

角動量與萬有引力 1 小考

20160420 班級 _____ 座號 _____ 姓名 _____

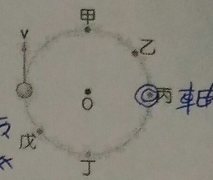
1. 一質點以 O 為圓心在一水平面上作等速圓周運動，其速率為 v，如右圖所示。甲、乙、丙、丁、戊皆在圓周上，如果以丙點為參考點測量質點的角動量，則該質點

(1) 角動量的量值在圖中最大處為 甲

(2) 角動量時間變化率的量值在圖中最大處為 甲、丁

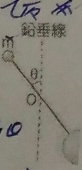
(1) $L = r m v \sin \theta = m v d$
 (丙為參考點)
 $\therefore L_{甲} > L_{乙} = L_{丁} > L_{丙} > L_{戊}$

(2) $\frac{dL}{dt} = \tau = F d$
 (丙為參考點)
 $\therefore \tau_{甲} = \tau_{丁} > \tau_{乙} = \tau_{丙} > \tau_{戊}$



2. 一長度為 l 而質量可忽略的細桿，以通過細桿中心點 O，且垂直於細桿為軸，兩端各置有質量為 m 及 3m 的質點，細桿與鉛直方向的夾角為 θ ，如右圖所示。設重力加速度為 g，則此兩質量系統相對於 O 點的角動量時變率量值為 $4 m g l \sin \theta$

$\frac{dL}{dt} = \tau = 3mg \frac{l}{2} \sin \theta - mg \frac{l}{2} \sin \theta = 4 m g l \sin \theta$
 (1) 順時針

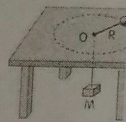


3. 如圖所示，光滑桌面中心穿有一孔，一繩穿過此孔，在桌面上的一端繫有質量為 m 的小球作半徑為 R 而速率為 v 的圓周運動，桌面下一端繫有一質量為 M 的重物恰可平衡，若改掛另一重物後，使 m 的圓周半徑變為 0.2R，則此時

(1) m 的速率為 $\frac{5v}{2}$ (2) 繩子的張力為 $\frac{25}{12} m \frac{v^2}{R}$

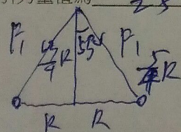
(1) 角動量守恆 $R m v = 0.2R m v' \rightarrow v' = \frac{5v}{2}$

(2) $m = (F = m a_c) \quad F = m \frac{v'^2}{R} = \frac{25}{12} m \frac{v^2}{R}$

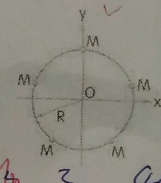


4. 如圖所示，在半徑為 R 的圓上，每隔 72° 固定放置一質量為 M 之質點，在通

過圓心 O 的 +z 軸距圓心 $\frac{3}{4}R$ 處另置一質量為 m 的質點，則該質點 m 所受的合引力量值為 $\frac{45}{25} \frac{GMm}{R^2}$



$F = 5 \times F_i \cos 53^\circ$
 $= 5 \times \frac{GMm}{(\frac{5}{4}R)^2} \times \frac{3}{5} = 5 \times \frac{GMm}{\frac{25}{16}R^2} \times \frac{3}{5} = \frac{45}{25} \frac{GMm}{R^2}$



5. 均勻的細圓環半徑為 R、質量為 M，中心軸上距環中心 d 處，有質量為 m 的質點，試求：

(1) m 受環的萬有引力 F 是 $\frac{GMm d}{R^3}$

(2) 當 $R \gg d$ ，質點 m 會進行 SHM 週期為 $2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G M}}$

(1) $F = \sum_i \frac{G m \Delta M_i}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \times \frac{d}{(R^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{G m M d}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$

(2) $R \gg d \rightarrow F = \frac{G M m}{R^3} d \propto d$

\therefore 力常數 $k = \frac{G M m}{R^3} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{G M m}{R^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G M}}$

