第七章 功與能

【前言】

（1）物理上功與能為具有相同單位的純量，
功只有一種定義（$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}$），
但能量卻有許多不同的型式（如：動能、位能、電能、熱能、核能、化學能等…）

（2） 有能量才能作功，作功後將能量變成另一種形式，
作功為**能量轉變形式的過程**。

（3）因為功與能均為純量，所以在計算上比向量容易，
因此在解決運動問題上從功與能的觀點來解運動學問題為另一種不錯的方式。

7-1 功、動能與功能定理

一、功*W*：　（work）1829年柯若利斯（法國人）提出功的觀念。

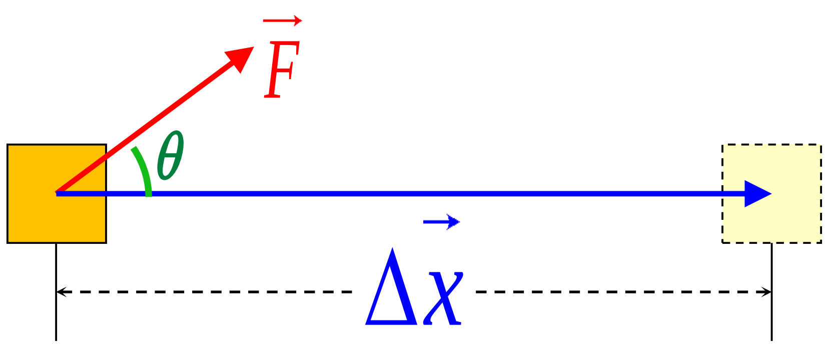
（1）定義：

定力對物體所作的功＝定力與施力期間物體位移的內積。

（定力為量值與方向均不隨時間改變的力）

（2）公式：

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F\,\Delta x\cos\theta}$$



（3）單位：

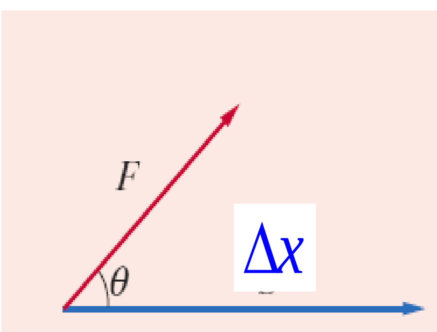
力(F)	位移(d)	功(W)
牛頓(N)	公尺(m)	焦耳(J)

（4）性質：功為純量，無方向性；但功可分為正功及負功。

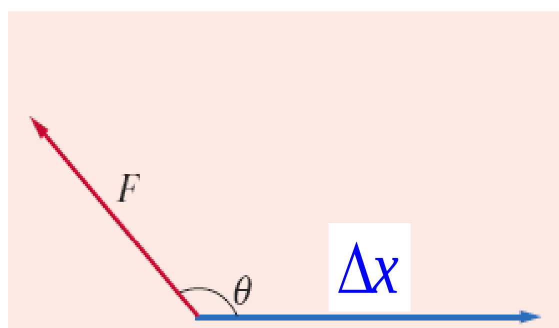
1 當 $0° \leqq \theta < 90°$ → $W > 0$ 力對物體作正功，物體的能量增加

2 當 $90° < \theta \leqq 180°$ → $W < 0$ 力對物體作負功，物體的能量減少

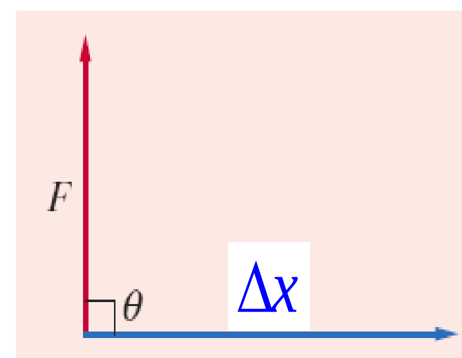
3 當 $\theta = 90°$ → $W = 0$ 力對物體不作功（作功為零）



正功



負功



不作功

【討論】

（1）功為零的狀況

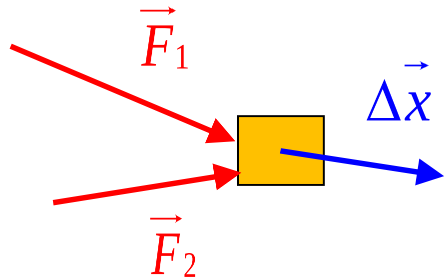
$F=0$ [例]：等速度運動的物體，合力作功為零

$\Delta x=0$ [例]：推牆壁但牆壁不動，人對牆壁不作功

$\vec{F}\perp\Delta\vec{x}$ [例]：單擺運動時，張力對擺錘不作功。

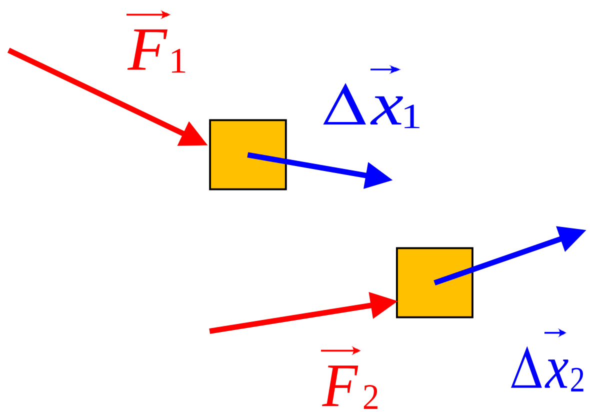
第52頁

（2）當有**許多**外力**同時**作用在同一物體上，則
總功＝個別力所作的功之代數和，也是總合力所作的功。



$$W=W_1+W_2=\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{x}+\vec{F}_2\cdot\Delta\vec{x}$$
$$=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\cdot\Delta\vec{x}=\vec{F}_{合力}\cdot\Delta\vec{x}=W_{合力}$$

（3）當有**許多**外力**不同時**作用在同一物體上，則
總功＝不同時候的力所作的功代數和（不可取合力）



$$W=W_1+W_2=\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{x}_1+\vec{F}_2\cdot\Delta\vec{x}_2\neq W_{合力}$$

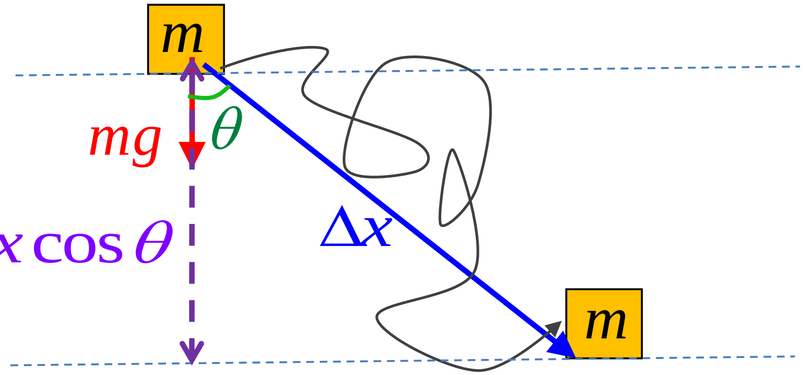
（4）功的大小、正功或負功均與座標系的選擇**有關**。
若無特別指明，則選取地面為慣性座標系。

二、功的計算：

（1）定力作功：

利用功的定義 $W = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\vec{x}$

[例如] 地表附近重力作功 $\boxed{Wg=\pm mgh \quad h\text{為起末位置高度差}}$



$h = \Delta x \cos\theta$

$W_g = mg\underline{\Delta x \cos\theta} = mg\underline{h}$

第52頁

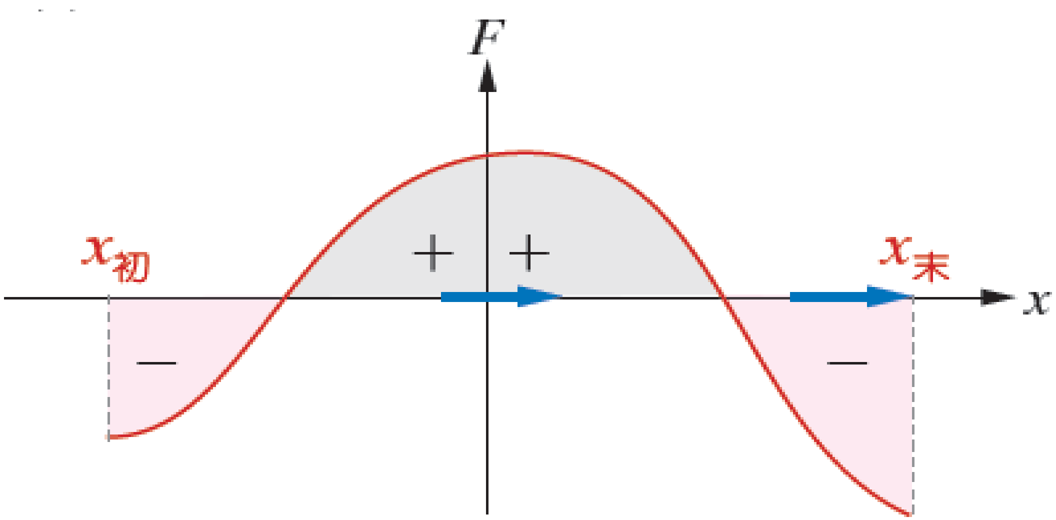
（2）變力作功

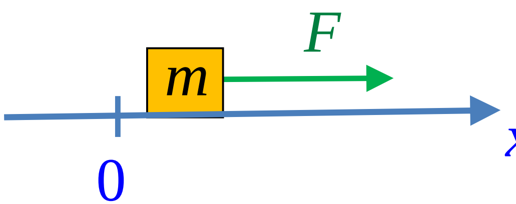
1 直線運動的變力作功：

若**力的方向與位移恆同在一直線上**，且作用力為位置之函數，則**作用力 F 與位置 x 關係圖 $F-x$ 圖中曲線下的面積，即為此段位移內該力所做的功**。

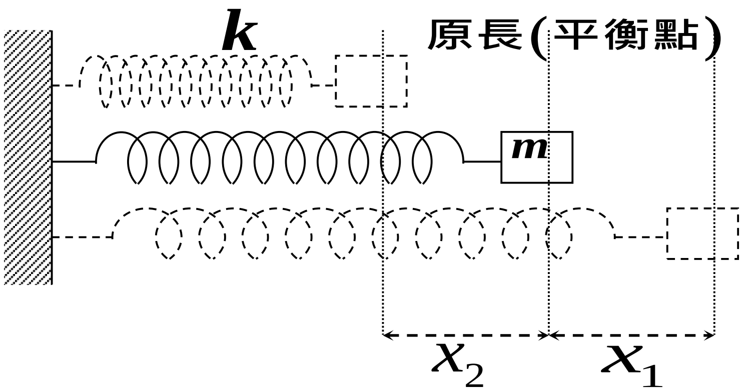
a.若力方向與位移方向**同**向，所夾「＋」面積代表力　F　作正功。

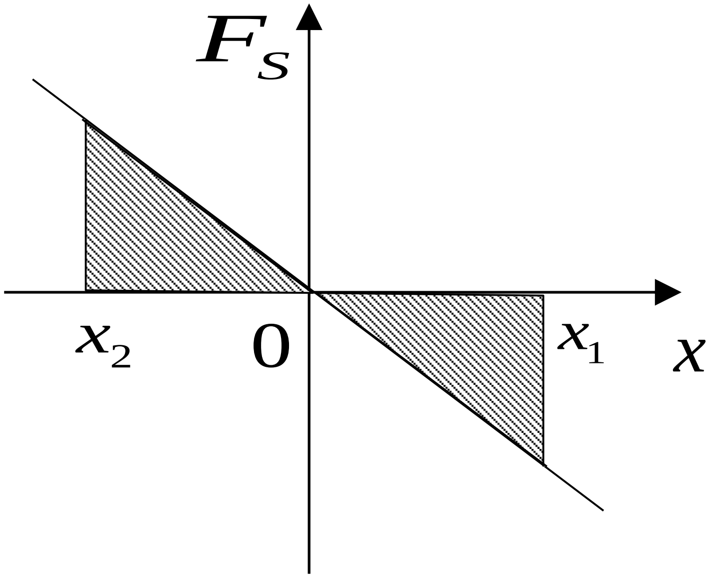
b.若力方向與位移方向**反**向，所夾「－」面積代表力　F　作負功。





[例如] 彈力所作的功



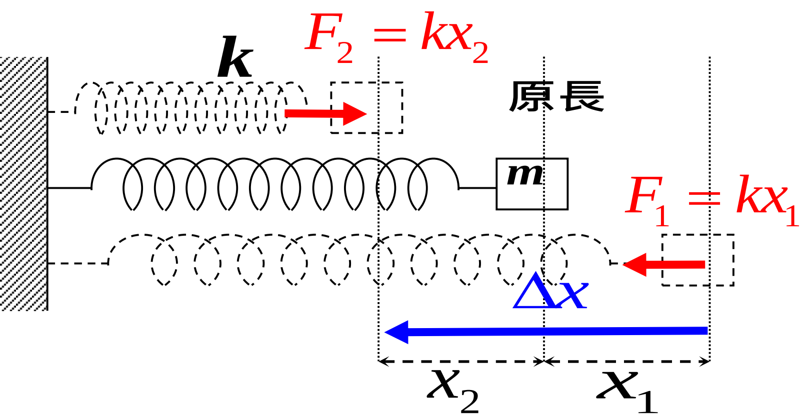


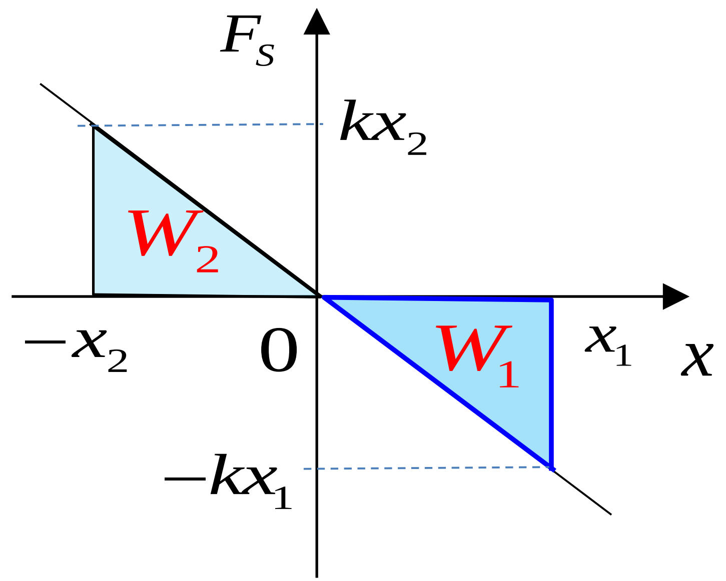
自彈簧形變量 x_1到形變量 x_2過程（位移方向固定）中彈力作的功為

$$\boxed{W_S = \frac{1}{2}kx_1^{\,2} - \frac{1}{2}kx_2^{\,2}}$$

第53頁

[解析] 彈力所作的功



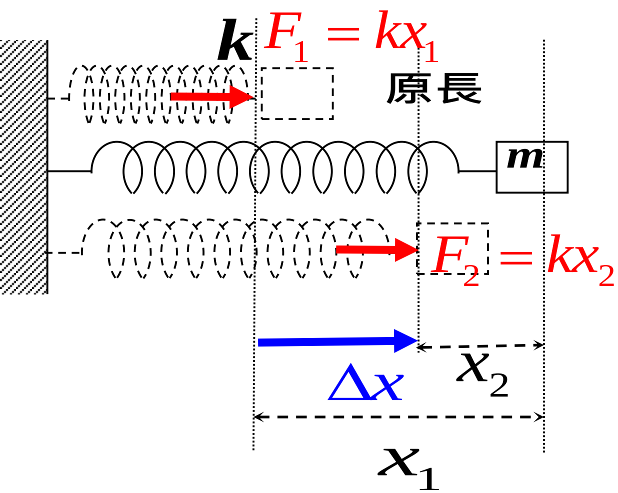


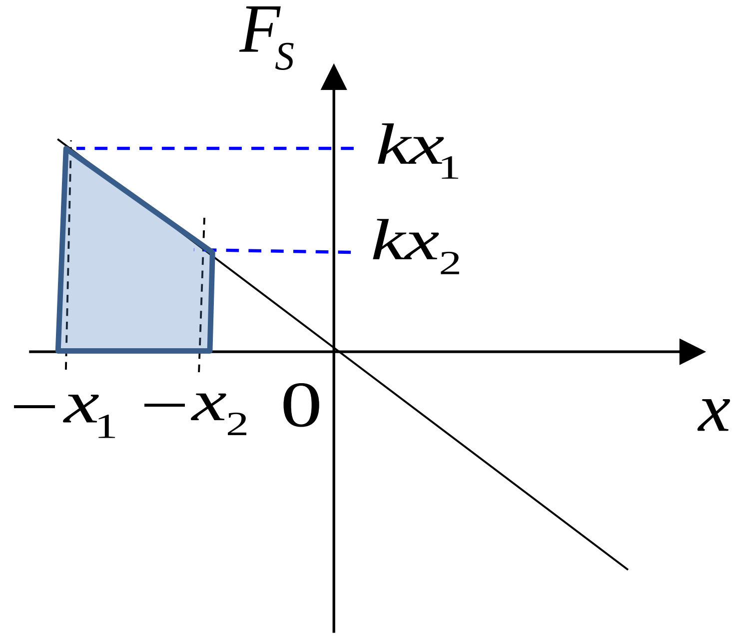
自彈簧伸長量 x_1到壓縮量 x_2過程中彈力作的功為

$$W_S\left(x_1 \to x_2\right) = W_1 + W_2$$

$$= \left(+\frac{1}{2}kx_1{}^2\right) + \left(-\frac{1}{2}kx_2{}^2\right) = \frac{1}{2}kx_1{}^2 - \frac{1}{2}kx_2{}^2$$

[解析] 彈力所作的功





自彈簧壓縮量 x_1 到壓縮量 x_2 過程中彈力作的功為

$$W_S\left(x_1 \to x_2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(kx_1+kx_2\right)\left(x_1-x_2\right)=\frac{1}{2}kx_1{}^2-\frac{1}{2}kx_2{}^2$$

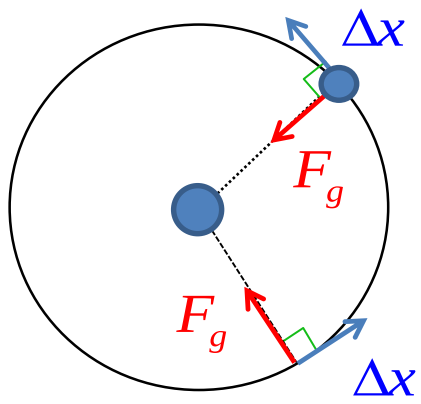
（2）變力作功

2 曲線運動的變力作功：【高中少用】

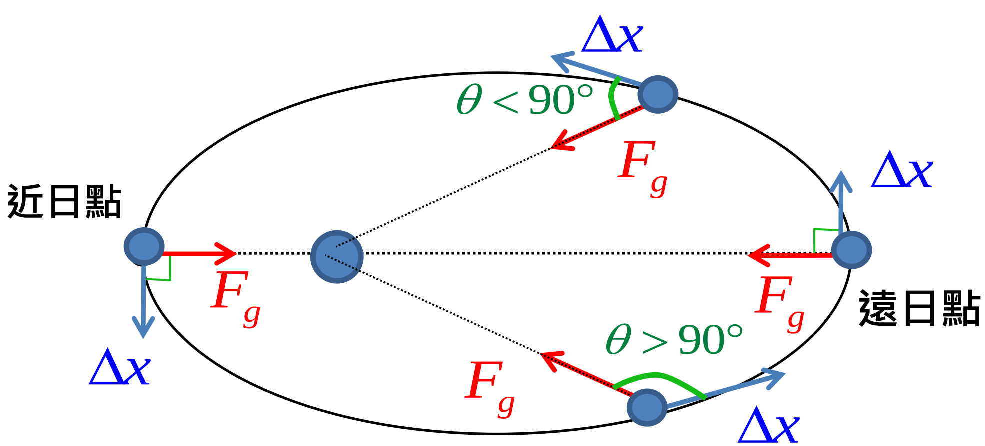
若外力為非一直線方向的變力時，可將位移分成許多極小區間，每一極小區間之作用力可視為定力，因此將各極小區間之功加總起來即為總功。

$$W=\overrightarrow{F_1}\cdot\Delta\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{F_2}\cdot\Delta\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{F_3}\cdot\Delta\overrightarrow{x_3}\ldots.$$

[例如] 地球繞太陽運行萬有引力作功。



$$\theta = 90^\circ \quad W_g = 0$$



1 遠日點至近日點

$$\theta < 90^\circ \rightarrow W_g > 0$$ 正功

2 近日點至遠日點

$$\theta > 90^\circ \rightarrow W_g < 0$$ 負功

3 繞一圈回到原出發點

$$W_g = 0$$

三、動能*K*：（*Kinetic energy*）

（1）定義：物體因<u>運動</u>所具有的能，為純量，與功的單位相同。

（2）公式：$\boxed{K=\frac{1}{2}mv^2}$

（3）單位：焦耳(J)【質量：公斤（kg），速度：公尺/秒（m/s）】

四、功能定理：（*work-energy theorem*）

（1）定義：

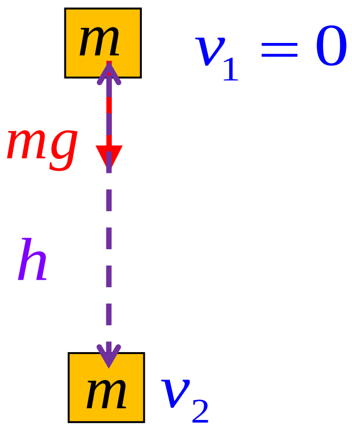
所有的力對物體所作的總功等於物體的動能變化量

（2）公式：$\boxed{W_{所有力} = \Delta K}$

$$W_1 + W_2 + W_3 \ldots = \frac{1}{2} m v_2^{\ 2} - \frac{1}{2} m v_1^{\ 2}$$

第54頁

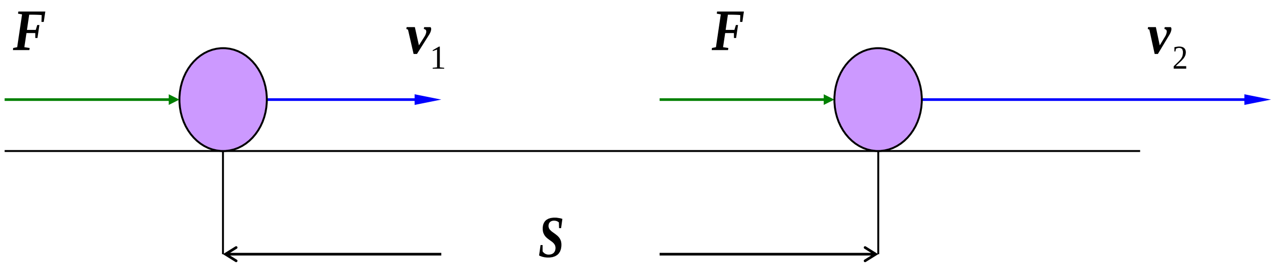
[說明]



$$W_g = \Delta K$$

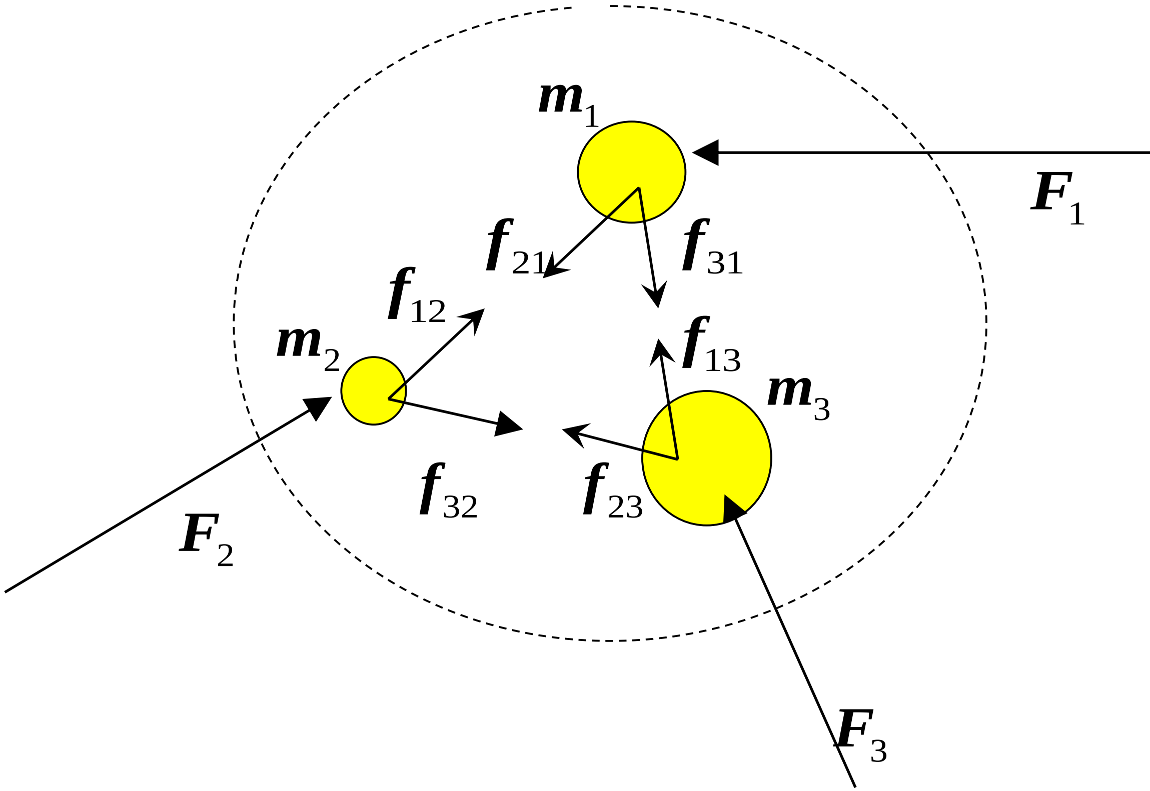
$$mgh = \frac{1}{2} m v_2^{\ 2} - 0$$

[說明] $a = \dfrac{F}{m}$ $\quad v_2^{\ 2} = v_1^{\ 2} + 2aS \quad \rightarrow \quad W = FS = \dfrac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \dfrac{1}{2}mv_1^{\ 2}$



[補充] 各質點位移不同的系統的系統：

$$W_{f_{21}} + W_{f_{31}} + W_{F_1} = \Delta K_1$$
$$W_{f_{12}} + W_{f_{32}} + W_{F_2} = \Delta K_2$$
$$W_{f_{13}} + W_{f_{23}} + W_{F_3} = \Delta K_3$$



第49頁

註：

對物體施力，使物體獲得衝量，物體的動能<u>不一定</u>改變（如：等速率圓周運動）

註：

動能與動量的關係：

（1）質點的動量與動能的關係 $\boxed{p=\sqrt{2mK}}$ $\boxed{K=\frac{p^2}{2m}}$

（2）質點動能為零時，動量必為零，反之亦然。質點動能改變時，動量一定改變，反之未必成立。

（3）質點系統之總動能為零，其總動量必定為零，<u>反之未必成立</u>。(例如：原本靜止的炸彈爆炸後瞬間，炸彈碎片總動量和為零(因為不受外力)，但總動能卻不為零。)

下列何種情形中物體所受之力對物體所作之功為正功、負功或零？

(A)斜拋運動之物體，初拋與落地高度相同，則下列狀況重力作功。
定力作功

1 初拋至最高點
2 最高點至落地
3 初拋至落地

(A)

$\boxed{W_g = \pm mgh \quad h\text{為起末位置高度差}}$

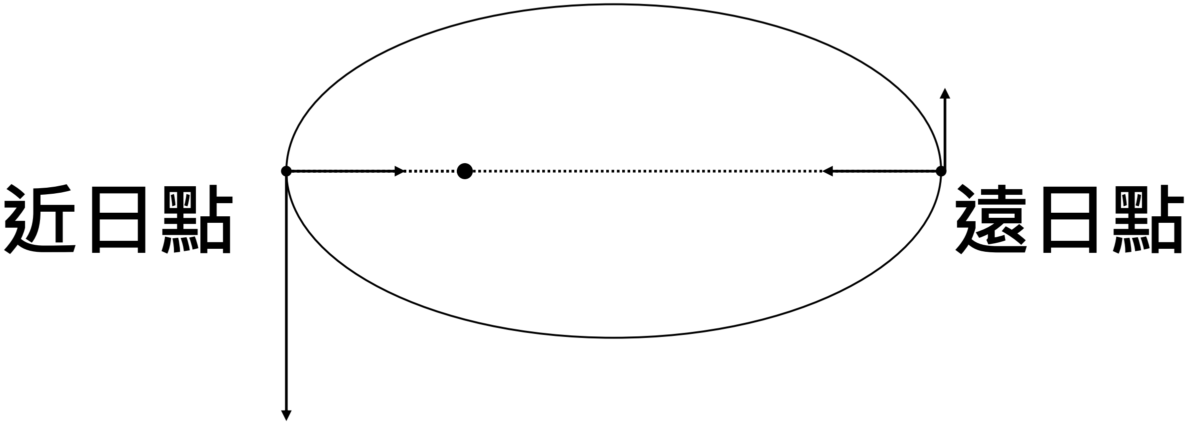
1 初拋至最高點　高度上升重力作正功

2 最高點至落地　高度下降重力作負功

3 初拋至落地　高度不變重力不作功

(B)地球繞太陽橢圓軌道運行，則下列狀況萬有引力作功。
曲線運動的變力作功

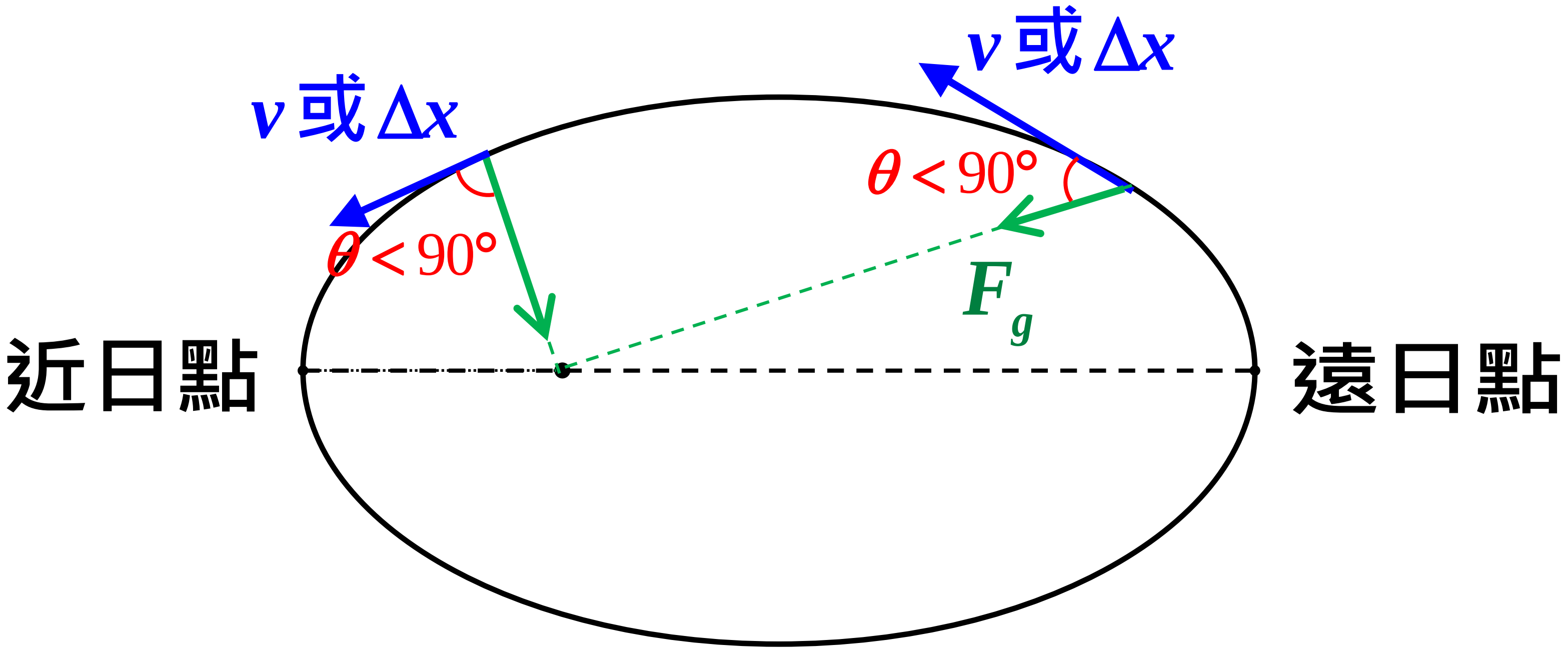
1 遠日點至近日點
2 近日點至遠日點
3 繞一圈回到原出發點



曲線運動的變力作功

1 遠日點至近日點

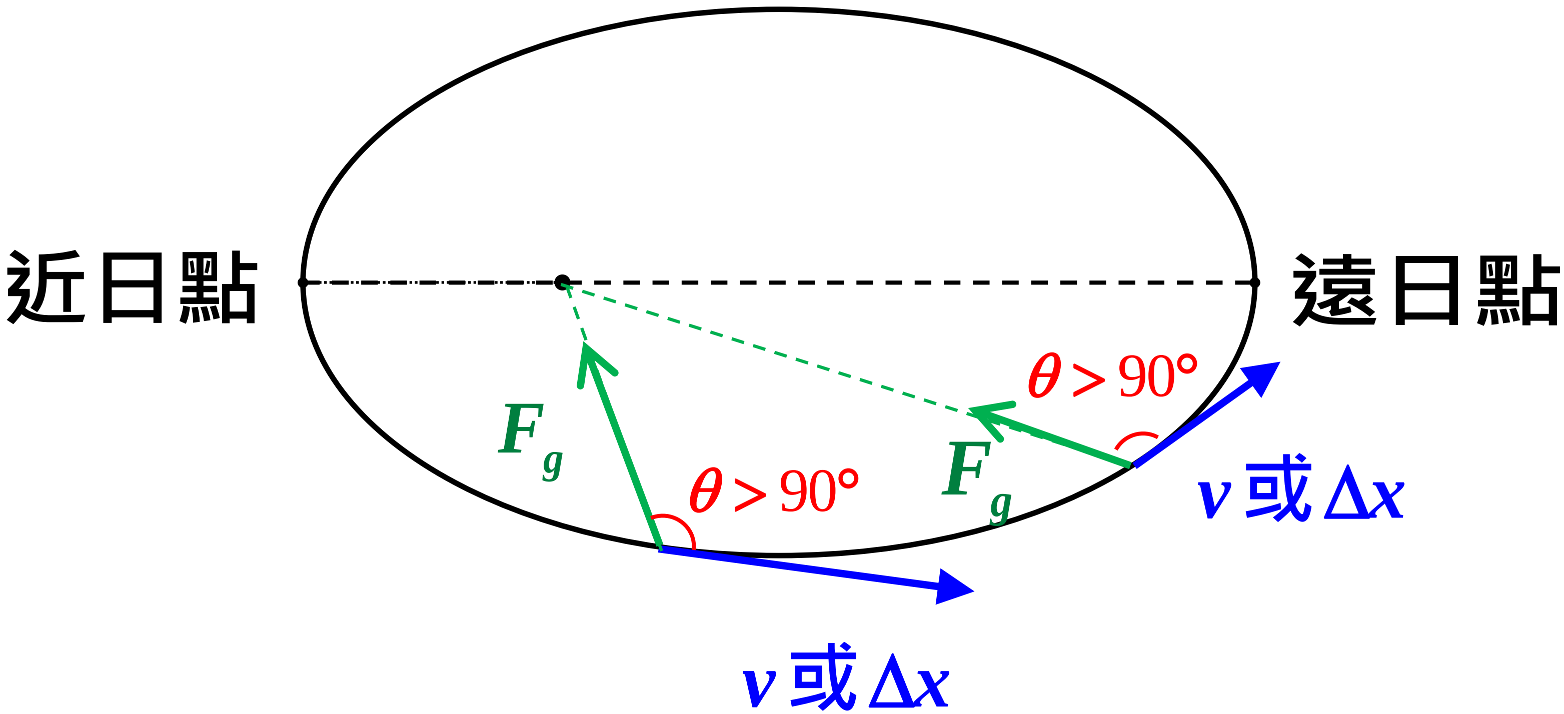
$$\theta < 90° \rightarrow \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{x} > 0 \rightarrow W_g > 0$$ 正功



曲線運動的變力作功

2 近日點至遠日點

$\theta > 90° \rightarrow \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{x} < 0 \rightarrow W_g < 0$ 負功

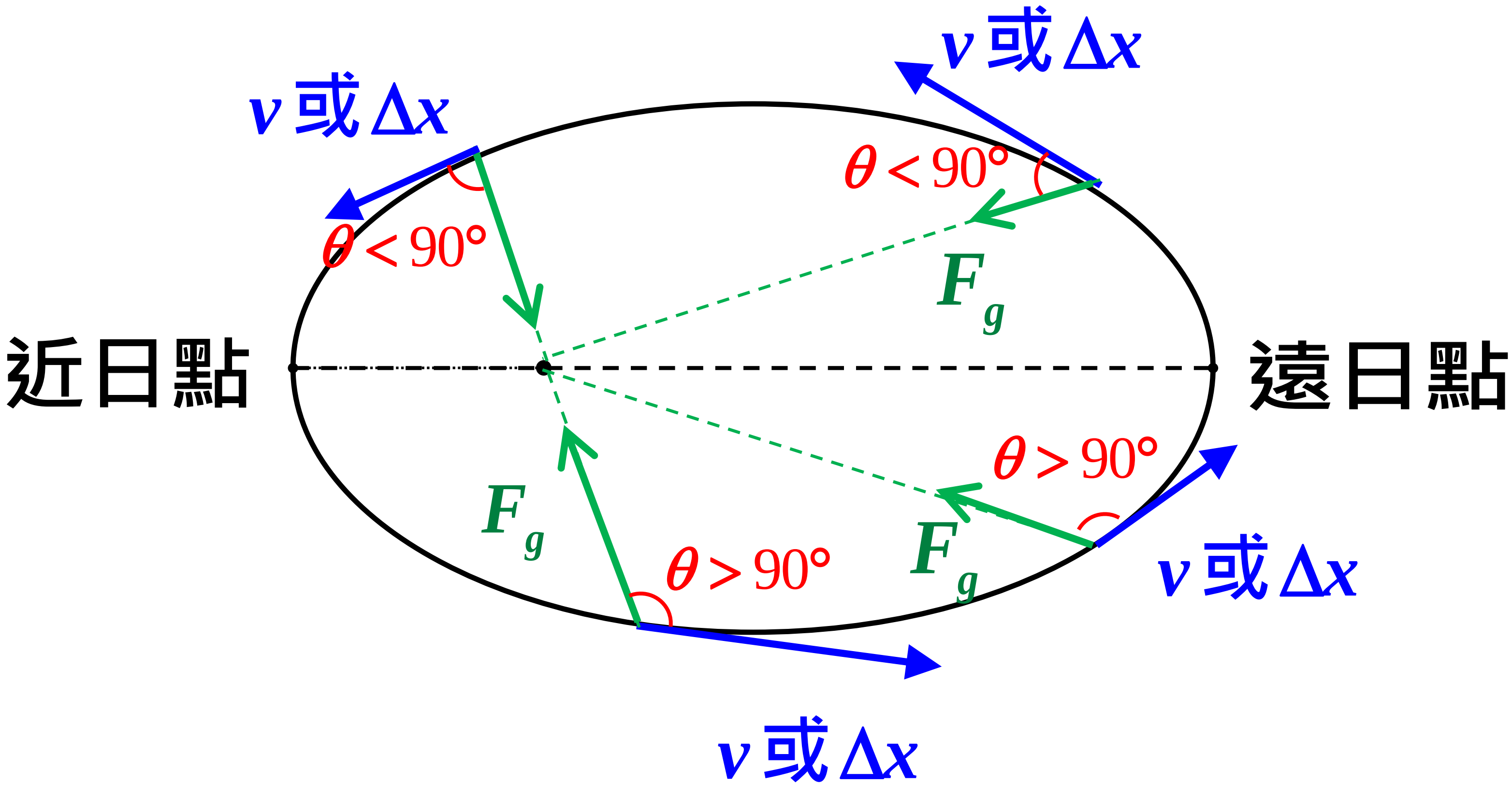


曲線運動的變力作功

3 繞一圈回到原出發點

由對稱性知

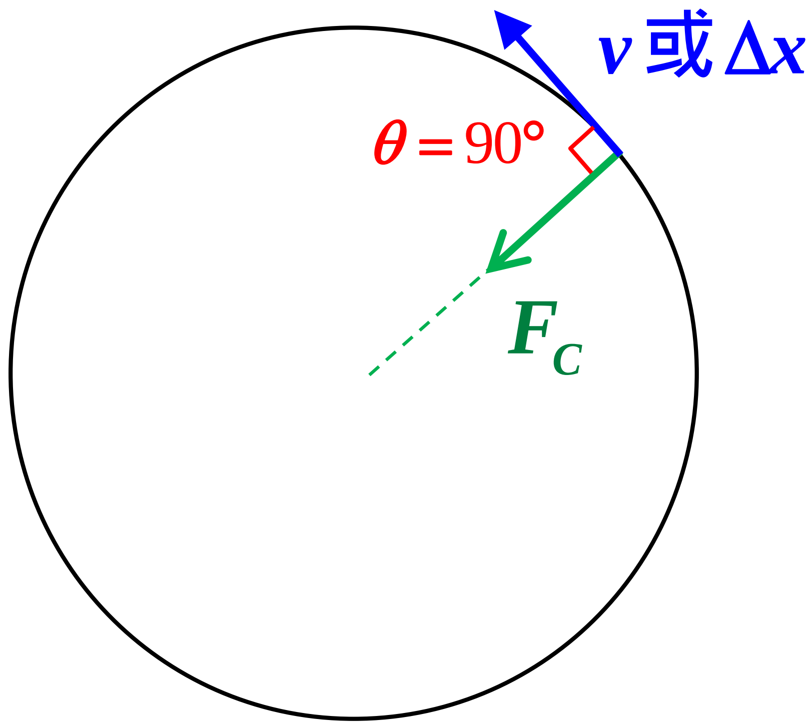
遠日點至近日點所作的正功+近日點至遠日點所作的負功=0



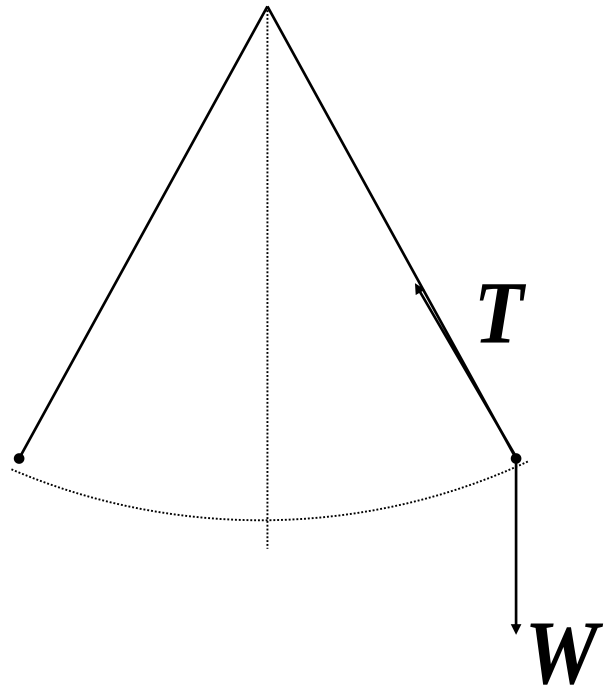
(C)等速率圓周運動，向心力作功。

曲線運動的變力作功

$\vec{F}_C \perp \Delta\vec{x}$ $\theta=90° \rightarrow \vec{F}_C \cdot \Delta\vec{x}=0 \rightarrow W_C=0$ 不作功



(D)單擺擺動時，自最高點到最低點，則下列狀況對擺錘作功。
曲線運動的變力作功
1 繩子張力：曲線運動的變力作功
2 重力：定力作功



第55頁

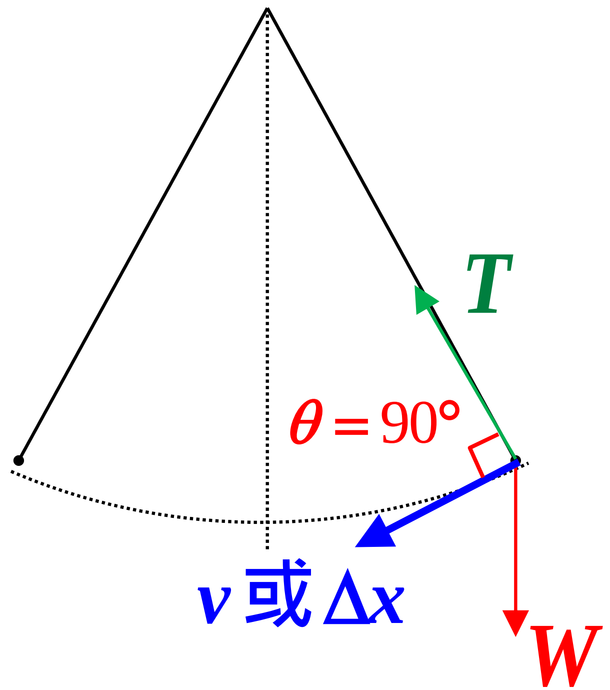
1 繩子張力：曲線運動的變力作功

$\vec{T} \perp \Delta\vec{x} \quad \theta=90° \rightarrow \vec{T}\cdot\Delta\vec{x}=0 \rightarrow W_T=0$ 不作功

2 重力：定力作功

$W_g=\pm mgh$ h為起末位置高度差

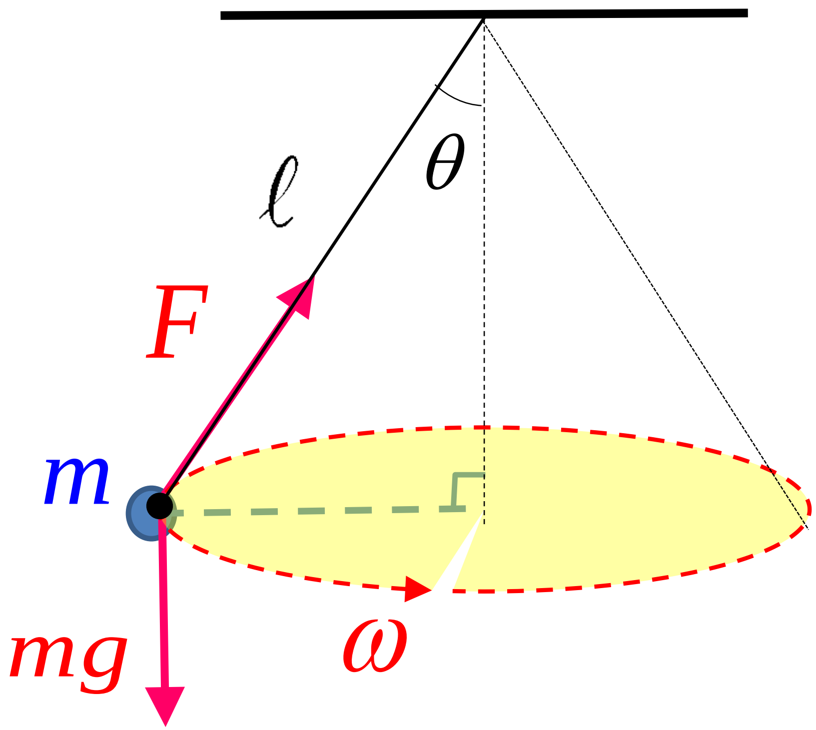
高度下降重力作負功



(E)錐動擺擺動時，則下列狀況對擺錘作功。

1 繩子張力：曲線運動的變力作功

2 重力：定力作功



(E)

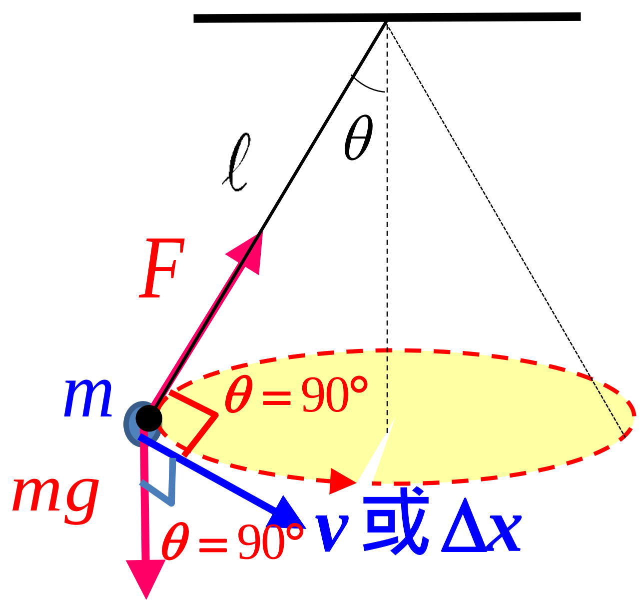
1 繩子張力：曲線運動的變力作功

$\vec{T}\perp\Delta\vec{x}$ θ=90° $\rightarrow \vec{T}\cdot\Delta\vec{x}=0 \rightarrow W_T=0$ 不作功

2 重力：定力作功

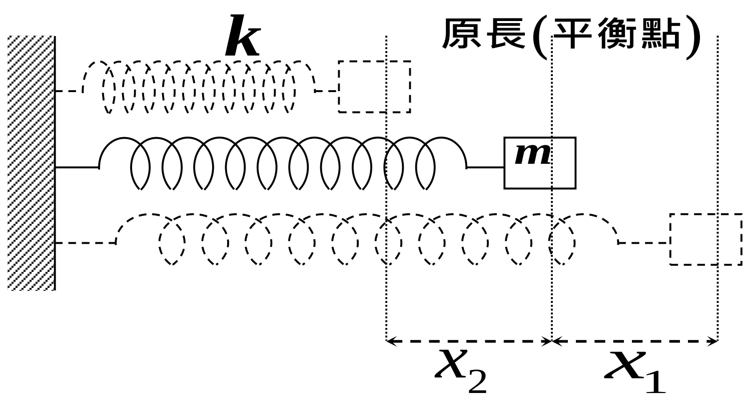
$W_g=\pm mgh$ h為起末位置高度差

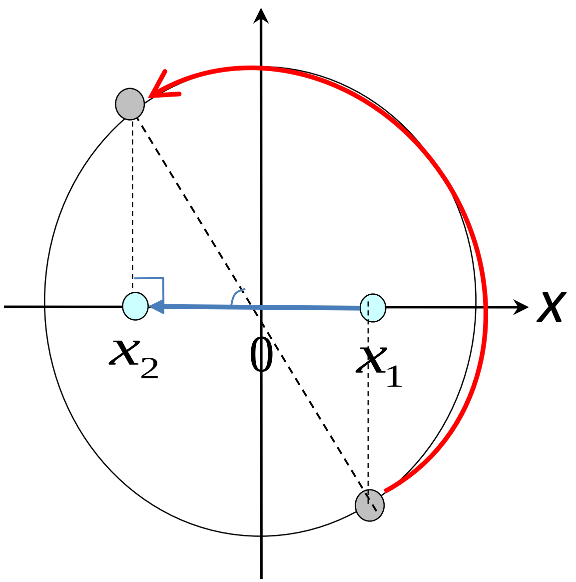
高度不變重力不作功



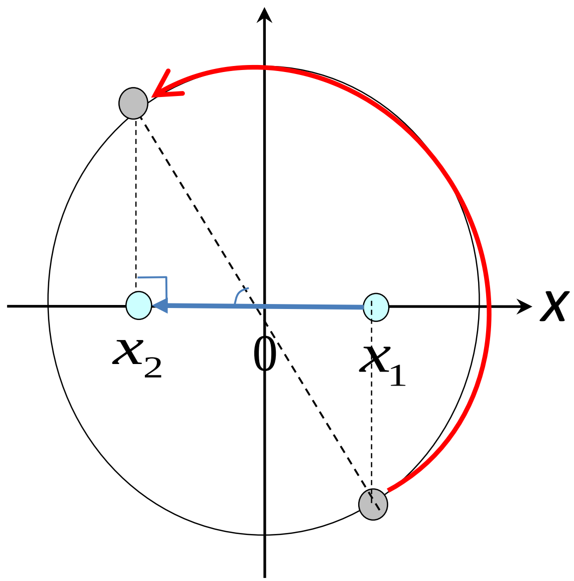
(F)連接水平彈簧物體的振動，在半個週期內，彈力對物體所作的功 $\Rightarrow$ 零

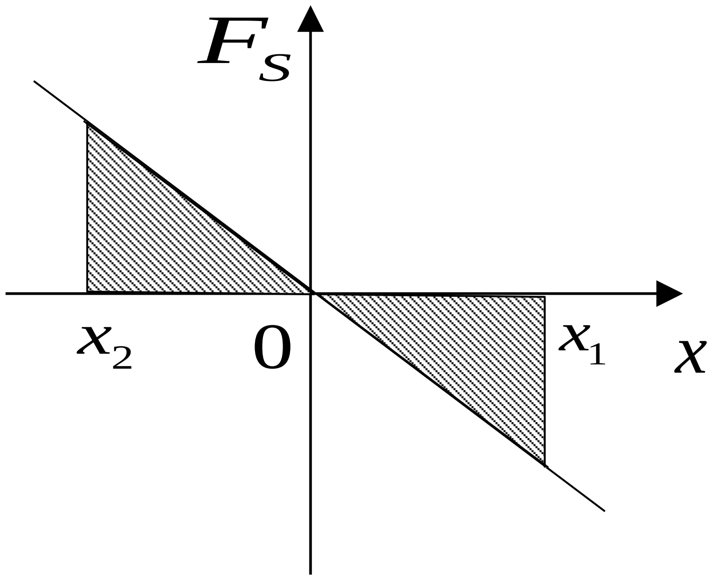
直線運動的變力作功





$\because$ 半週期 $\therefore x_1 = x_2$





自彈簧形變量 x_1到形變量 x_2過程中彈力作的功為

$$\boxed{W=\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}-\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}}$$

$\because$ 半週期 $\therefore x_1=x_2$ $\therefore$ 彈力作功$W=0$

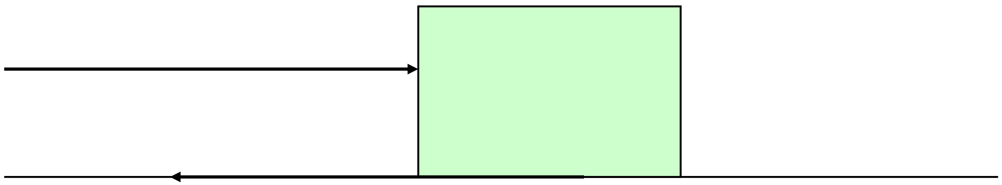
(G)在水平粗糙面上，沿一封閉圓軌道切線方向施力推物，使繞行一周，則下列狀況作功。

1 施力：曲線運動的變力作功

2 摩擦力：曲線運動的變力作功

3 重力：定力作功

等速前進

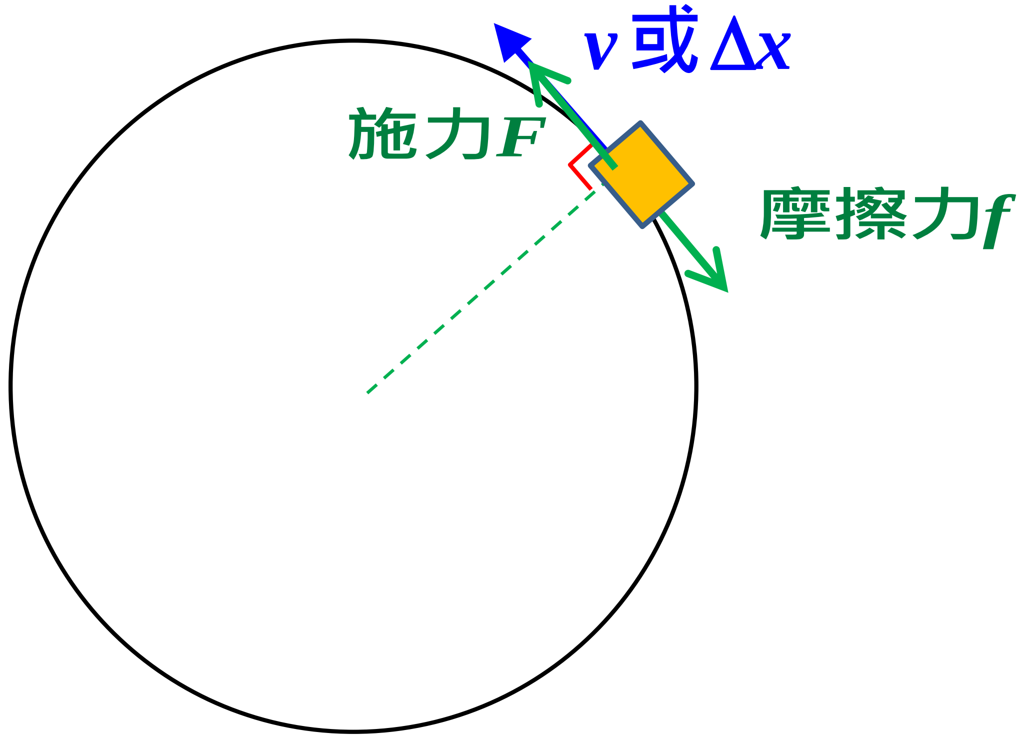


第56頁

1 施力：曲線運動的變力作功 $\vec{F}$與$\Delta\vec{x}$ 同向 $\rightarrow W_F > 0$ 作正功

2 摩擦力：曲線運動的變力作功 $\vec{f}$與$\Delta\vec{x}$ 反向 $\rightarrow W_f < 0$ 作負功

3 重力：定力作功 高度不變重力不作功



第56頁

(H)手提皮箱，則下列狀況手對皮箱作功

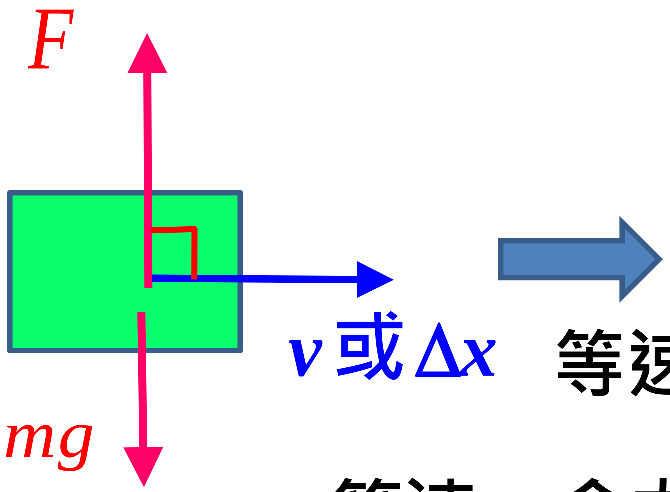
1 等速度在水平路面行走

2 等加速度在水平路面向前行走

3 等速度上樓

第56頁

1 等速度在水平路面行走

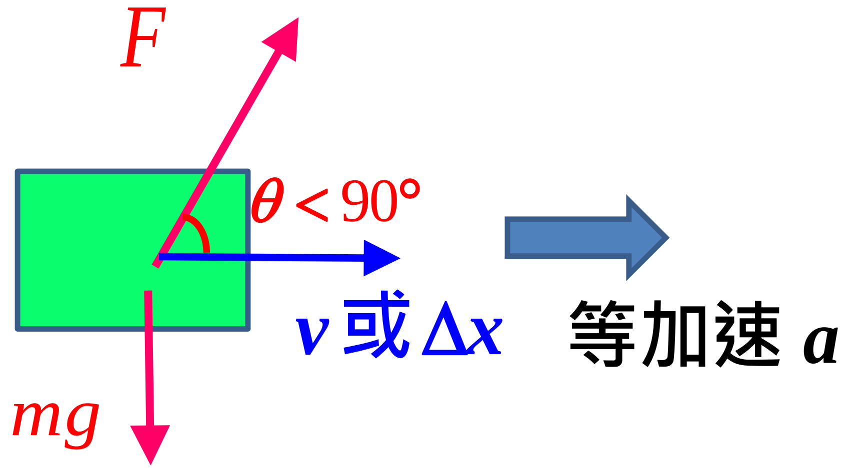


等速 v

等速　合力$=0$　$F=mg$

$\vec{F}\perp\Delta\vec{x}$　$\theta=90°\rightarrow\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}=0\rightarrow W_F=0$ 不作功

2 等加速度在水平路面向前行走

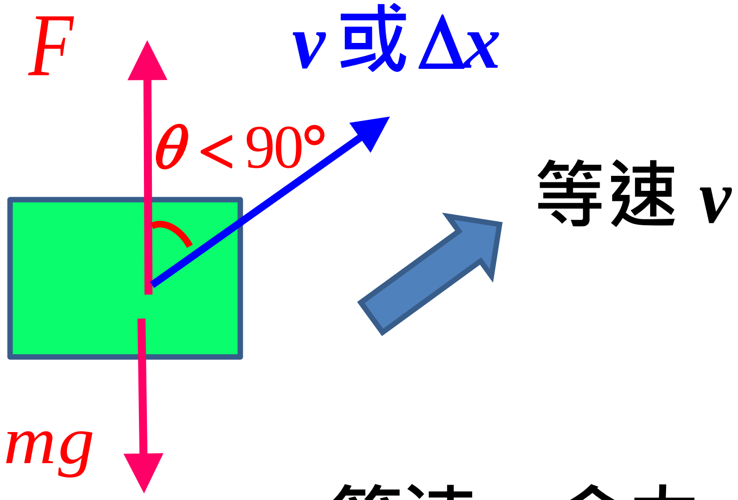


水平方向 合力 $= ma$ $F\cos\theta = ma$

鉛直方向 合力 $= 0$ $F\sin\theta = mg$

$\theta < 90° \rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} > 0 \rightarrow W_F > 0$ 作正功

3 等速度上樓



等速　合力$=0$　$F = mg$

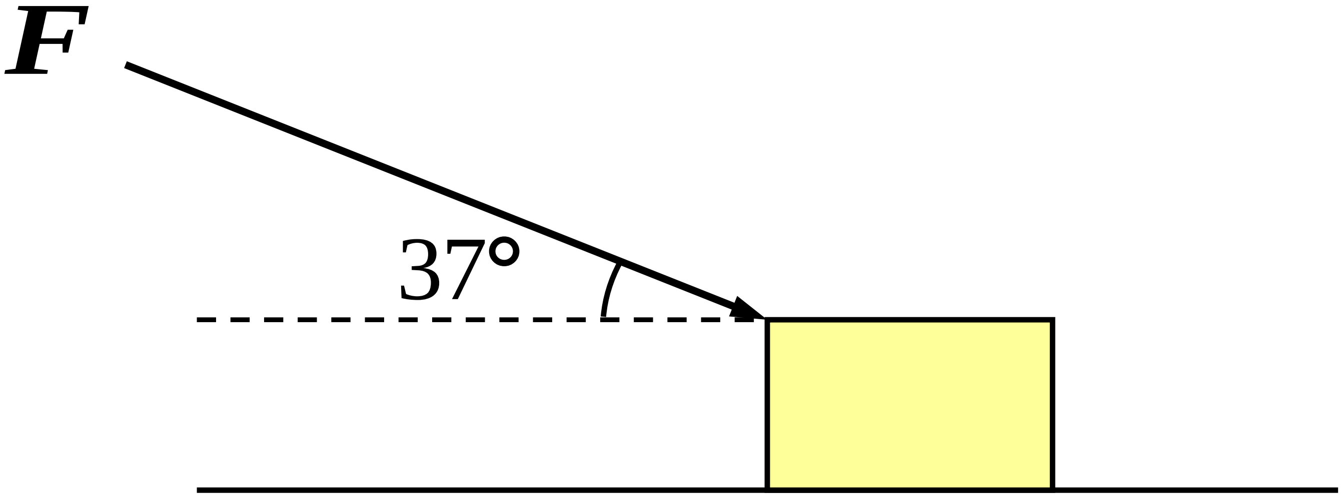
$\theta < 90° \rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} > 0 \rightarrow W_F > 0$ 作正功

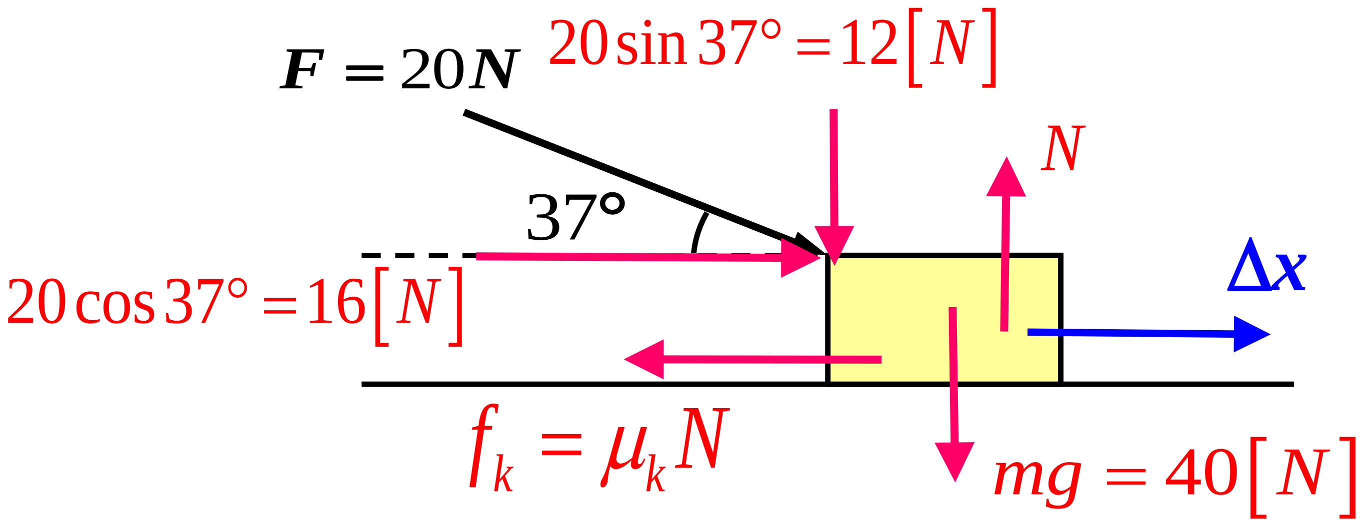
*1.*如圖所示，以*20*牛頓的推力，與水平夾*37* °角，施於質量為*4*公斤的物體。物體置於水平地面上由靜止漸漸滑動，物體與地面間動摩擦係數為*0.2*，設該處的重力加速度*g* = *10* 公尺／秒^2，試問在最初*2*秒內：

(1) 木箱之位移為？ (2) 施力對物體所作功？

(3) 摩擦力對物體所作功？ (4) 物體所獲之淨功？

。





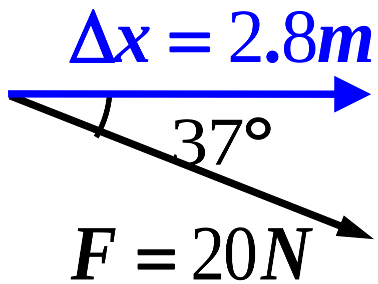
$$\begin{cases} \text{鉛直方向} \quad [\text{合力}=0] \quad N=40+12=52[N] \\ \text{水平方向} \quad [F=ma] \quad 16-0.2\times 52=4a \quad \therefore\ a=1.4[m/s^2] \end{cases}$$

(1) $\left[\Delta x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2\right]$ $\quad \Delta x=\dfrac{1}{2}\times 1.4\times 2^2=\mathbf{2.8}[m]$

(2) $[W=F\Delta x\cos\theta]$ $\quad W_F=20\times 2.8\times\cos 37°=44.8[J]$

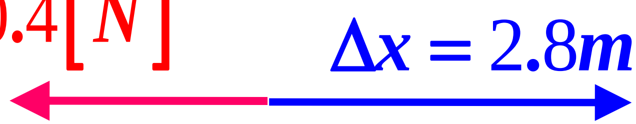
第57頁

$(2)\quad [W = F\Delta x\cos\theta] \qquad W_F = 20\times 2.8\times\cos 37^\circ = 44.8[J]$



$(3)\quad [W = F\Delta x\cos\theta] \qquad W_{f_k} = 10.4\times 2.8\times\cos 180^\circ = -29.12[J]$

$f_k = 0.2\times 52 = 10.4[N]$



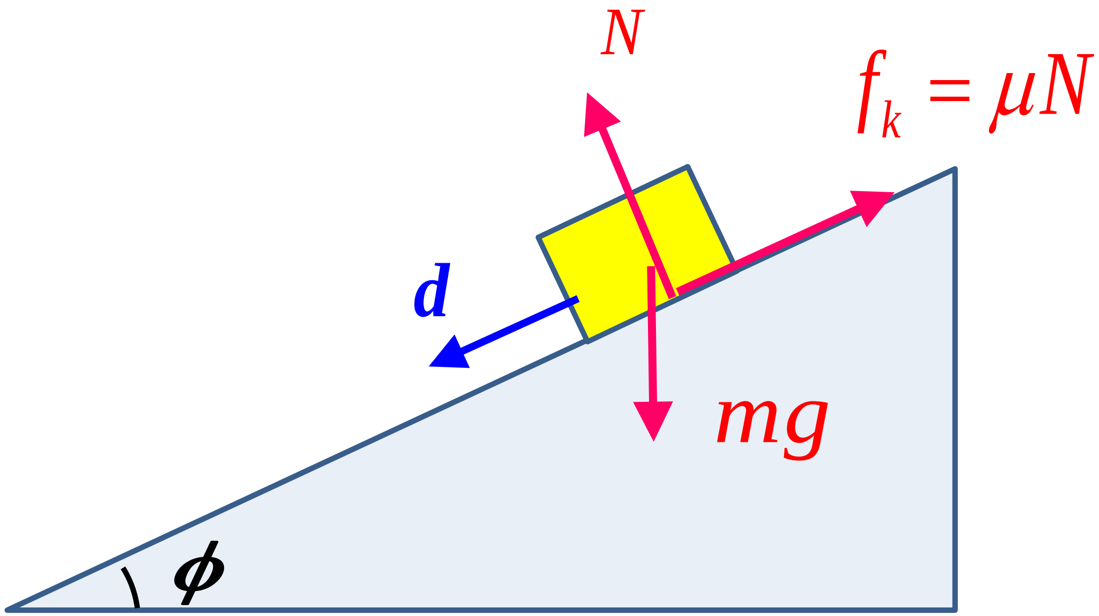
$(4)\quad W_g = 0 \quad W_N = 0$

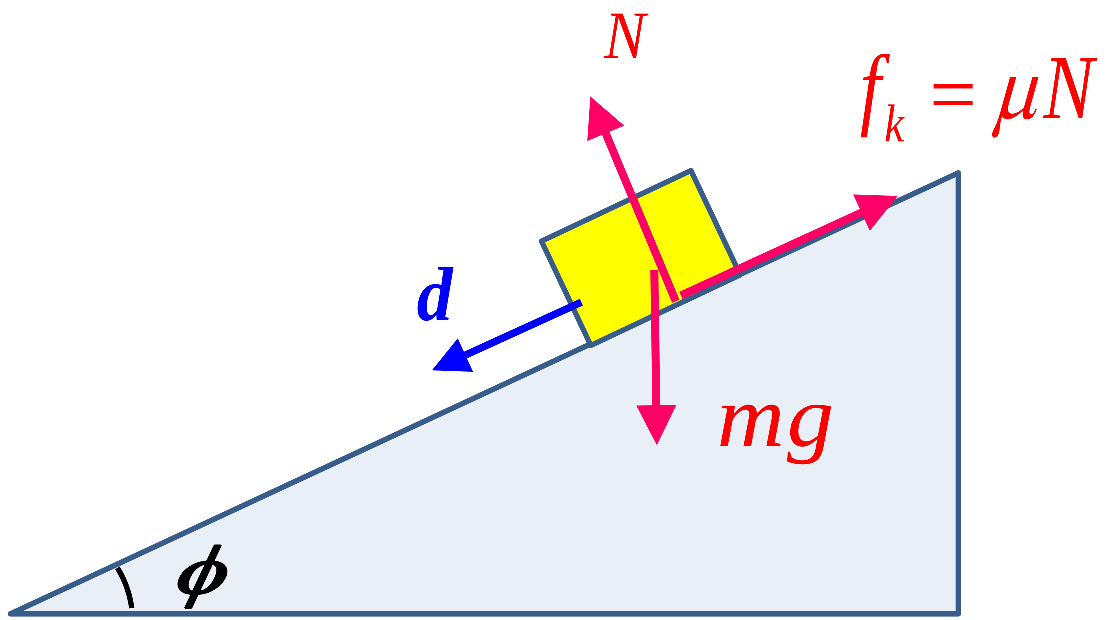
$\therefore W = W_g + W_N + W_F + W_{f_k} = 0 + 0 + 44.8 - 29.12 = 15.68[J]$

2.一質量m的木塊自傾斜角為ϕ的粗糙斜面上，設木塊與斜面的摩擦係數μ，下滑d 距離，重力加速度g，求此過程中：

（1）重力、摩擦力、正向力對木塊所作的功各為何？

（2）外力對木塊所作總功為何？





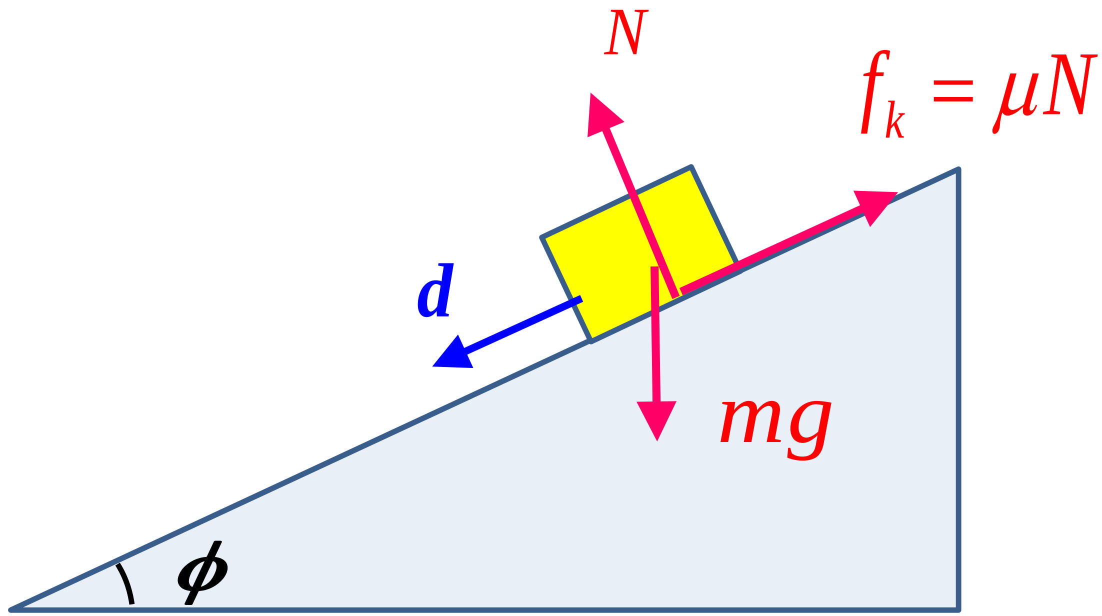
垂直斜面方向 $\left[合力 = 0\right]$ $N = mg\cos\phi$

$(1)\quad [W = F\Delta x\cos\theta]$

$W_g = mgd\cos(90° + \phi) = mgd\sin\phi$

$W_{f_k} = f_k d\cos 180° = -\mu N d = -\mu mgd\cos\phi$

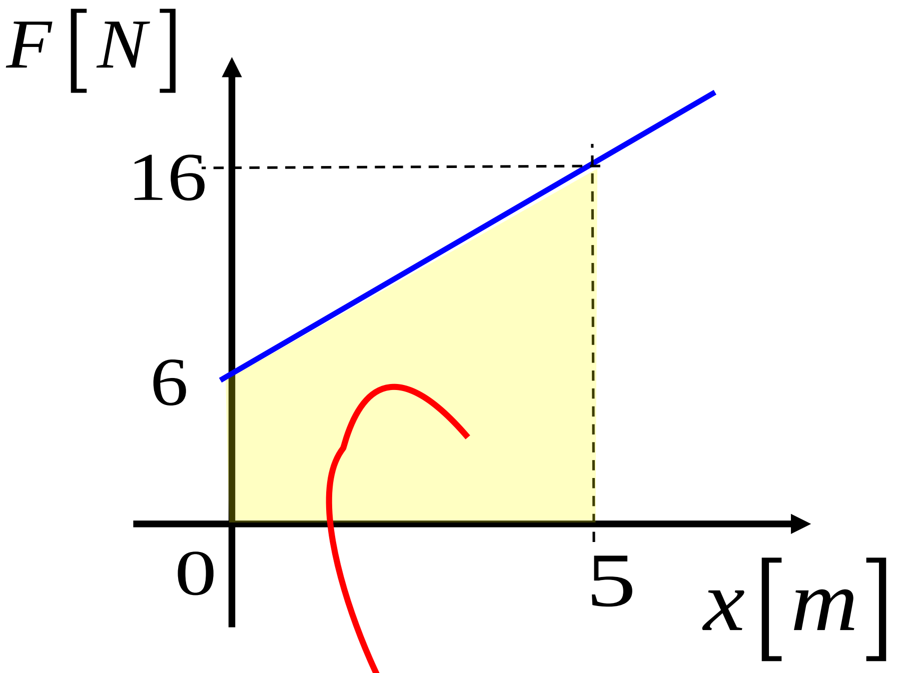
$W_N = 0$



$$(2) \quad [W = F\Delta x \cos\theta]$$

$$W = W_g + W_{f_k} + W_N = mgd\sin\phi - \mu mgd\cos\phi$$

*1.*質量為*2.0*公斤的質點沿*x*軸運動，且最初靜止位置在 *x = 0*處，若物體受力與位置的關係為*F = 2 x + 6*，*x*單位為公尺，*F*單位為牛頓，若位移為*5.0*公尺，則此變力對物體共作了多少功？



$$W = F - x\text{面積} = \frac{1}{2}\times\ 6+16\ \times 5 = 55\ J$$

$$W = F - x\text{面積} = \frac{1}{2}\times 3\times 30 = \frac{1}{2}\times 5\times v^2 \rightarrow v = 3\sqrt{2}$$

*2.*若彈簧原長*20*公分，當施以*20*牛頓之力，可伸長至*25*公分，則施力於該彈簧使其由*15*公分之長度壓為*10*公分之長度，需至少對彈簧作功？

最少作功 就是最少施力下所作的功

此時施力＝彈力 方向相反

∴最小施力時 施力作功$W_F = -$ 彈力作功 W_S

$$\left[F = kx\right] \quad 20 = k \times \left(25 - 20\right) \quad \therefore k = 4\left[N / cm\right]$$

$$x_1 = 20 - 15 = 5 \ \left[cm\right]$$

$$x_2 = 20 - 10 = 10 \ \left[cm\right]$$

$$\therefore \text{施力作功} W_F = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(10^2 - 5^2\right) = 150\left[J\right]$$

*3.*壓縮一彈簧*x*長，至少需施力*F*，作功*W*。若再繼續壓縮*x*長，則：
（A）需施力？
（B）至少施力需再作功？

$$(A) \quad \left[F = kx\right] \quad F = kx \quad F' = k \times 2x = 2F$$

$$(B) \quad \left[W = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2\right]$$

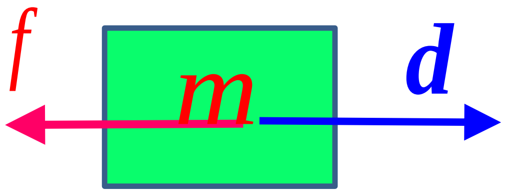
$$W = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k0^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W' = \frac{1}{2}k(2x)^2 - \frac{1}{2}kx^2 = 3 \times \frac{1}{2}kx^2 = 3W$$

*1.*一人造衛星繞地球作半徑為*r*的等速圓周運動時之動能為*K*，則此衛星<u>動量的時變率</u>為？。

$$\frac{\Delta P}{\Delta t}=F=m\frac{v^2}{r}=\frac{1}{r}\times\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{K}{r}$$

2.（1）質量比5：3的甲、乙兩物體，其動能比為4：3。若用相同的阻力使兩物停止，則甲、乙兩物行經距離比？
（2）承上題，阻力對甲、乙兩物作用的時間比？



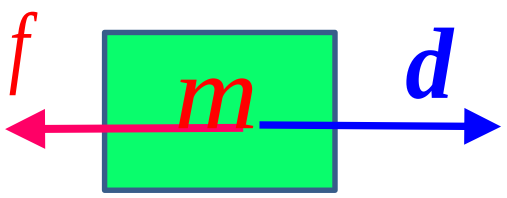
$$(1)\quad [W=\Delta K]$$

$$-fd=0-K \rightarrow fd=K \quad \therefore d=\frac{K}{f}\propto K$$

$$(2)\quad [\Delta P=F\Delta t]\left[P=\sqrt{2mK}\right]$$

$$0-\sqrt{2mK}=-f\Delta t \quad \therefore \Delta t=\frac{\sqrt{2mK}}{f}\propto\sqrt{mK}$$

2.（1）質量比5：3的甲、乙兩物體，其動能比為4：3。若用相同的阻力使兩物停止，則甲、乙兩物行經距離比？
（2）承上題，阻力對甲、乙兩物作用的時間比？



$$1 \qquad W = \Delta K$$

$$-fd = 0 - K \rightarrow fd = K \quad \therefore d = \frac{K}{f}$$

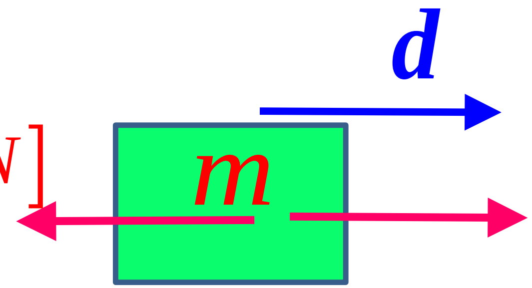
$$2 \qquad \Delta P = F\Delta t \quad \left[P = \sqrt{2mK}\right]$$

$$0 - \sqrt{2mK} = -f\Delta t \quad \therefore \Delta t = \frac{\sqrt{2mK}}{f}$$

第59頁

*3.*一質量為*2.0*公斤的物體放在水平桌面上，物體與桌面的滑動摩擦係數為*0.25*。今以*6.0*牛頓的力沿水平方向推物體，使作加速度運動，當物體移動*5.0*公尺時，此物體的動能約增加多少焦耳？

$f_k = \mu_k N = 0.25 \times 20 = 5[N]$

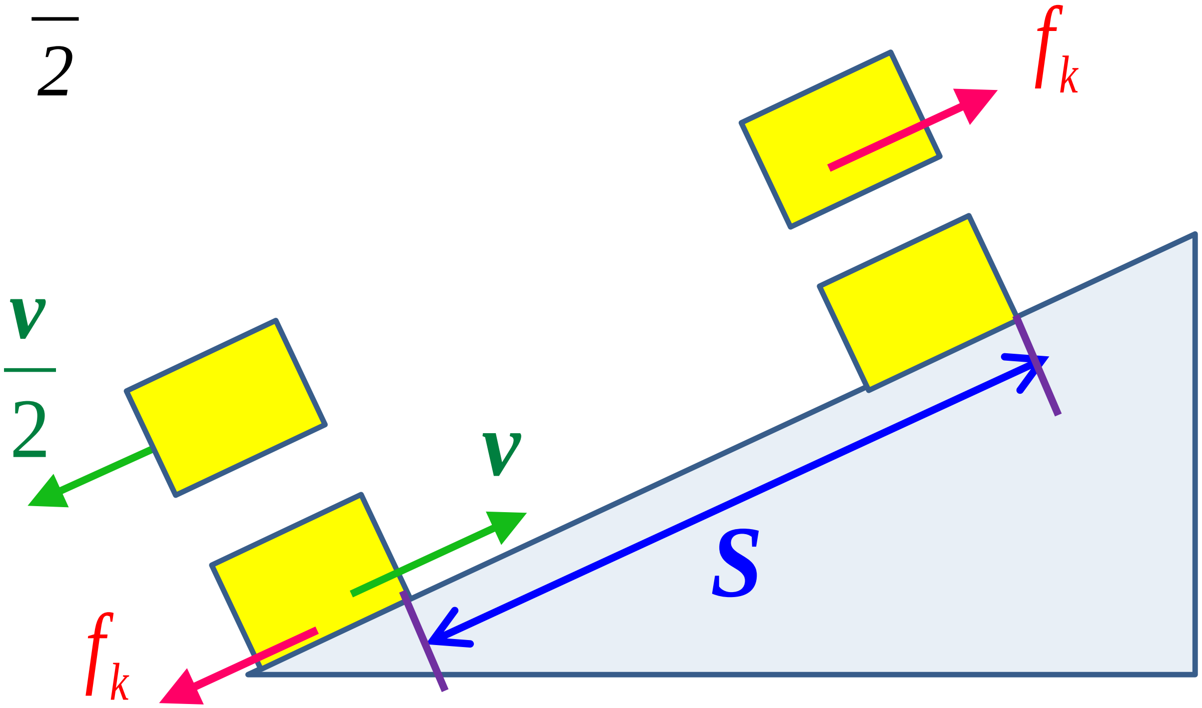


$F = 6[N]$

$$[W = \Delta K]$$

$$6 \times 5 - 5 \times 5 = \Delta K \quad \therefore \Delta K = 5[J]$$

1.一物質量m沿固定斜面以初速度v上滑，當滑回原處時速度變為$\frac{v}{2}$，上滑之最大距離為s，則動摩擦力為？



$$\left[W = \Delta K\right]$$

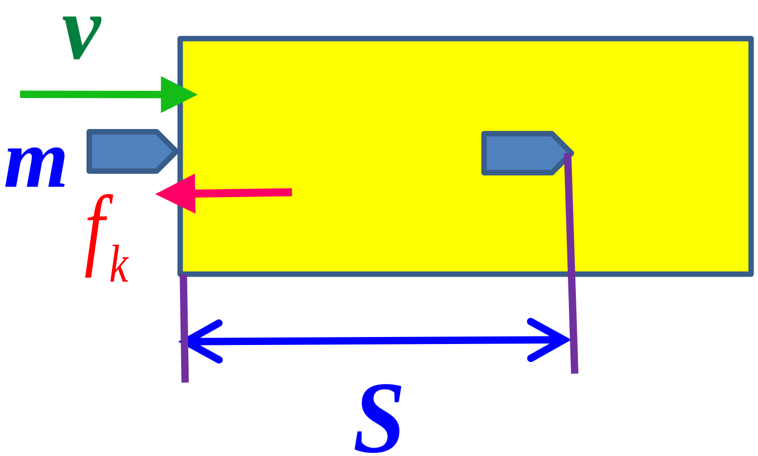
$$-f_k \times 2S = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore f_k = \frac{3mv^2}{16S}$$

*2.*一質量為*m*之子彈，以速度*v*射入一長ℓ之固定木塊，子彈恰打入$\dfrac{\ell}{3}$的深度。若子彈與木塊間之摩擦力為定值，試問：

（1）欲使子彈能打穿木塊，其速度至少應為若干？

（2）若木塊質量M可自由移動，子彈速度至少應為若干才能打穿？

(1)

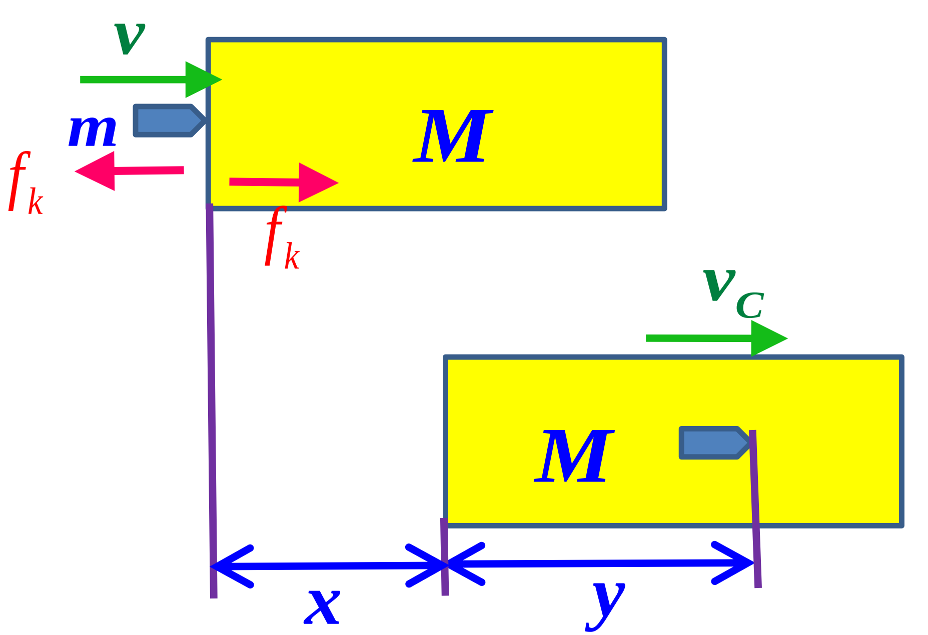


$$[W=\Delta K]\quad -fS = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow fS = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2fS}{m}} \propto \sqrt{S}$$

$$\therefore v : v' = \sqrt{\frac{\ell}{3}} : \sqrt{\ell} \rightarrow v' = \sqrt{3}v$$

(2)



$$v_C = \frac{mv}{M+m}$$

$$\left[W = \Delta K\right]$$

$$m:\ -f\times(x+y)=\frac{1}{2}mv_C^{\ 2}-\frac{1}{2}mv^2$$

$$M:\ f\times y=\frac{1}{2}Mv_C^{\ 2}$$

$$\therefore m+M:\ f\times x=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m+M)v_C^{\ 2}\rightarrow fx=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v^2$$

$$\begin{cases} f\dfrac{\ell}{3}=\dfrac{1}{2}mv^2 \\ f\ell=\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}v'^2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v'^2=3\times\frac{1}{2}mv^2\rightarrow v'=v\sqrt{\frac{3(m+M)}{M}}$$

1.質量*1.0*公斤的物體由靜止受力，在水平面上運動受力F與位置x之關係為$F = 3x + 6$（單位取*SI*制），如在$x = 2$公尺時，物體的速率為*4.0*公尺/秒，則

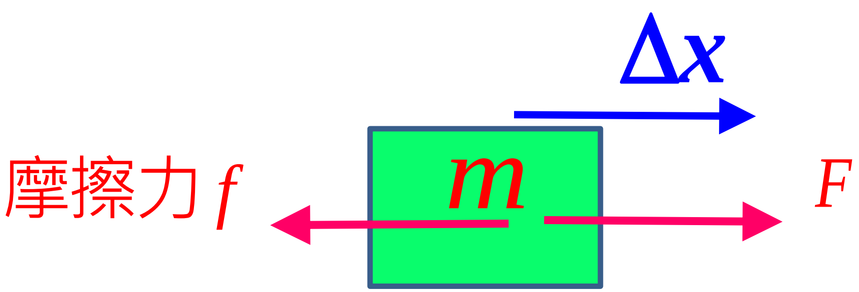
（A）由$x = 0$至$x = 2$公尺，F所作的功為？

（B）摩擦力為？

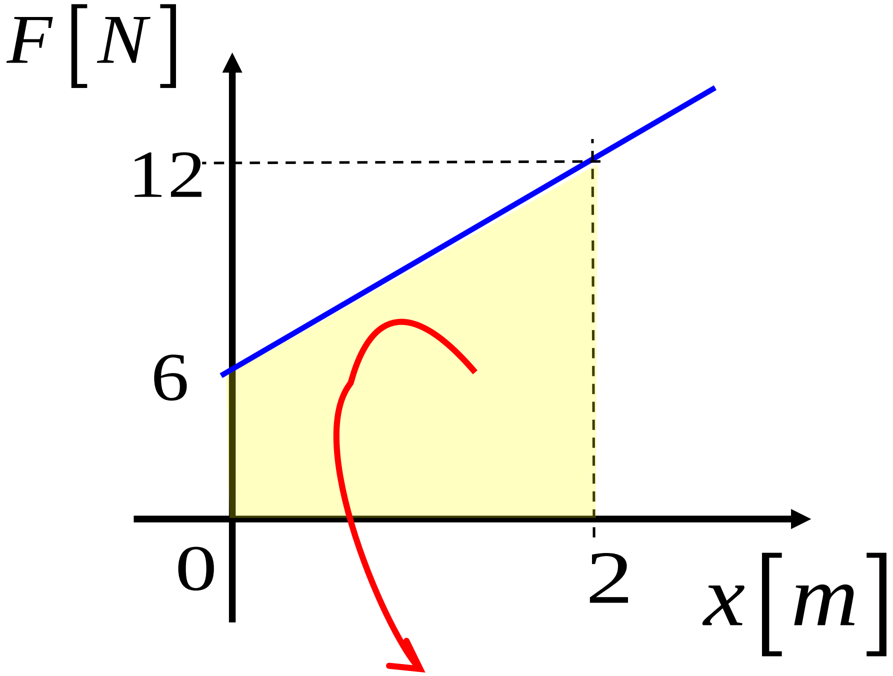
（C）在$x = 2$公尺時之加速度為？

（D）在$x = 1$公尺時物體的動能為？

（E）由$x = 0$至$x = 2$公尺，物體所受總衝量為？



(A)



$$W_F = F - x\text{面積} = \frac{1}{2}\times(6+12)\times 2 = 18[J]$$

$\left(\boldsymbol{B}\right)$

$$W_F = F - x\text{面積} = \frac{1}{2}\times\left(6+12\right)\times 2 = 18\left[J\right]$$

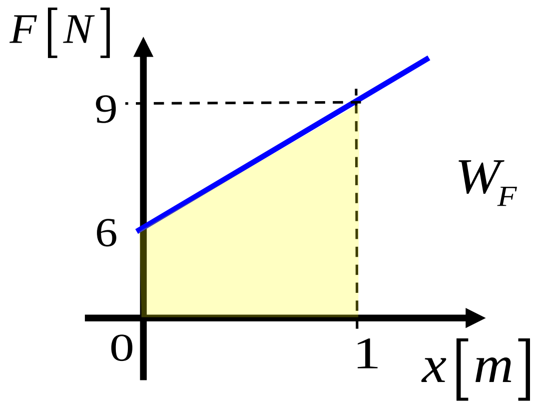
$$\left[\boldsymbol{W} = \Delta\boldsymbol{K}\right]\ \ \boldsymbol{W_F} + \boldsymbol{W_f} = \Delta\boldsymbol{K}$$

$$18 - \boldsymbol{f}\times 2 = \frac{1}{2}\times 1\times 4^2 \rightarrow \boldsymbol{f} = 5\left[\boldsymbol{N}\right]$$

$\left(\boldsymbol{C}\right)$

$$\left[\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}\right]\ \ 12 - 5 = 1\times\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{a} = 7\left[\boldsymbol{m}/\boldsymbol{s}^2\right]$$

(D)



$$W_F = F-x\text{面積} = \frac{1}{2}\times(6+9)\times 1 = 7.5[J]$$

$$[W=\Delta K] \quad W_F + W_f = \Delta K$$

$$7.5-5\times 1 = K_1 \rightarrow K_1 = 2.5[J]$$

(E)

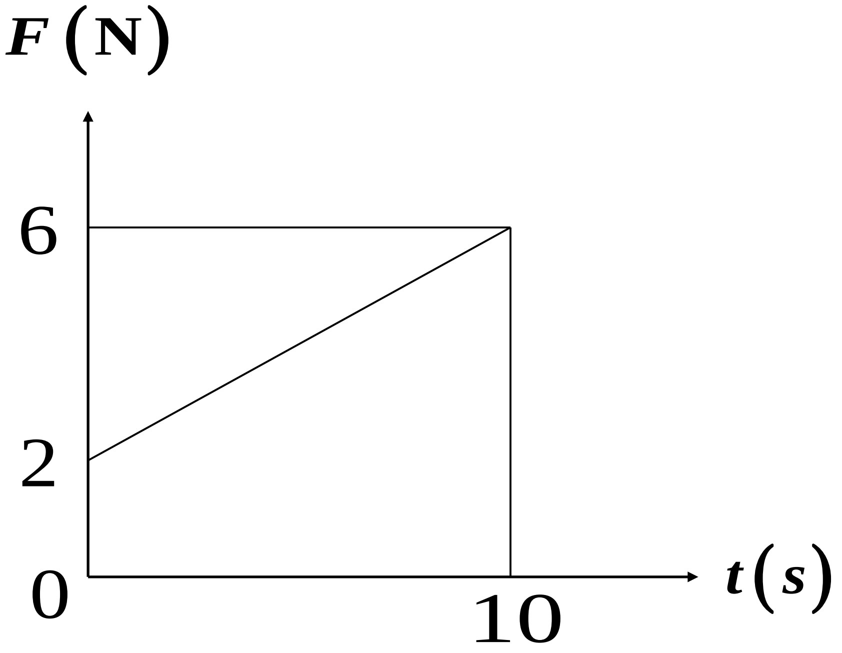
$$\left[J=\Delta P = m(v_2 - v_1)\right]$$

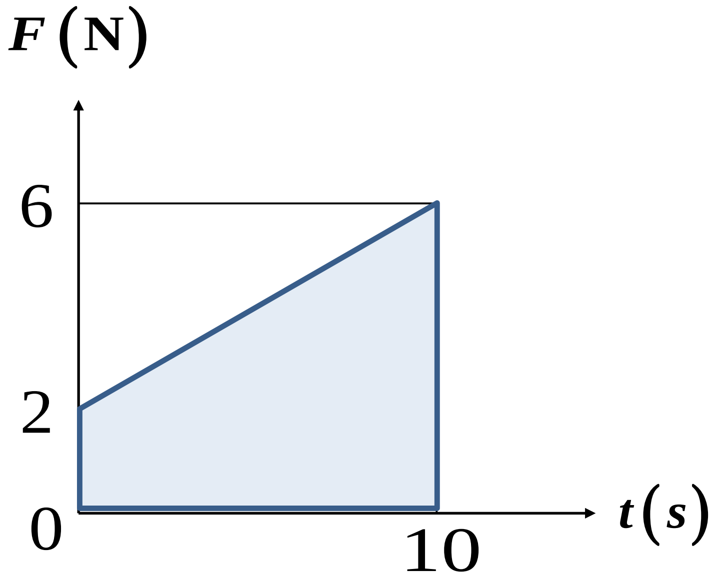
$x=0$時 速度$v_0=0$ $\qquad$ $x=2$時 速度$v_2=2$

$$\therefore J = 1\times 2 = 2[kg\cdot m/s]$$

第61頁

2.質量*5 kg*的物體在光滑地面上以*6* m/s的速度向東運動，突然受向西的力作用*10*秒，作用力*F*對時間*t*關係如右圖所示，則(1)此時物體速度為？ (2)作用力對物體所作的功為？





(1) 令向東為正 $[J = \Delta P = F - t$圖面積$]$

$$\Delta P = F - t\text{面積} = -\frac{1}{2}\times(6+2)\times 10 = -40[kg\cdot m/s]$$

$$P_{10} = P_0 + \Delta P = 5\times 6 - 40 = -10[kg\cdot m/s]$$

$$\therefore v_{10} = \frac{-10}{5} = -2[m/s] \to 2m/s\text{向西}$$

(2) $$[W = \Delta K]W = \frac{1}{2}mv_{10}{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}\times 5\times(2^2 - 6^2) = -80[J]$$

7-2 功率

功率P：單位時間內作功的大小。

1.平均功率 $\boxed{\overline{P_F} = \dfrac{W_F}{\Delta t}}$

2.瞬時功率P：$\boxed{P_F = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\theta}$

極短時間內的平均功率＝瞬時力與瞬時速度內積

[說明] $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{W}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{x}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

3.單位：瓦特$(W) = \dfrac{\text{焦耳}}{\text{秒}}(J/s)$

4. $\boxed{W_F = P \times \Delta t}$

7-2 功率

註：

電費的一度：*1*度= *1*千瓦・小時 = 3.6×10^{6}焦耳，為<u>能量</u>的單位。

*1*馬力＝*746*瓦特 （*1* hp = *746* W）

質量m之物體自O點起，以v_o之初速作仰角53^o之斜拋，到A點時之仰角為37^o，B為頂點，重力加速度g，則

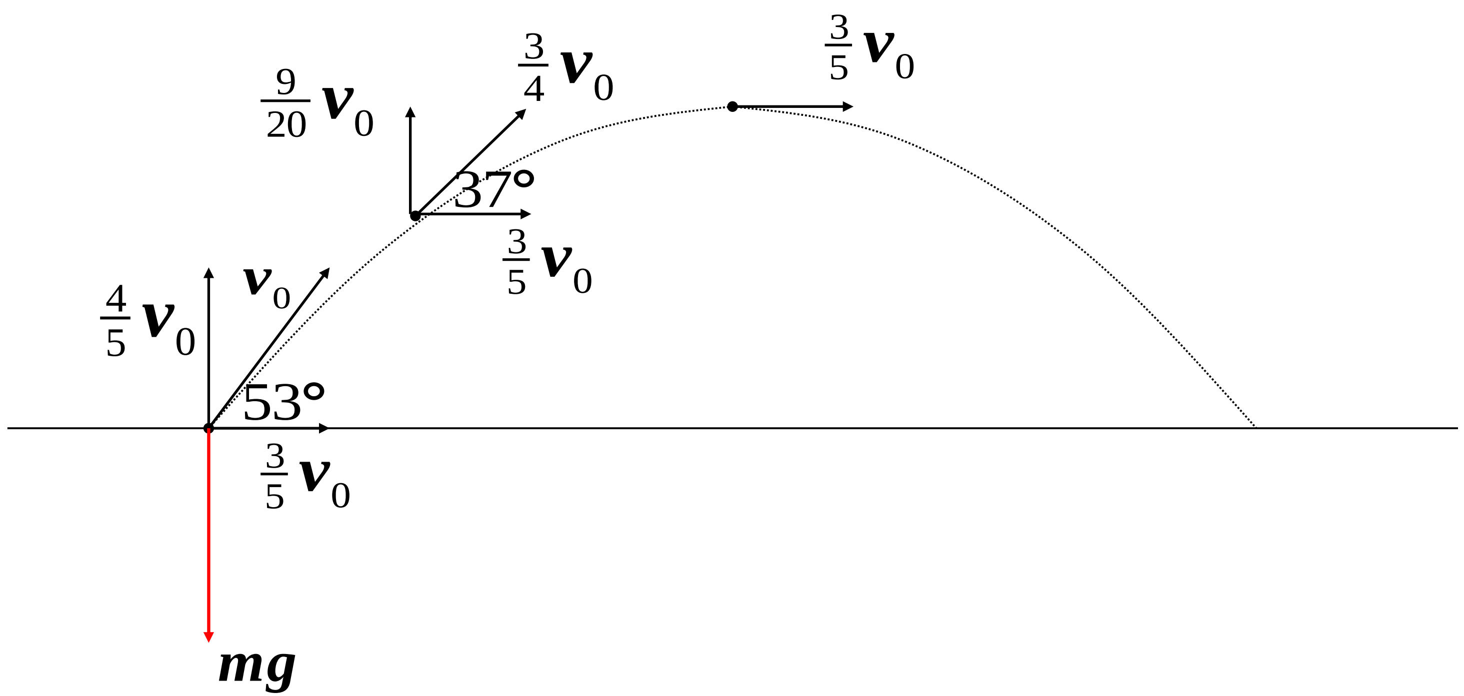
（A）在O點重力之瞬時功率為______

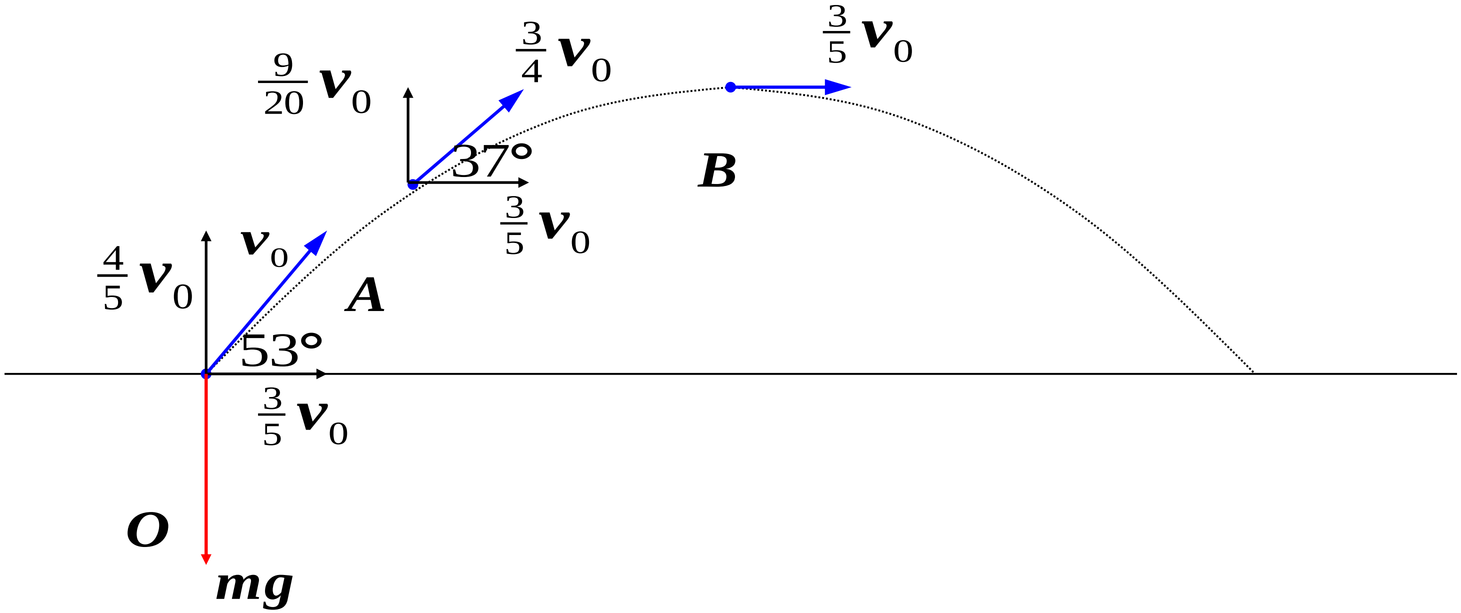
（B）OA期間之動能變化量為 ______

（C）OA所歷時間為 ____

（D）在最高點時之動能為_____

（E）O到A為止的平均功率為___

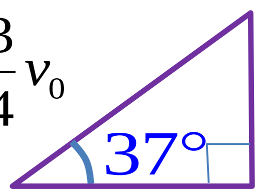




$$(A)\ P_O = m\vec{g}\cdot\vec{v}_0 = mgv_0\cos(90°+53°) = -\tfrac{4}{5}mgv_0$$

(B)

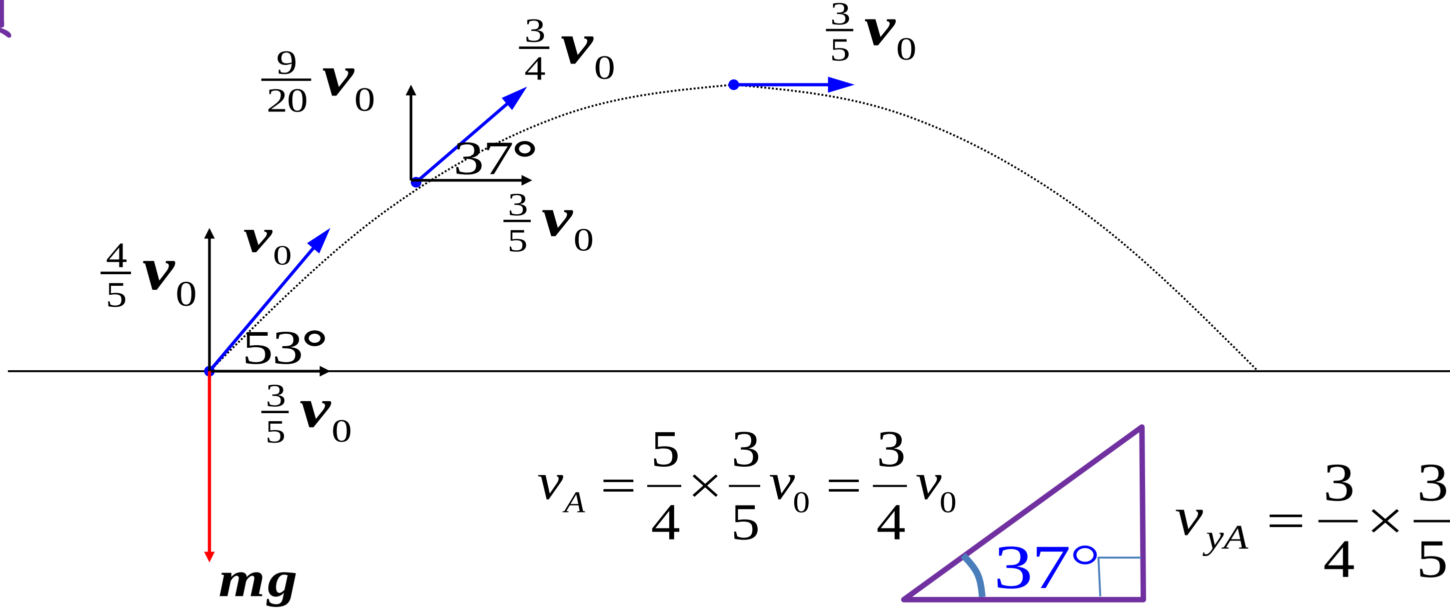
$$v_A = \frac{5}{4}\times\frac{3}{5}v_0 = \frac{3}{4}v_0$$



$$v_{yA} = \frac{3}{4}\times\frac{3}{5}v_0 = \frac{9}{20}v_0$$

$$v_{xA} = \frac{3}{5}v_0$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{3}{4}v_0\right)^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^{\,2} = -\tfrac{7}{32}mv_0^{\,2}$$



$$v_A = \frac{5}{4} \times \frac{3}{5} v_0 = \frac{3}{4} v_0$$

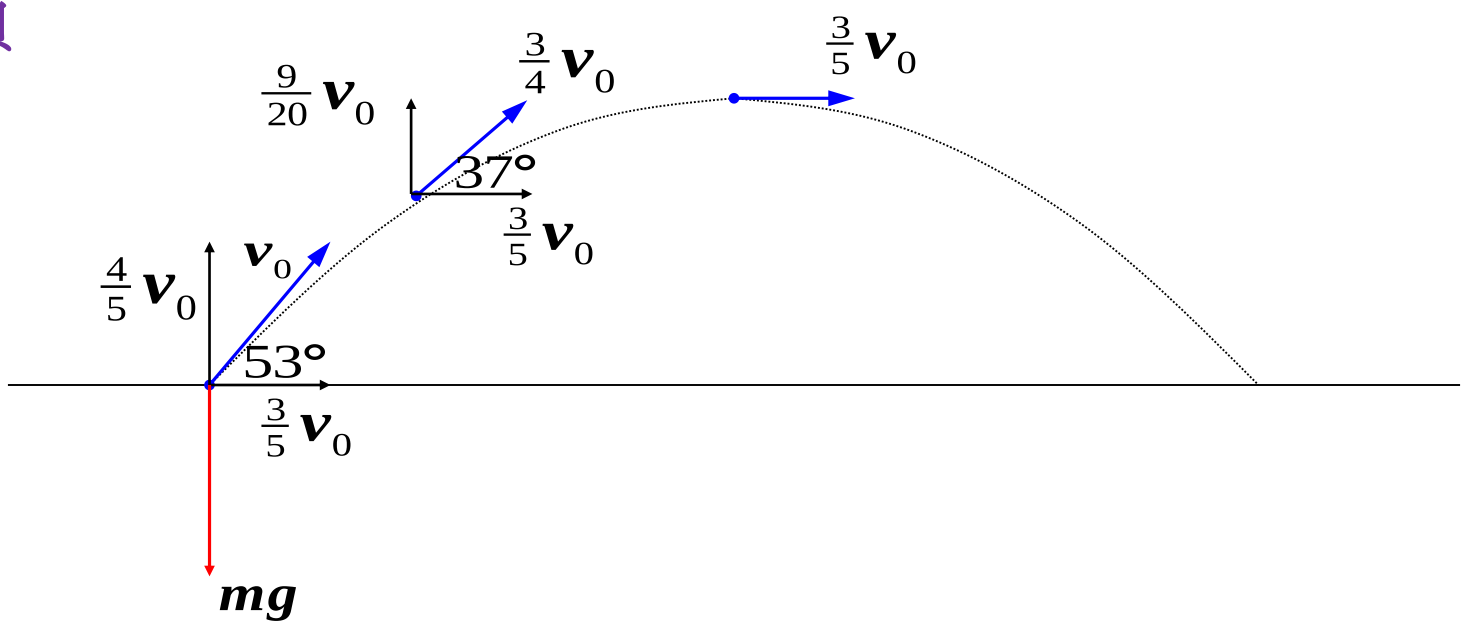
$$v_{yA} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} v_0 = \frac{9}{20} v_0$$

$$v_{xA} = \frac{3}{5} v_0$$

$$(C)\ \frac{9}{20}\boldsymbol{v}_0 = \frac{4}{5}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{gt} \rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{7}{20}\frac{\boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{g}}$$

$$(D)\ \boldsymbol{K_B} = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{v}_0\right)^2 = \frac{9}{50}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}_0{}^2$$

$$(E)\ \overline{\boldsymbol{P}_{O\rightarrow A}} = \frac{\Delta \boldsymbol{W}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{-\frac{7}{30}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}_0{}^2}{\frac{7}{20}\frac{\boldsymbol{v}_0}{\boldsymbol{g}}} = -\frac{5}{8}\boldsymbol{mg}\boldsymbol{v}_0$$

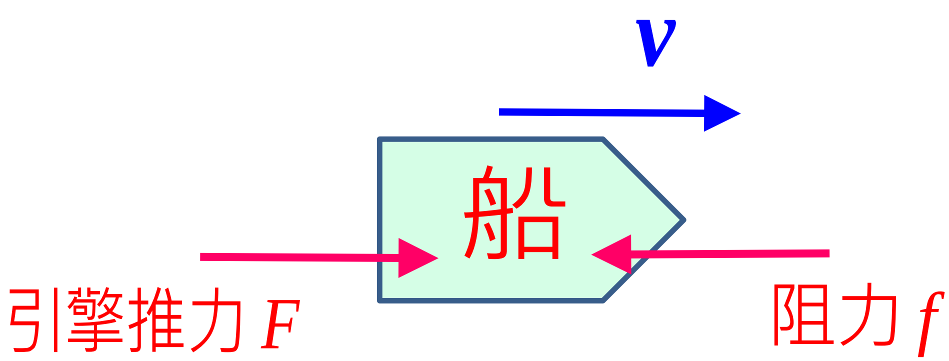


$$(E)\ \overline{P_{O\to A}} = \frac{W_{O\to A}}{\Delta t} = \frac{-\frac{7}{30}mv_0^{\ 2}}{\frac{7}{20}\frac{v_0}{g}} = -\frac{5}{8}mgv_0$$

$$\left[W_{O\to A} = \Delta K = -\frac{7}{30}mv_0^{\ 2}\right]$$

第63頁

*1.*假設一船在在水中等速航行時，所受之阻力和速率成正比。試問：
（1）當船速變為2倍時，引擎功率變為幾倍？
（2）若引擎功率減為1/4 ，船速變為幾倍？

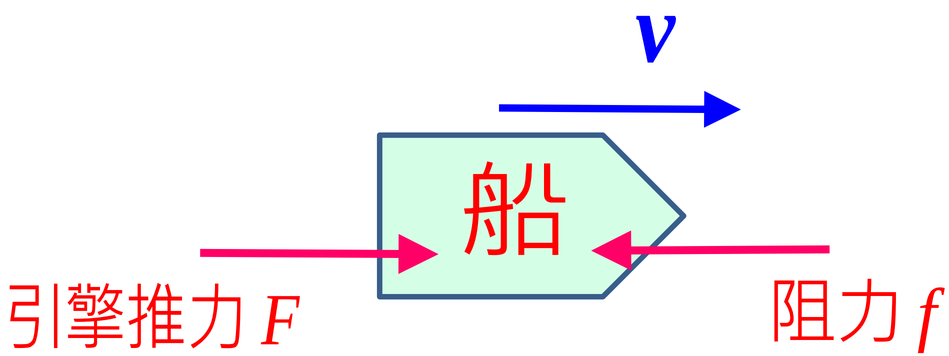


$\because$ 等速 $\therefore$ 引擎推力F大小 = 阻力f大小

令$F = f = kv$　k為常數

$$\therefore P_F = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = kv^2 \propto v^2$$

*1.*假設一船在在水中等速航行時，所受之阻力和速率成正比。試問：
（1）當船速變為2倍時，引擎功率變為<u>幾倍</u>？
（2）若引擎功率減為1/4 ，船速變為<u>幾倍</u>？

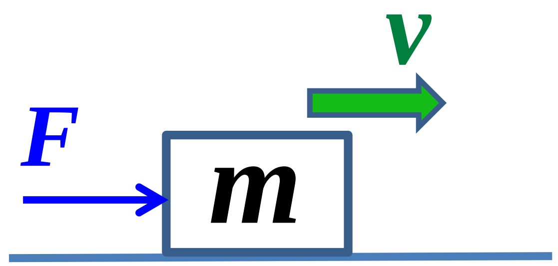


$\because$ 等速 $\therefore$ 引擎推力F大小 = 阻力f大小

令$F = f = kv^2$　k為常數

$$\therefore P_F = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = kv^3 \propto v^3$$

2.質量為2kg之靜止物體，在光滑平面上，受一**<u>方向固定</u>**的外力作用，該力之輸出功率固定為P＝4 W，則：(A)3秒末之動能為12J
(B)4秒末物體之速度值為4m/s (C)在4秒內之平均功率為4W
(D)物體恆受定力作用 (E)4秒末物體受力為1N。



瞬時功率$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=4\left[W\right]$

$(A) W=\Delta K=P\Delta t \rightarrow \Delta K=4\times 3=12[J]$

$(B) W=\Delta K=P\Delta t \rightarrow \Delta K=\frac{1}{2}\times 2\times v^2=4\times 4 \rightarrow v=4[m/s]$

(C) $\because$ 輸出功率固定 $\therefore$ 平均功率 $=$ 瞬時功率 $=4[W]$

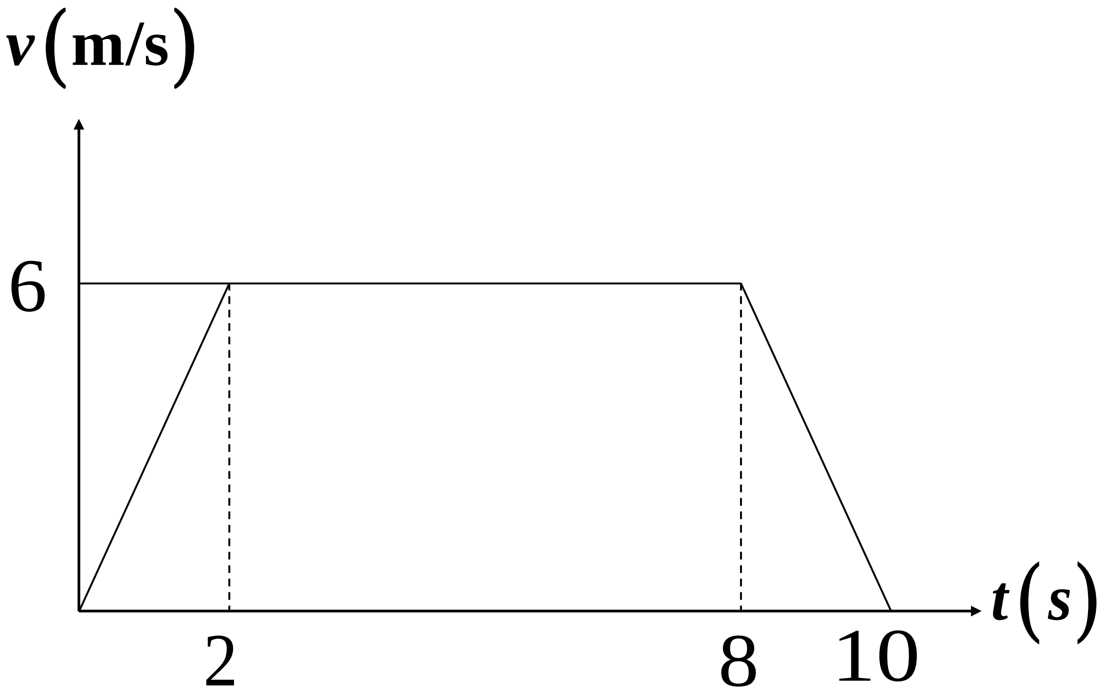
(D) 瞬時功率 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$

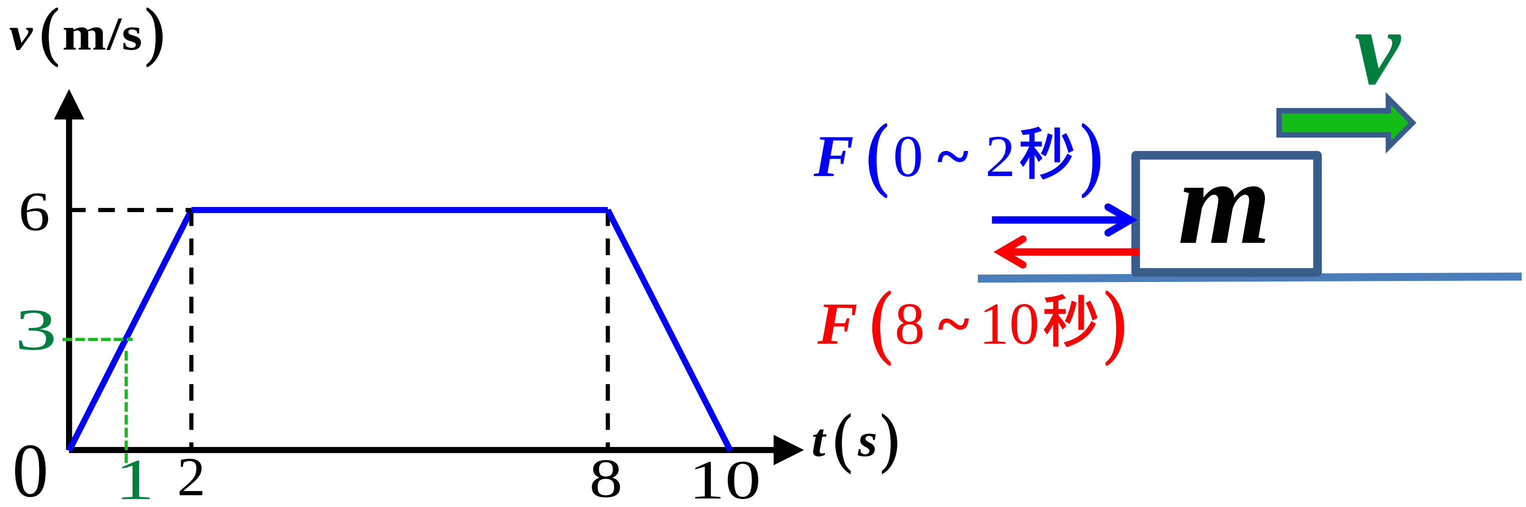
$\because P$ 固定 v 不固定 $\therefore F$ 非定力

(E) 瞬時功率 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$

$4=F\times 4 \therefore F=1[N]$

*1.*如圖所示，表示$v-t$關係曲線，且物體質量為*2 kg*，則：
（1）物體在*1*秒時之瞬時功率為若干瓦特？
（2）物體在*0 ~ 1*秒間之平均功率為多少瓦特？





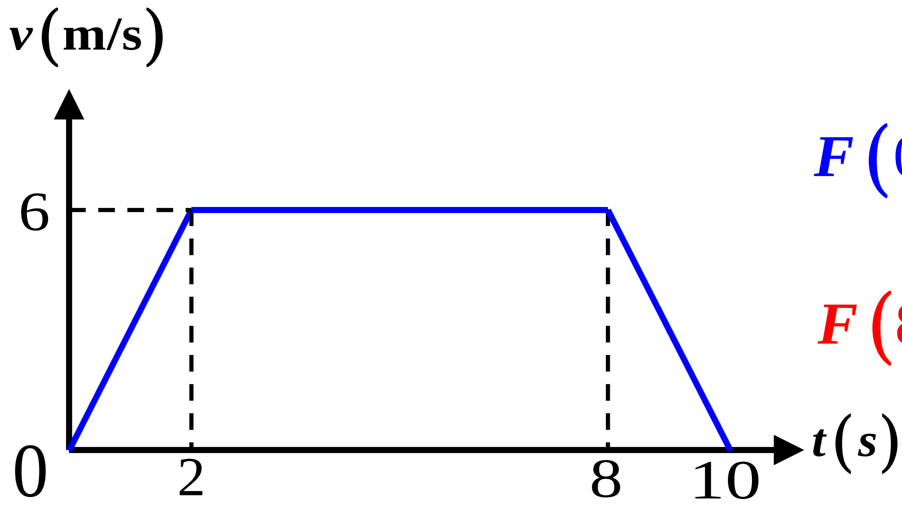
(1) 瞬時功率$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$

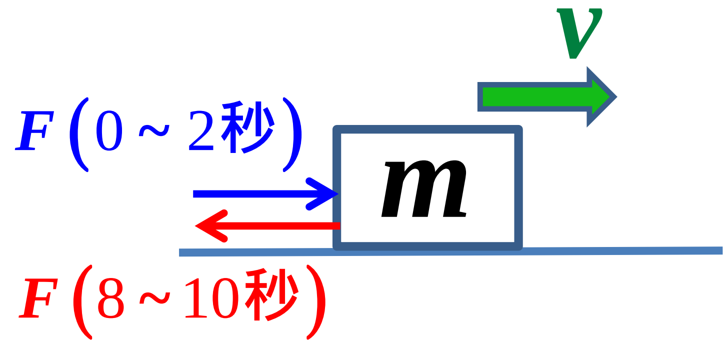
[$v-t$ 圖切線斜率 = 瞬時加速度a]

$t=1s$時 $a_1=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{6-0}{2-0}=3[m/s^2]$

$$F_1=ma_1=2\times3=6[N]$$

$$\therefore P_1=F_1v_1=6\times3=18[W]$$





(2) 平均功率 $\overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}$

$t=0\sim 1s$時　$W=\Delta K=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3^2=9[J]$

∴平均功率 $\overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}=\dfrac{9}{1}=9[W]$

2.有一卷長鐵鏈每米質量*1.2* kg平置於地面上，將其一端以*4* m / s之速度拉之，則施力者之功率為？

[想法一] 瞬時功率$\boldsymbol{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 \times 1.2 \times 4}{1} = 19.2[N]$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 19.2 \times 4 = 76.8[N]$$

[想法二：錯誤] 平均功率 $\overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}$

歷時 Δt 時 $W=\Delta K=\dfrac{1}{2}\times 1.2\times 4\times 4^2=38.4[J]$

$\therefore \overline{P}=\dfrac{W}{\Delta t}=\dfrac{38.4}{1}=38.4[W]$

$\rightarrow\because W$ 包含拉力與繩子張力的作功 且 繩子張力的作負功

$\therefore$ 拉力作功較 W 大