg \qquad \boxed{\therefore a_C \le \mu_s g}$$

$$\frac{v^2}{R} \le \mu_s g$$ 最大行車安全速度 $$v \le \sqrt{\mu_s gR}$$

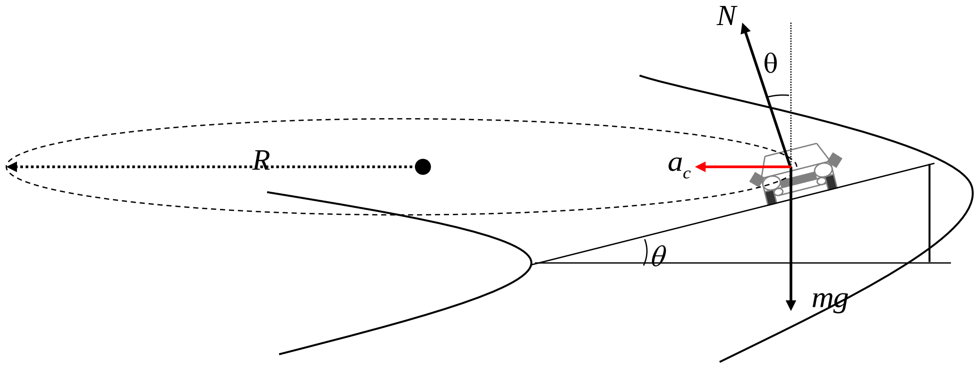


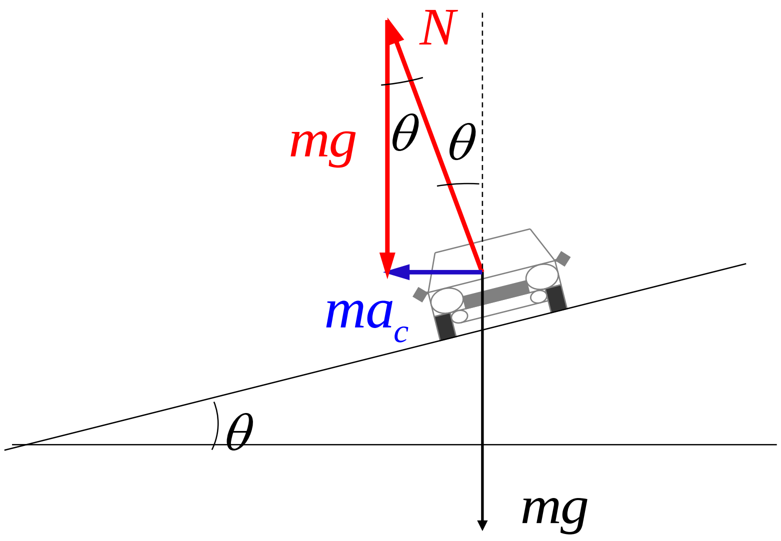


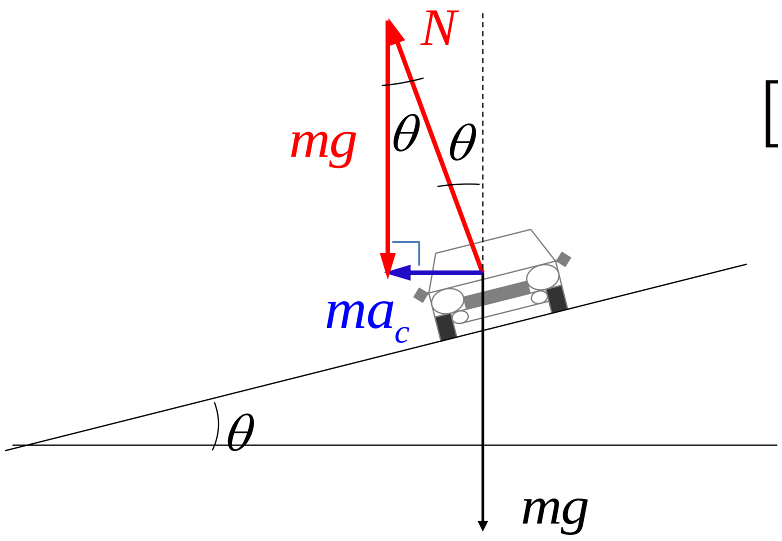
（2）光滑傾斜路面：

原理同錐動擺（**彎道須傾斜，外高內低，汽車才能安全通過**）

車子受重力*mg*與正向力*N*作用，作水平面上的等速率圓周運動







[解析法]

$$\begin{cases} \text{水平方向(等速率圓周運動)}: N\cdot\sin\theta = m\cdot a_c \\ \text{鉛直方向(靜止)}: N\cdot\cos\theta = mg \end{cases}$$

[幾何法] $\therefore N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

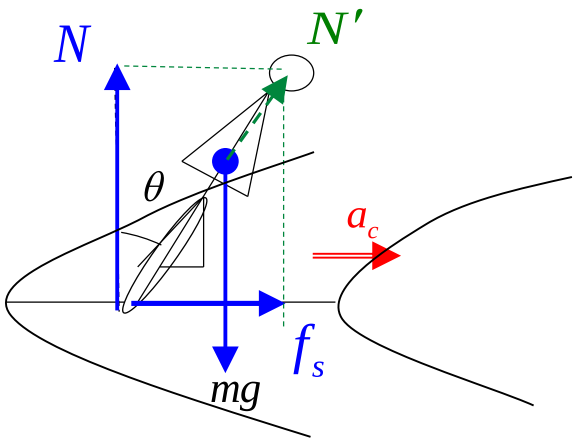
$$a_c = g\tan\theta \rightarrow \frac{v^2}{R} = g\tan\theta \rightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

[討論] $\begin{cases} \theta\text{一定時之安全速率}: v = \sqrt{gR\tan\theta} \\ v\text{一定時之路面傾角}: \tan\theta = \dfrac{v^2}{gR} \end{cases}$

（3）[補充] 腳踏車過彎

人受重力mg、正向力N與摩擦力f_s作用

$$\begin{cases} 水平方向(等速率圓周運動): f_s = ma_c \\ 鉛直方向(靜止): N = mg \end{cases}$$



$$f_s = m\frac{v^2}{R} \le \mu_s mg \rightarrow v \le \sqrt{\mu_s gR}$$

人車與鉛直線之夾角 $\tan\theta = \dfrac{f_s}{N} = \dfrac{v^2}{gR} \le \mu_s$

地面對人車的作用力 $N' = \sqrt{N^2 + f_s^{\,2}}$

必通過<u>人車的重心（才不會翻車，力矩概念）</u>

四、 曲線運動與曲率半徑：

（1）當物體做曲線運動時，在一段極短時間△t內，其運動可視為圓周運動的一小部分，此圓的半徑就是曲線上該位置的**曲率半徑*R***，路徑越彎曲曲率半徑越小。（**直線：*R*無窮大**）

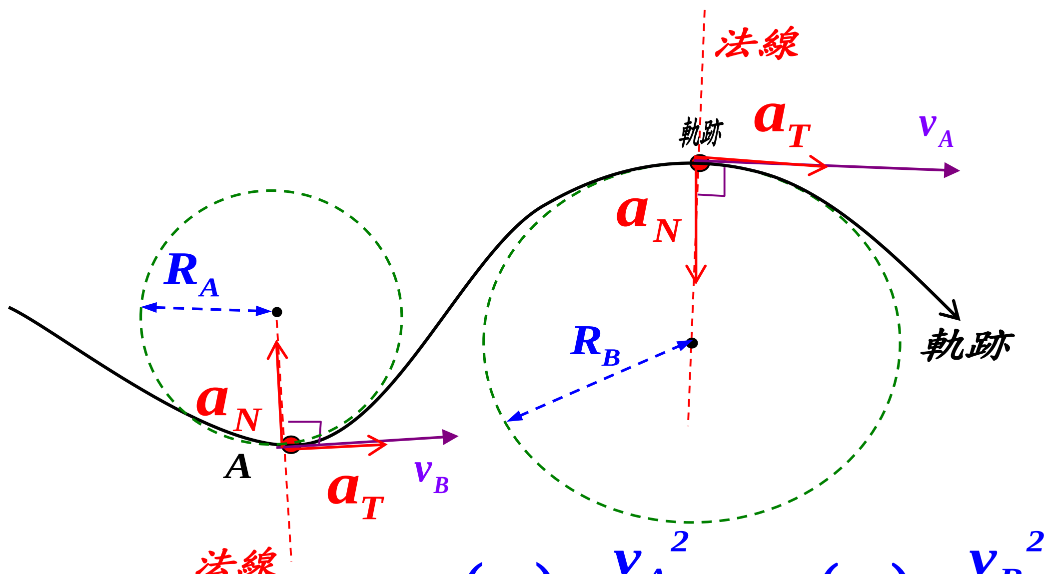
（2）曲線運動的物體其法線加速度a_N必不為零。

《公式》 $a_N = \dfrac{v^2}{R}$ 當中R為軌跡的曲率半徑，v為切線速率。

註：a_N不一定等於$\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ 或 $\dfrac{2\pi v}{T}$ ，除非是等速率圓周運動。

（3）運動物體的加速度可用 $\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$ 來表示：

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}_T\text{：切線加速度}\Rightarrow\text{和速度同方向，可以改變速度大小。}\\ \vec{a}_N\text{：法線（向心）加速度}\Rightarrow\begin{cases}\text{方向：指向曲率中心，且和速度垂直，可以改變運動方向。}\\ \text{大小：}a_N=\dfrac{v^2}{R}\end{cases}\end{cases}$$



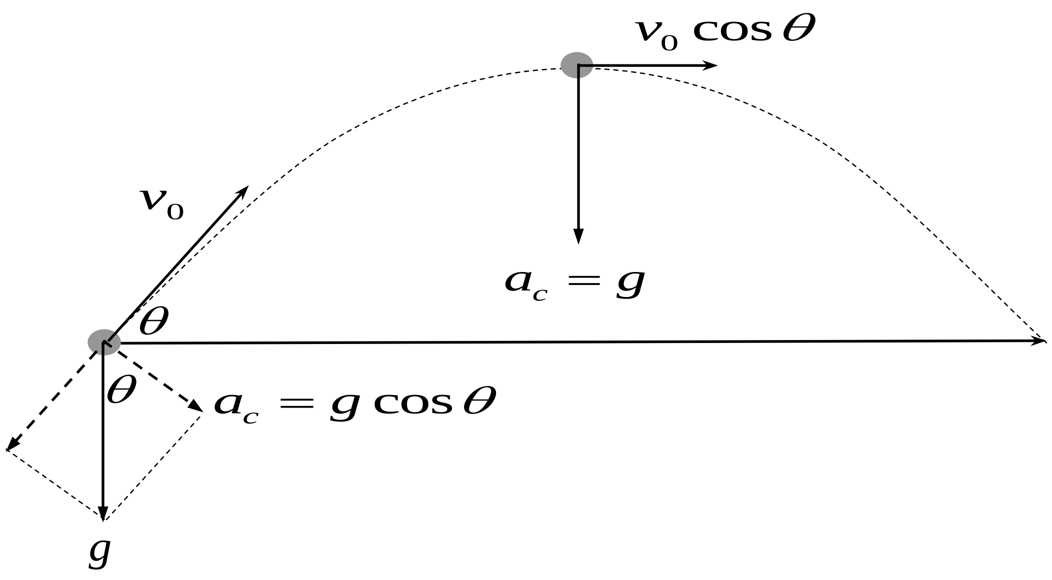
$$a_N(A)=\frac{v_A^2}{R_A}\qquad a_N(B)=\frac{v_B^2}{R_B}$$

（4）斜拋運動的曲率半徑：

拋出瞬間 (或落地瞬間) 的曲率半徑： $R_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g\cos\theta}$

(此處曲率半徑最大)

達最高點的曲率半徑： $R_{\min} = \dfrac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$ (此處曲率半徑最小)



1.質點以等速率 v在半徑為r 的圓周上運動，試問

（A）切線加速度為______

（B）法線加速度量值______，瞬時加速度量值_____

（C）經 $\frac{1}{4}$ 圓周的平均速率為_____

（D）經 $\frac{1}{4}$ 周平均速度量值______

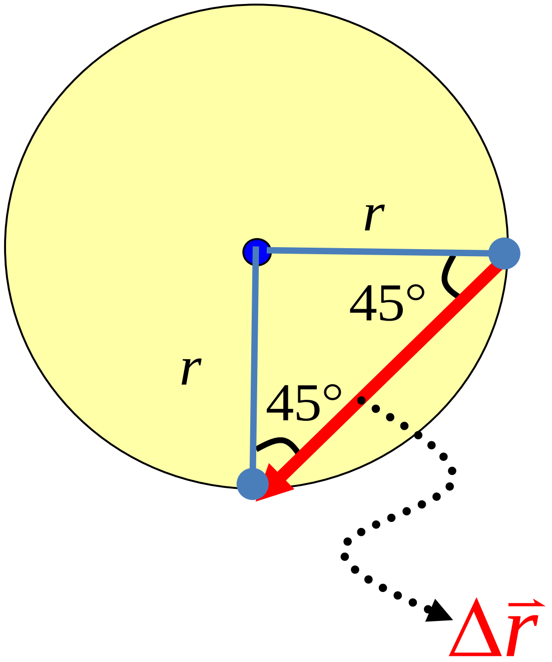
（E）經 $\frac{1}{4}$ 周的平均加速度量值為______ 。

[解析]

（A） 切線加速度＝0

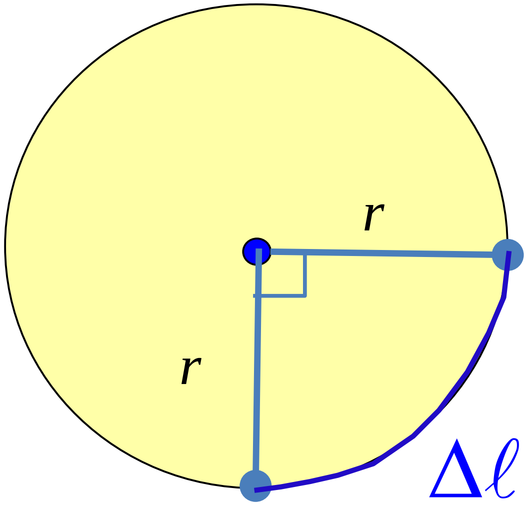
（B）∵法線加速度=0

∴瞬時加速度=法線加速度= $a_C = \dfrac{v^2}{r}$



[解析]

（C）



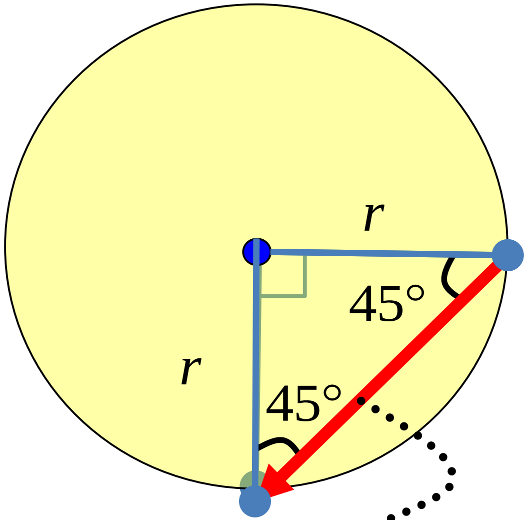
$\boxed{\text{等速率圓周運動：平均速率=瞬時速率}}$

週期$T=\dfrac{2\pi r}{v}$

瞬時速率$v=\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}=\dfrac{\frac{1}{4}\times 2\pi r}{\frac{1}{4}T}=\dfrac{2\pi r}{T}=\dfrac{2\pi r}{\frac{2\pi r}{v}}=v$

[解析]

（D）

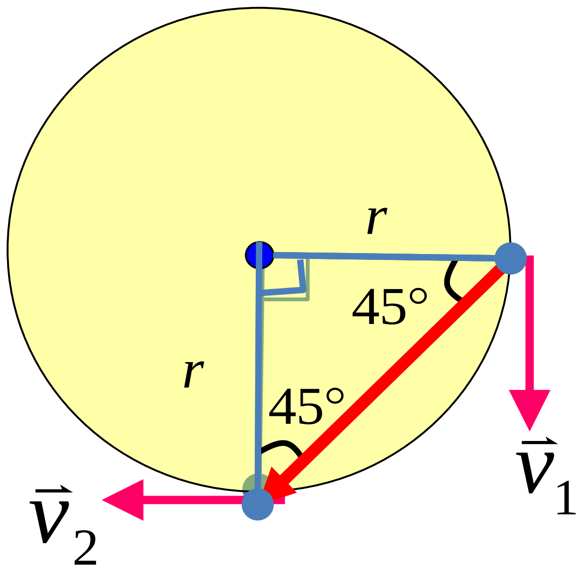


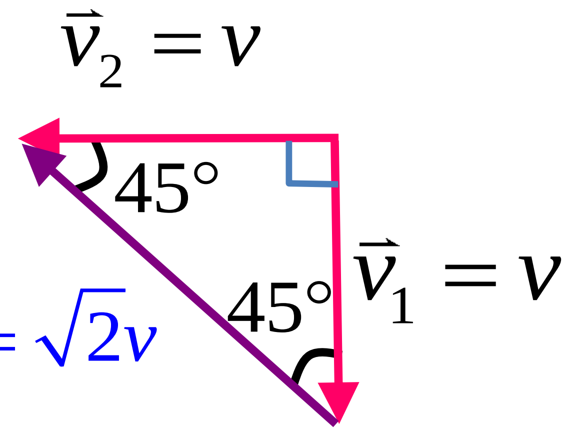
$$\Delta\vec{r} = \sqrt{2}r$$

$$\text{平均速度} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2}r}{\frac{1}{4}T} = \frac{\sqrt{2}r}{\frac{1}{4}\times\frac{2\pi r}{v}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}v$$

[解析]

（E）

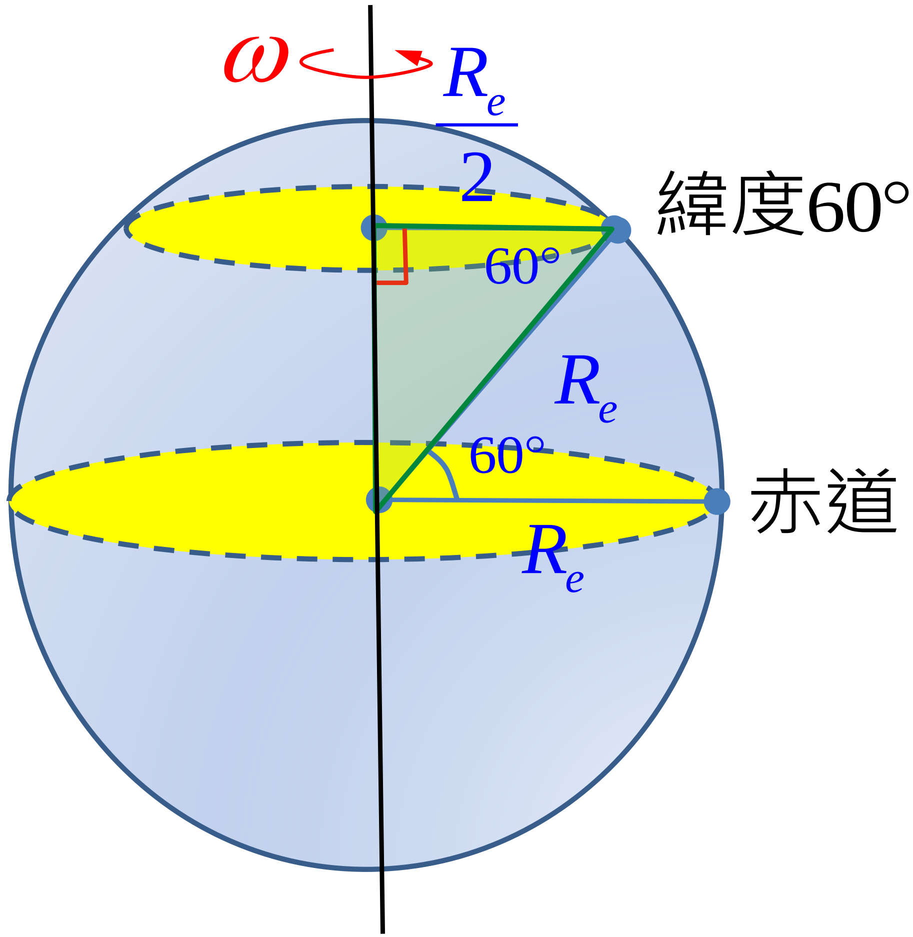




$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{2}v$$

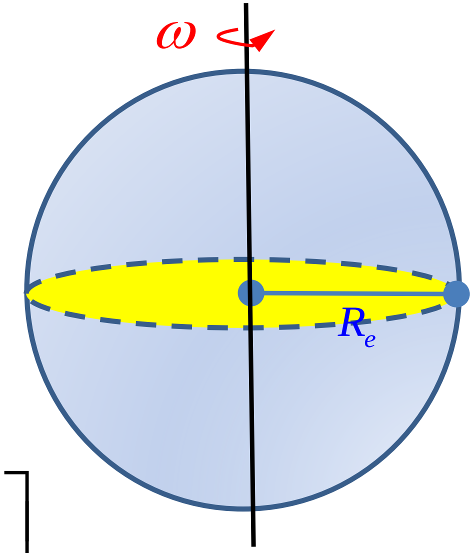
$$\text{平均加速度的大小}\ \bar{a} = \frac{\left|\Delta\vec{v}\right|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2}v}{\frac{1}{4}T} = \frac{\sqrt{2}v}{\frac{1}{4}\times\frac{2\pi r}{v}} = \frac{2\sqrt{2}v^2}{r}$$

2. 地球半徑為 6.4×10^6 公尺，求：（1）地球自轉之角速度？
（2）赤道上自轉之切線速率及向心加速度量值？
（3）緯度 $60°$ 處自轉之切線速率及向心加速度量值？



（1） 角速度$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{60 \times 60 \times 24}[rad/s]$

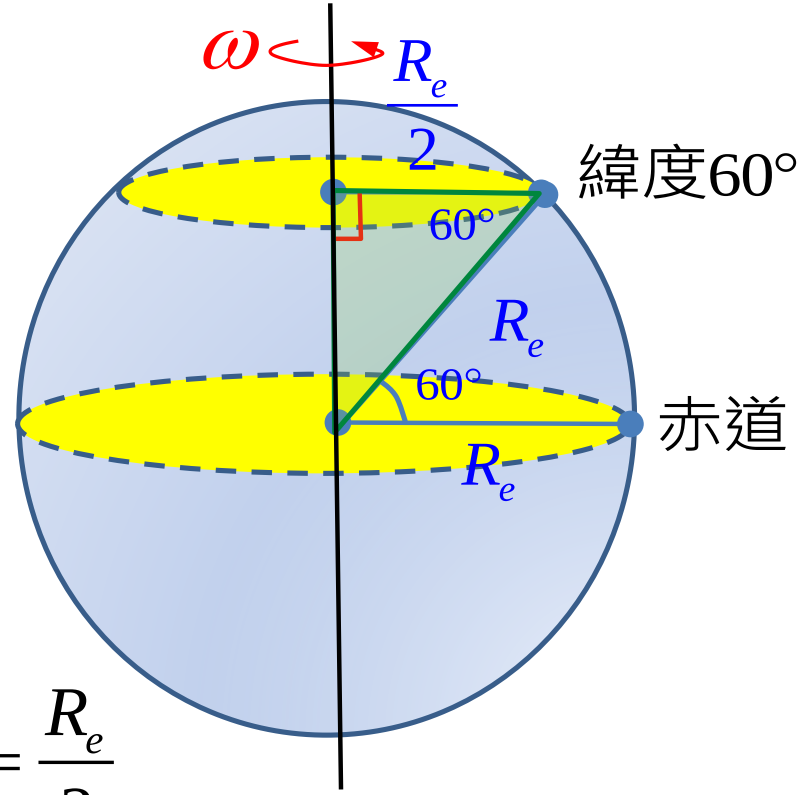
（2）赤道



速率$v = R_e\omega = \dfrac{2\pi \times 6.4 \times 10^6}{60 \times 60 \times 24}[m/s]$

加速度$a_C = R_e\omega^2 = \dfrac{(2\pi)^2 \times 6.4 \times 10^6}{(60 \times 60 \times 24)^2}[m/s^2]$

（3）緯度60°



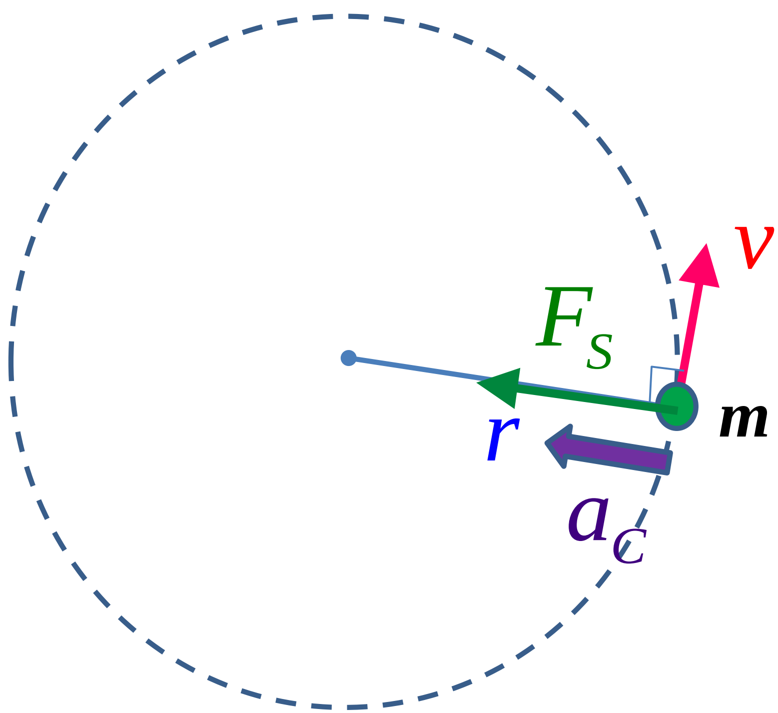
$$\text{圓周運動軌道半徑}r = R_e \cos 60° = \frac{R_e}{2}$$

$$\text{速率}v = \frac{R_e}{2}\omega = \frac{2\pi \times 6.4 \times 10^6}{2 \times 60 \times 60 \times 24}[m/s]$$

$$\text{加速度}a_C = \frac{R_e}{2}\omega^2 = \frac{(2\pi)^2 \times 6.4 \times 10^6}{2 \times (60 \times 60 \times 24)^2}[m/s^2]$$

1.原長5/3米，力常數為300*N/m*的彈簧，置在光滑水平面上，一端繫2*kg*之物，另一端固定，令物作速率為10*m/s*的等速圓周運動，則旋轉半徑為（$g=10m/s^2$）？

[解析]



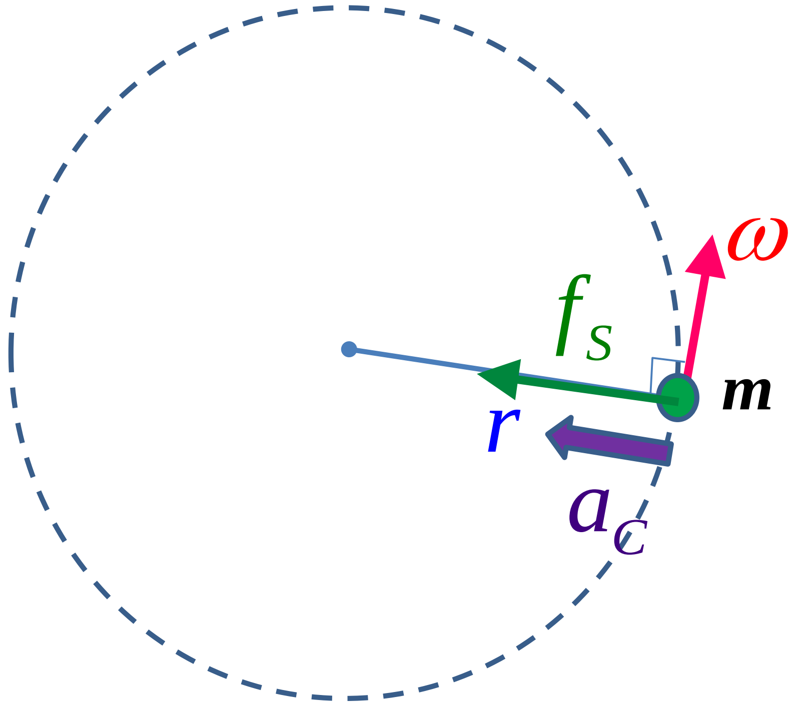
$$\left[\text{牛二：}F_S = ma_C \rightarrow kx = m\frac{v^2}{R}\right]$$

令迴轉半徑r

$$300\times\left(r-\frac{5}{3}\right)=2\times\frac{10^2}{r}\rightarrow r=2[m]$$

2. 如圖，一銅板質量為m，放在水平轉盤上，與轉盤中心點O的距離為r，銅板與轉盤間的摩擦係數為μ_s，欲使銅板能在轉盤上穩定地跟著旋轉，則轉盤最大的角速度ω為？

[解析]



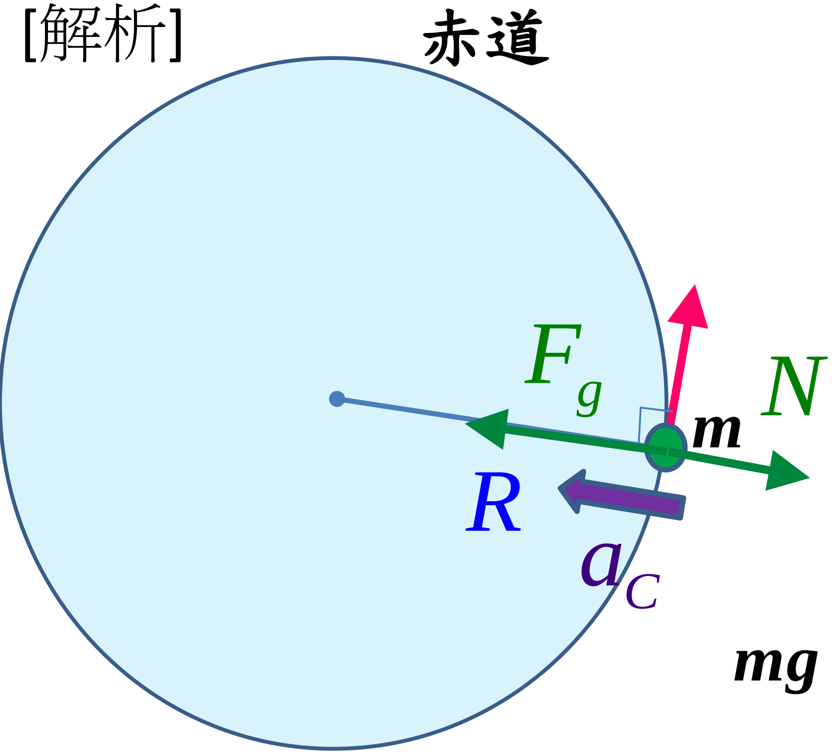
$\left[牛二：f_s = ma_C\right]$

當最大角速度時 $f_s = f_{s(max)}$

$$\mu_s mg = mr\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu_s g}{r}}$$

3. 設地球的半徑為R，地表重力加速度為g，欲使赤道上的物體作用於地面上的力為 0，此時地球自轉的週期為？

[解析]



$$\left[牛二：F=ma_C\right]$$

$$mg-N=m\frac{4\pi^2R}{T^2}$$

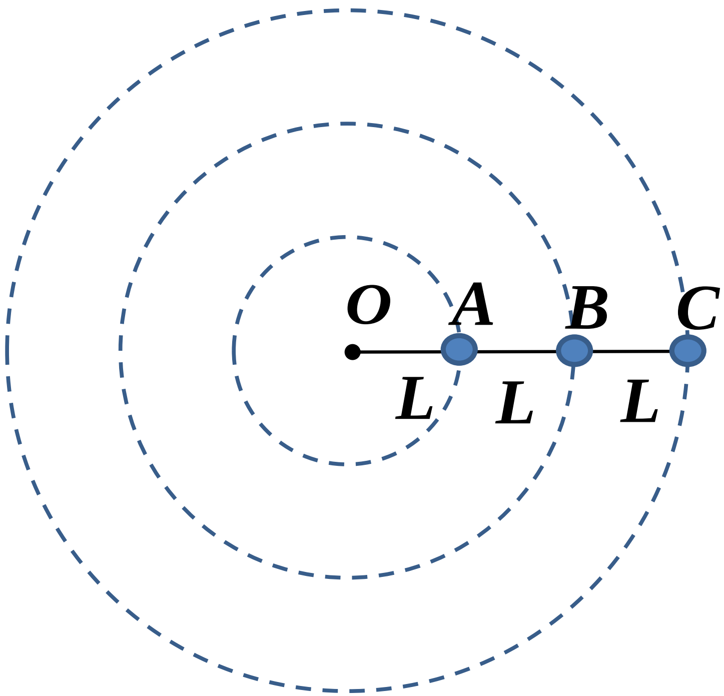
當$N=0$時 $mg=m\dfrac{4\pi^2R}{T^2}\rightarrow T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

三小球A、B、C，其質量皆為m，用三條長度均為L的細繩按順序由內向外連接之，一端固定以O為中心，在光滑水平面上作等速圓周運動，若A的速率為v，則

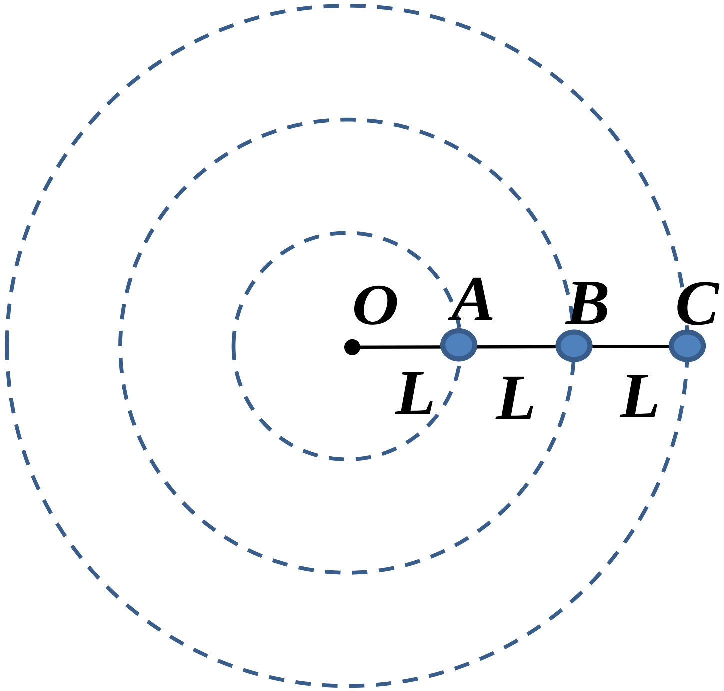
(A) ABC三球的向心力比為？ (B) B所受的向心力為？

(C) 連接BC間繩的張力為？(D) 由圓心起向外，各段繩張力為？

[解析]



[解析]



已知ABC週期, 角速度相同

軌道半徑比 $r_A : r_B : r_C = 1:2:3$

速率$v = r\omega \propto r$

$\therefore v_A : v_B : v_C = 1:2:3$

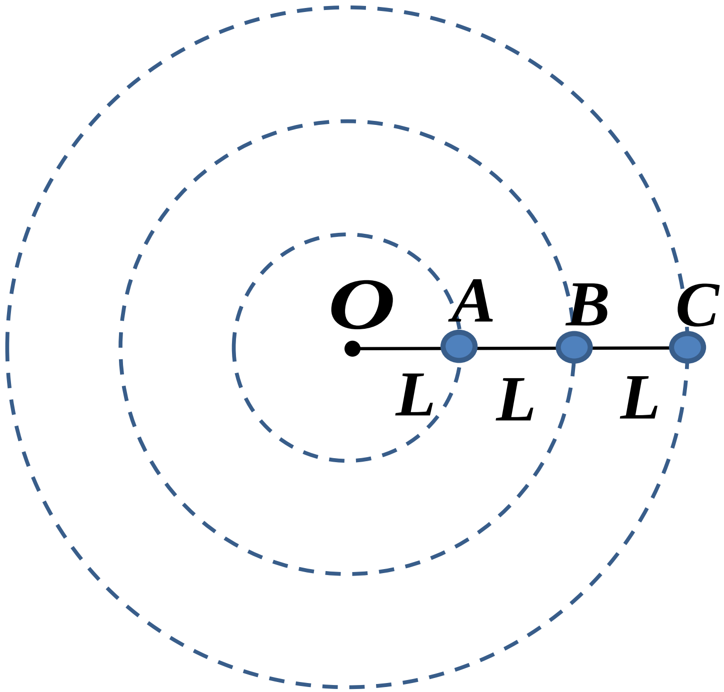
已知$v_A = v \to v_B = 2v \quad v_C = 3v$

(A) $\left[\text{向心力} F_C = ma_C = mr\omega^2 \propto r \right]$

$$F_C(A) : F_C(B) : F_C(C) = 1:2:3$$

第162頁

[解析]



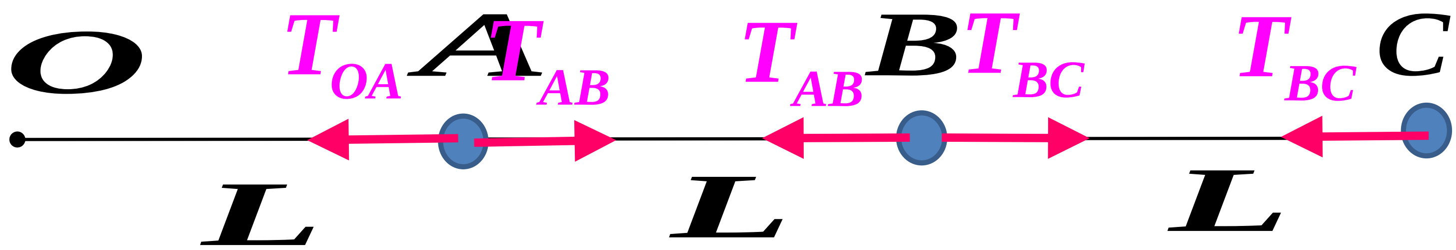
(B) $\left[向心力 F_C = ma_C = m\dfrac{v^2}{r} \right]$

$$F_C(B) = m\frac{(2v)^2}{2L} = 2m\frac{v^2}{L}$$

$$\rightarrow F_C(A) = m\frac{v^2}{L} \quad F_C(C) = 3m\frac{v^2}{L}$$

[解析]

(C)



$$\left[\text{牛二}: F = ma_C\right]$$

$$C: T_{BC} = 3m\frac{v^2}{L}$$

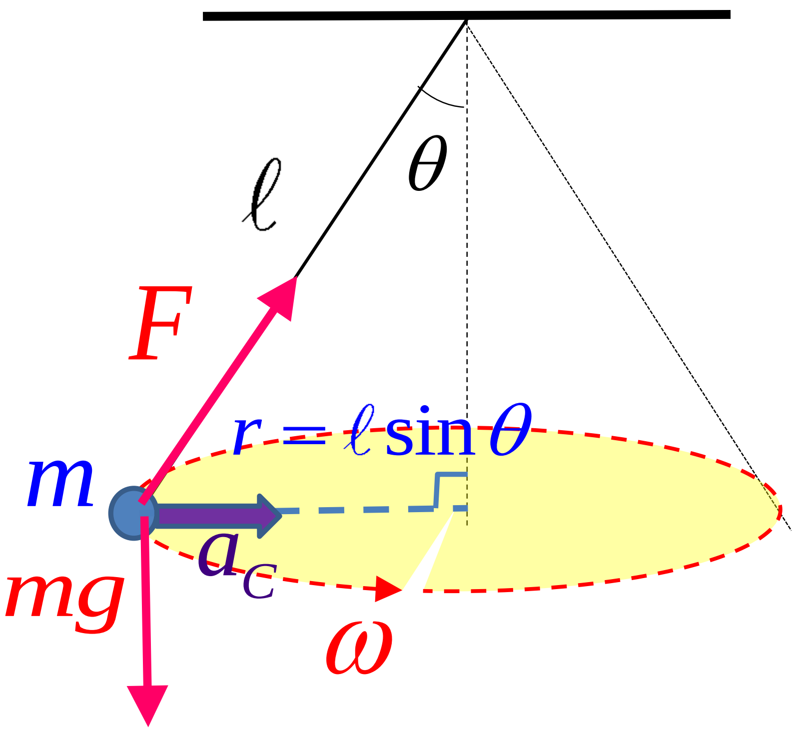
$$B: T_{AB} - T_{BC} = 2m\frac{v^2}{L} \to T_{AB} = (3+2)m\frac{v^2}{L}$$

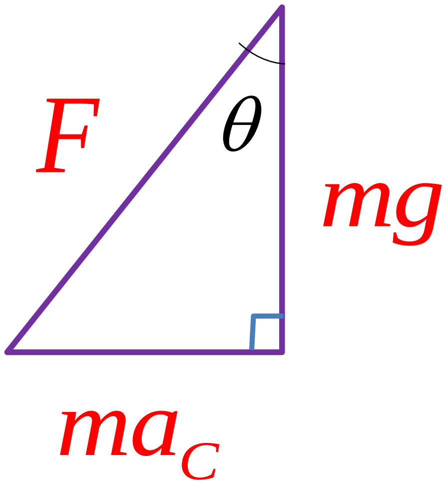
$$A: T_{OA} - T_{AB} = m\frac{v^2}{L} \to T_{OA} = (3+2+1)m\frac{v^2}{L}$$

第163頁

1. 單擺擺長ℓ，擺錘質量m。當擺錘在一水平面上以等角速度ω繞鉛直線旋轉時（見圖所示），如擺線與鉛直線的夾角為θ，則$\cos\theta$=？

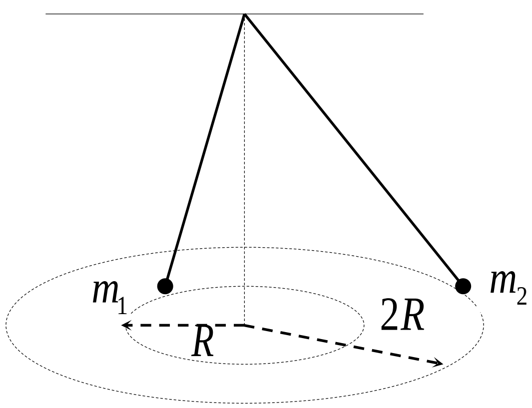
[解析]



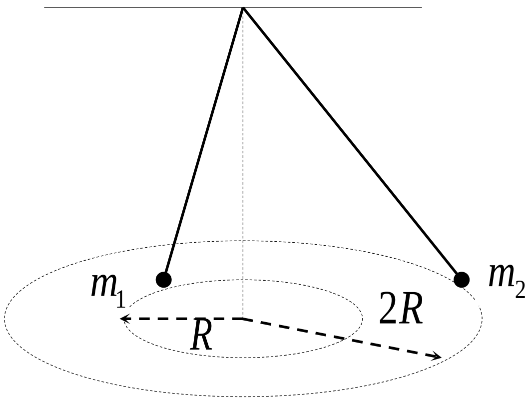


$$\tan\theta=\frac{a_C}{g}=\frac{\ell\sin\theta\,\omega^2}{g}\rightarrow\cos\theta=\frac{\ell\omega^2}{g}$$

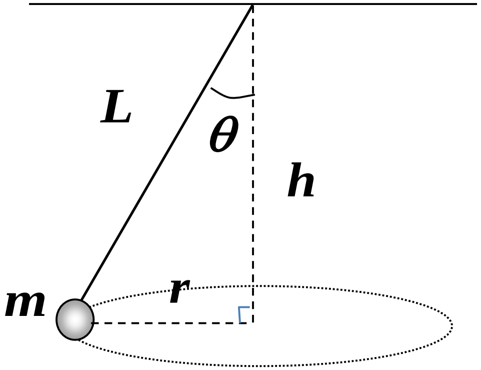
2. 質量m_1、m_2在同一水平面作錐動擺，即m_1、m_2繞同一鉛垂線在同一水平面作等速率圓周運動。m_1的旋轉半徑R，m_2的旋轉半徑$2R$。下列何者正確？（A）m_1、m_2週期相等（B）m_1的週期為m_2週期的一半（C）m_1、m_2速率相等（D）m_1、m_2向心加速度相等（E）m_1、m_2角速率相等。



[解析]



(A) (B)(E)

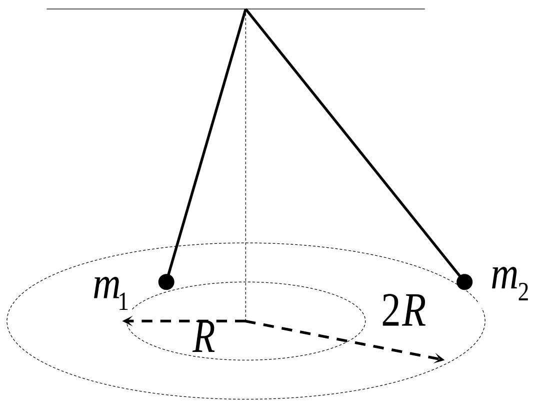


$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}\right]$$

$\because$ A, B的h相同

$\therefore$ 週期相等,角速度相等

[解析]



(C) $\left[v=\dfrac{2\pi r}{T}\propto r\right]\therefore v_1:v_2=1:2$

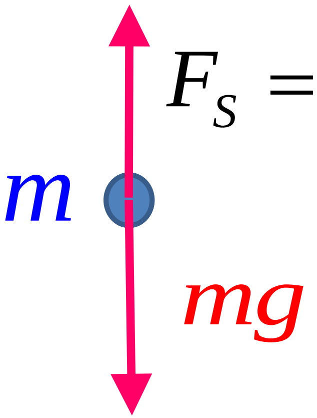
(D) $\left[a_C=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}\propto r\right]\therefore a_1:a_2=1:2$

1.長 L 之彈簧，下懸質量為m之物體，靜止時之長為1.5 L，使此裝置作錐動擺使用。 當幅角為60 ^{o}時，此彈簧之長度變為若干？週期為若干？

第164頁

[解析]

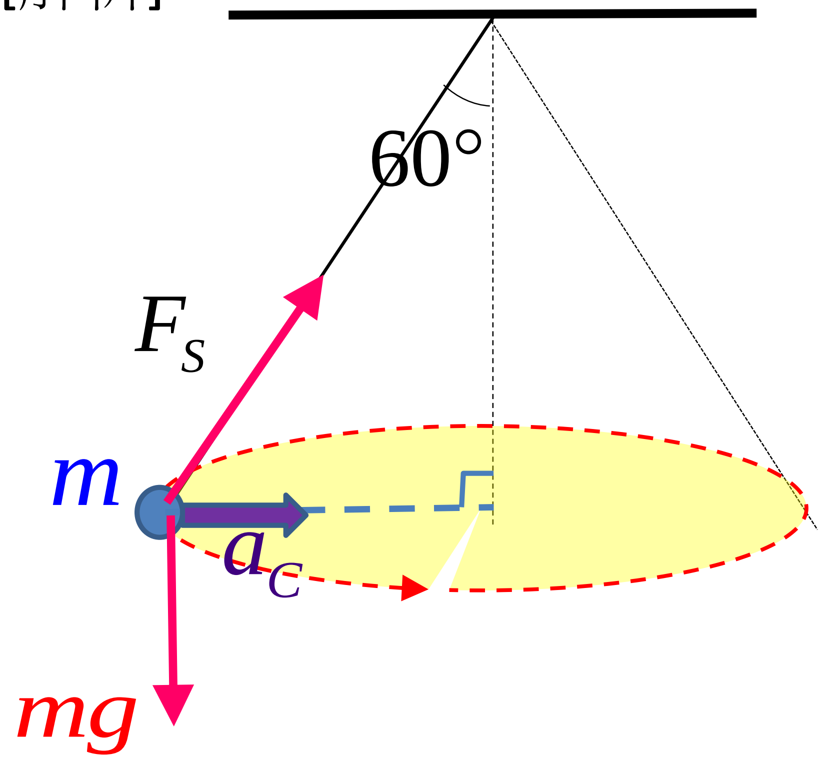
$$F_S = k(1.5L - L)$$

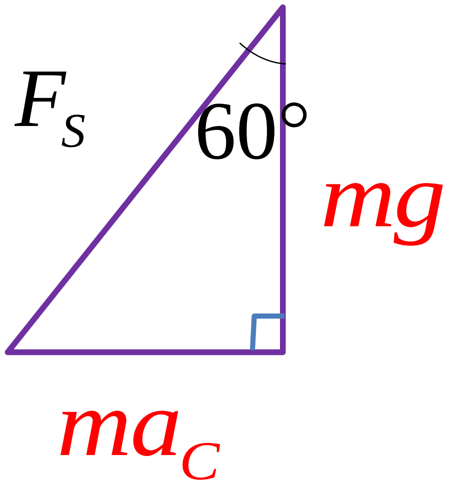


由靜止時長度1.5 L得

$$合力 = 0 \quad k(1.5L - L) = mg \rightarrow k = \frac{mg}{0.5L} = \frac{2mg}{L}$$

[解析]

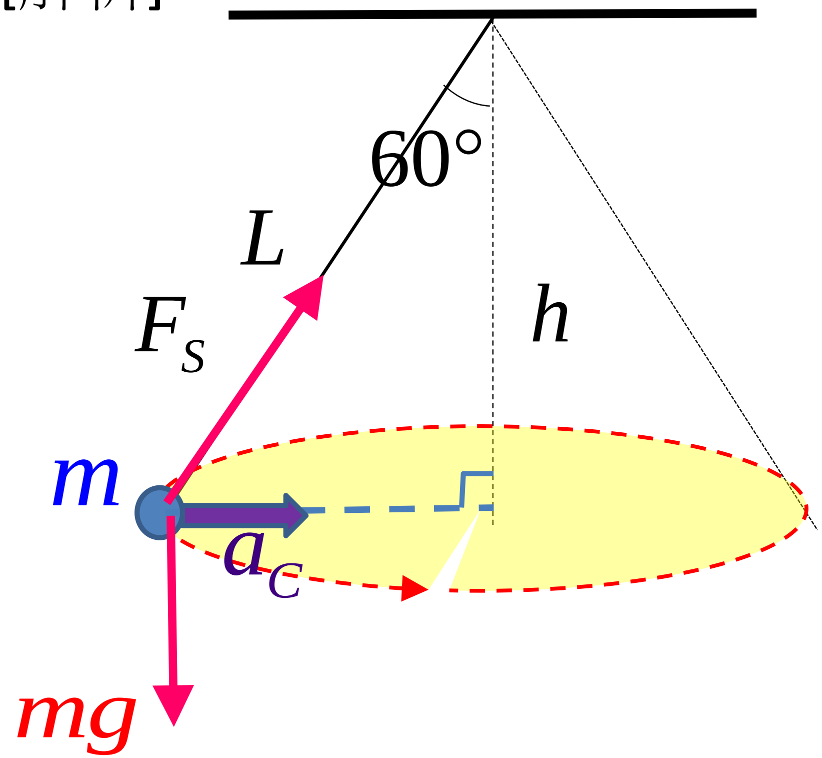




$$F_S = 2mg \rightarrow kx = 2mg \rightarrow \frac{2mg}{L}x = 2mg \rightarrow x = L$$

$$\therefore \text{彈簧長度} = L + x = 2L$$

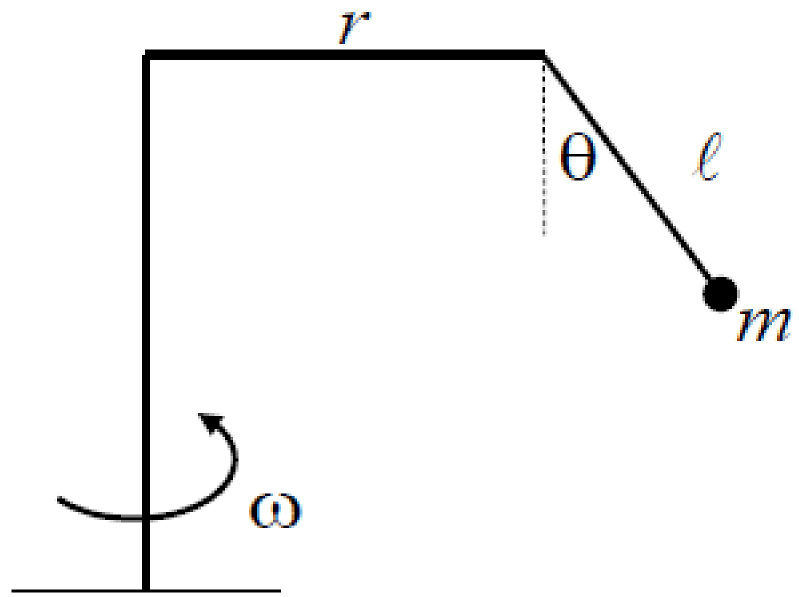
[解析]



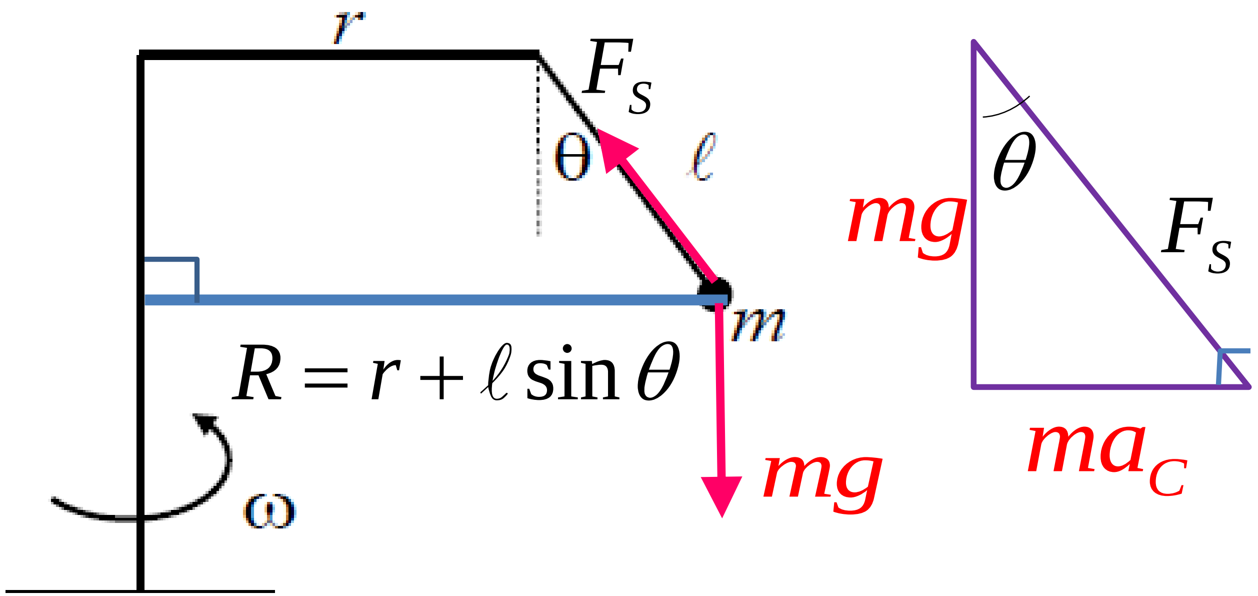
由圖知 $h=\dfrac{L}{2}$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{L}{2}}{g}}$$

2. 如圖之裝置，若懸線與鉛直方向夾角 37 º，則 ω 為若干？



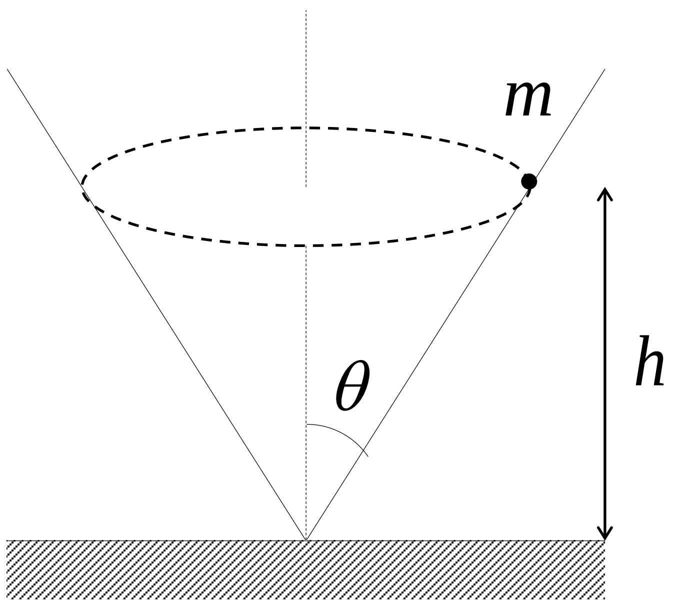
[解析]

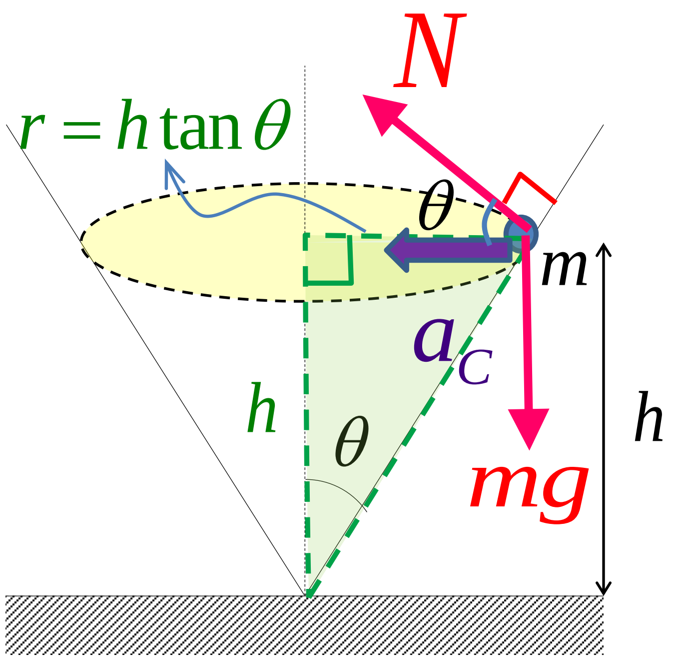


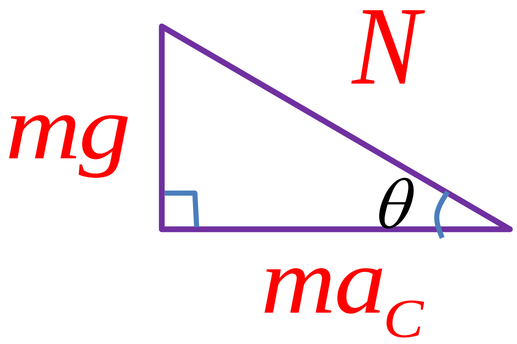
$$a_C = g\tan\theta \rightarrow mR\omega^2 = g\tan\theta \rightarrow m\left(r + L\sin\theta\right)\omega^2 = g\tan\theta$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{m\left(r + L\sin\theta\right)}}$$

1. 如圖，一錐頂角2ϑ的圓錐形漏斗內面光滑，有一質量為m的小球在內部與錐頂相 距h高處作水平圓周運動。設重力加速度為g，試求：（1）小球受淨力以m、θ、g表示？
（2）小球速度以g、h表示？（3）小球受正向力以m、θ、g表示？
（4）小球週期以g、h、θ表示？







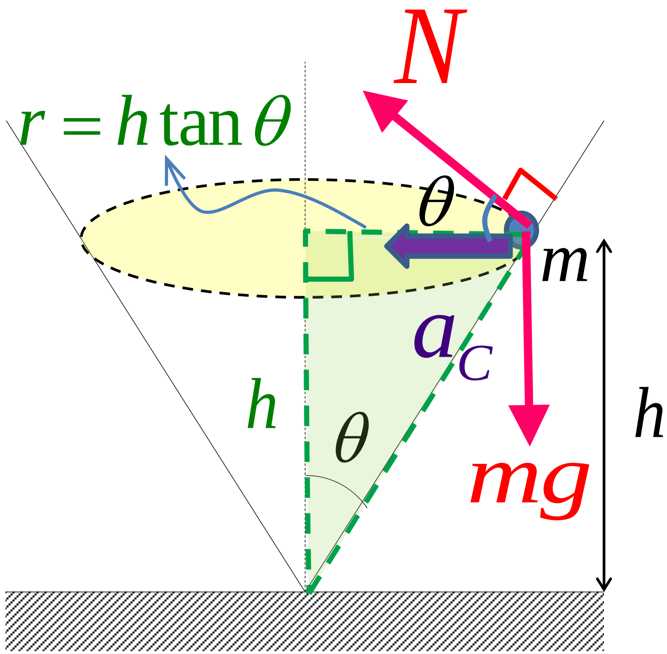
（1）

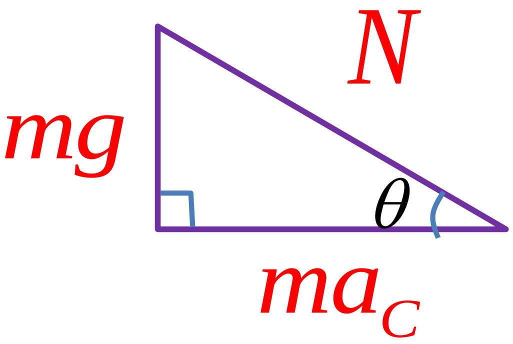
等速率圓周運動牛二： $$合力 = ma_C = mg\cot\theta$$

（2）

$$由(1)\,a_C = g\cot\theta \rightarrow \frac{v^2}{h\tan\theta} = g\cot\theta \rightarrow v = \sqrt{gh}$$

[高度h相同時,速率v相同與角度θ無關]





（3） $$N = \frac{mg}{\sin\theta}$$

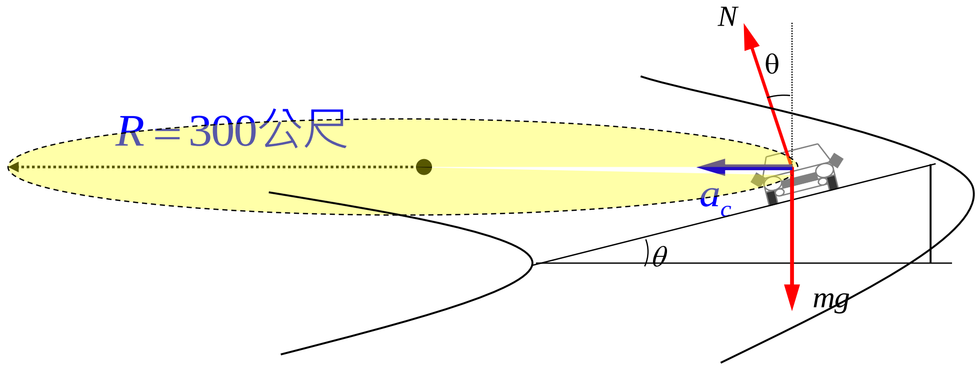
（4） $$由(1)a_C = g\cot\theta \rightarrow \frac{4\pi^2 h\tan\theta}{T^2} = g\cot\theta$$

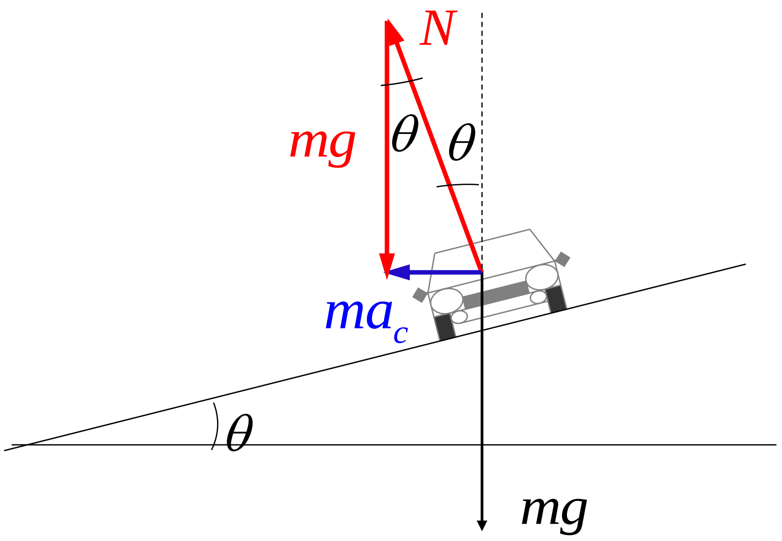
$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{h\tan^2\theta}{g}}$$

第166頁

1. 公路圓形轉彎是以*72*公里/小時之速率設計，則
（1）若圓弧半徑為*300*公尺，此公路正確傾斜角為若干？
（2）若公路不傾斜，欲使以此速率行駛之車輛不致滑動，路面與輪胎間之靜摩擦係數最小值為何？（$g = 10$ 公尺/秒^2）

（1）



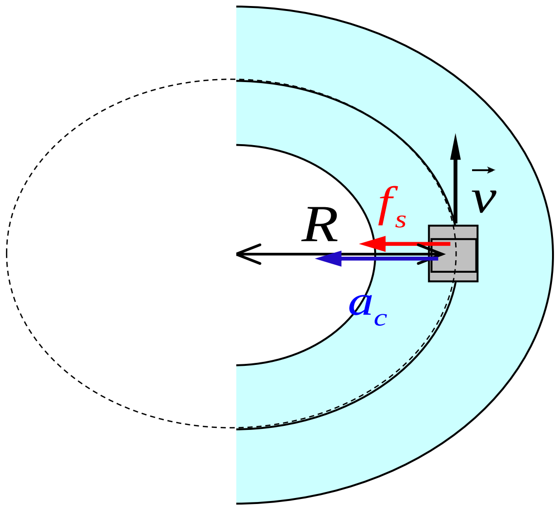


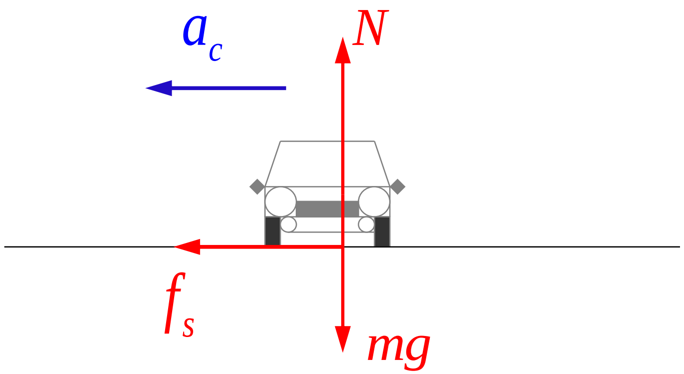
$$v = 72km / h = 20m / s$$

$$\tan\theta = \frac{a_C}{g} = \frac{\frac{20^2}{300}}{10} = \frac{2}{15} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{2}{15}$$

第166頁

（2）



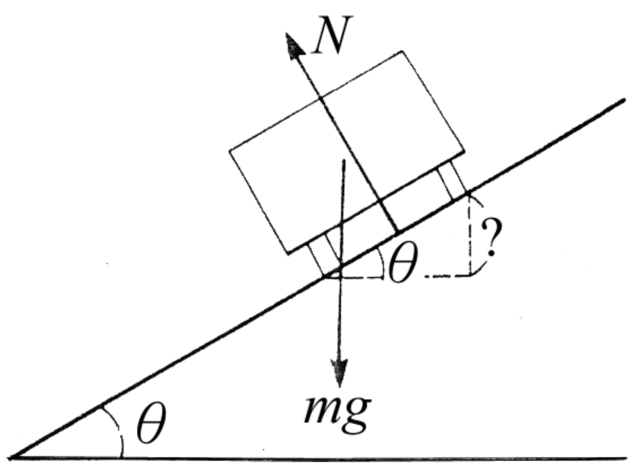


$$\left[F = ma_C\right] f_s = ma_C \le f_{s(\max)} = \mu_s mg$$

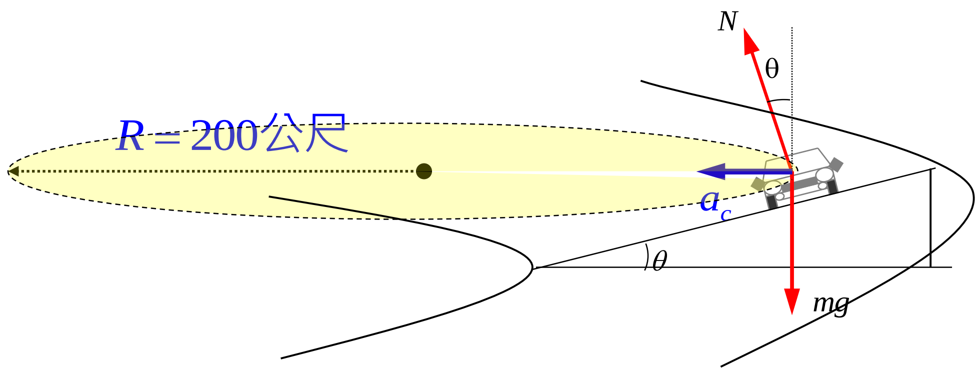
$$\mu_s \le \frac{a_C}{g} = \frac{\frac{20^2}{300}}{10} = \frac{2}{15}$$

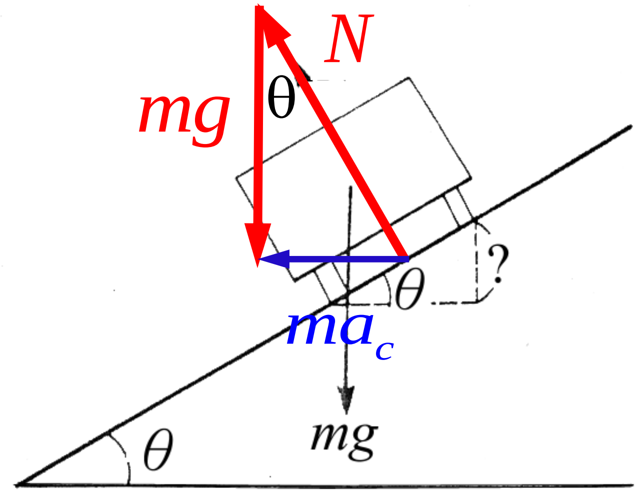
第166頁

2. 以***36km/h***的速度在半徑***200m***的彎路上行駛之火車，欲使鐵軌不受側壓，則外側鐵軌應較內側鐵軌高出若干？
(但二鐵軌之間距離為***120cm***，而***g=10m/s²***)



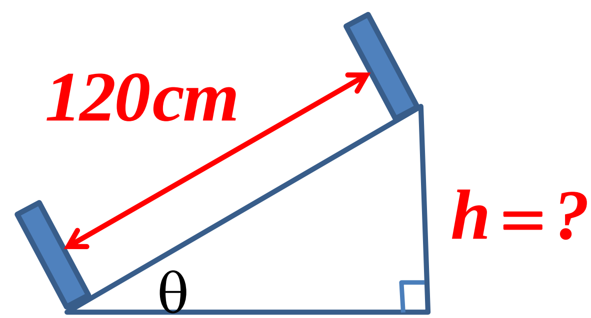
第166頁





$$v = 36km/h = 10m/s$$

$$\tan\theta = \frac{a_C}{g} = \frac{\frac{10^2}{200}}{10} = \frac{1}{20}$$



$$h = 120\sin\theta \approx 120\tan\theta = 120 \times \frac{1}{20} = 6[cm]$$