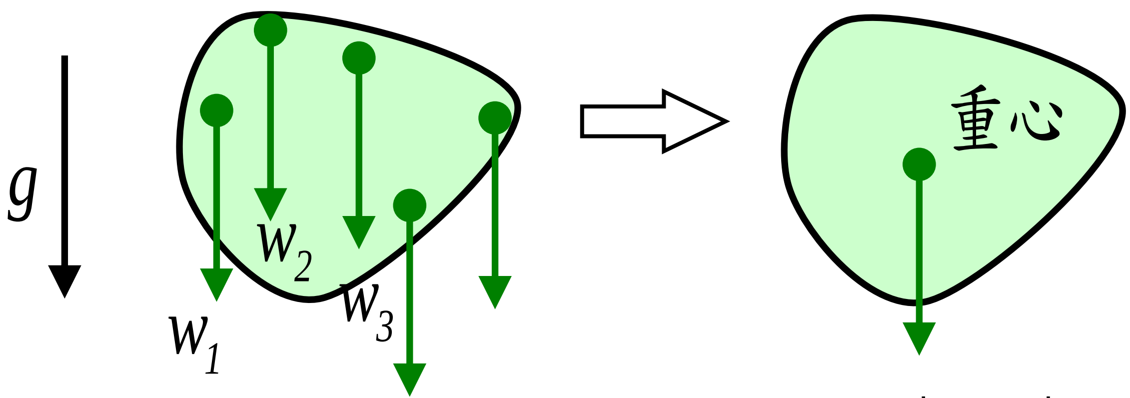
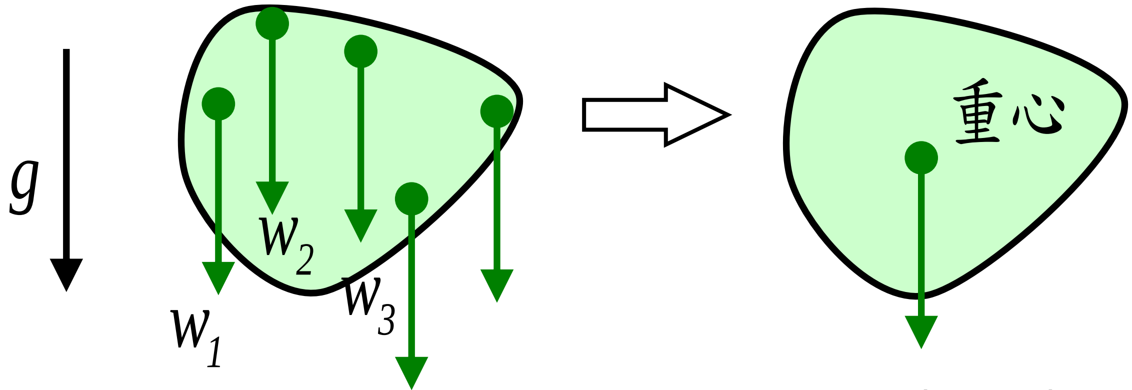
單元四：重心

一、重心 *G*：

物體（系統）**各部分**受重力作用結果，可視為**總重力**作用於物體上**某點**，其效果（對於運動的影響）相同，則此點即稱為該物體的**重心 *G***。



$$w_G = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \text{物體總重量}$$



$$w_G = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \text{物體總重量}$$

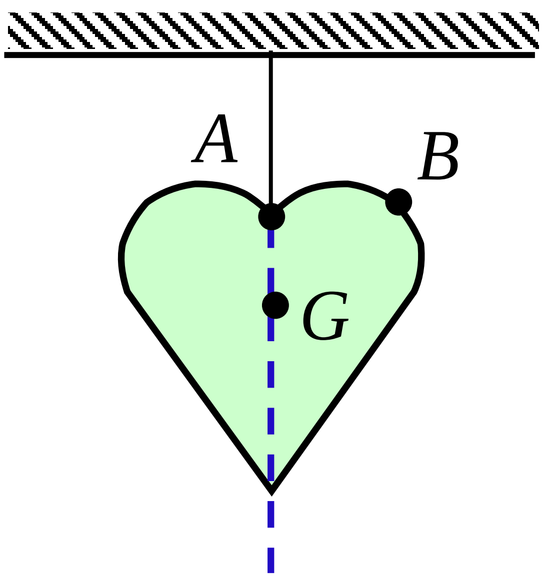
（1） 重心所受重力＝所有質點所受重力之合力＝物體的總重量。

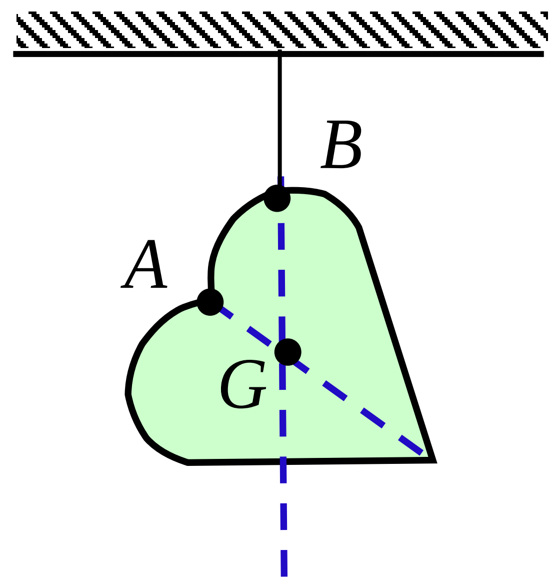
（2） 重心所產生的力矩=所有質點所產生的力矩和（對任一轉軸）。
[以重心為轉軸，則重力的力矩必須為零]

二、重心位置的求法：

（1）懸吊法：[原理] 以重心為轉軸，則重力的力矩必須為零 。

將物體懸吊於 A 點，此物體的重心必位於通過懸點的**鉛垂線**上，另懸一點B，得另一**鉛垂線**，而重心亦應位於此線上某點，此二次所得之鉛垂線之交點 G，即為此物的重心位置。

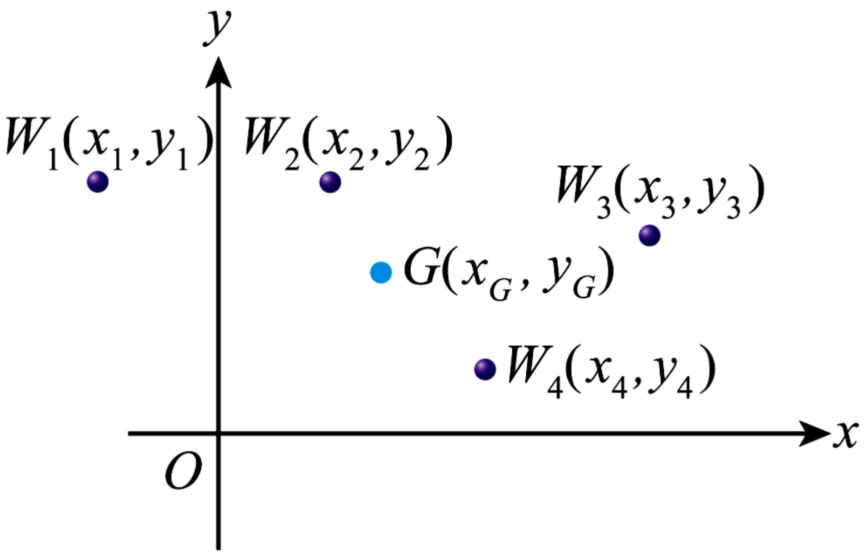




（2）計算法：[原理] 以重心為轉軸，則重力的力矩必須為零 。

[公式]：多質點系統重心的位置座標

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{W_1x_1 + W_2x_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} \\ y_G = \dfrac{W_1y_1 + W_2y_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} \end{cases}}$$

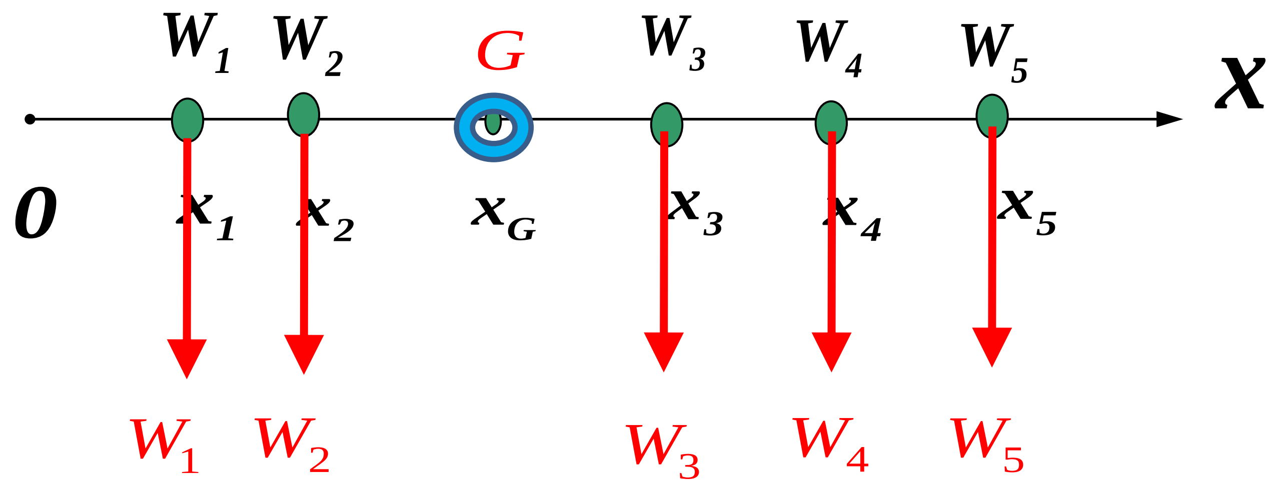


[說明]

設有 n 個質點，各重 W_1、W_2… ，在 x 軸坐標為 x_1、x_2…，**對重心 G 的力矩和＝0**。

$$W_1\times(x_G-x_1)+W_2\times(x_G-x_2)+W_3\times(x_G-x_3)+\ldots=0$$

$$\boxed{x_G=\frac{W_1\times x_1+W_2\times x_2+W_3\times x_3+\ldots}{W_1+W_2+W_3+\ldots}}$$

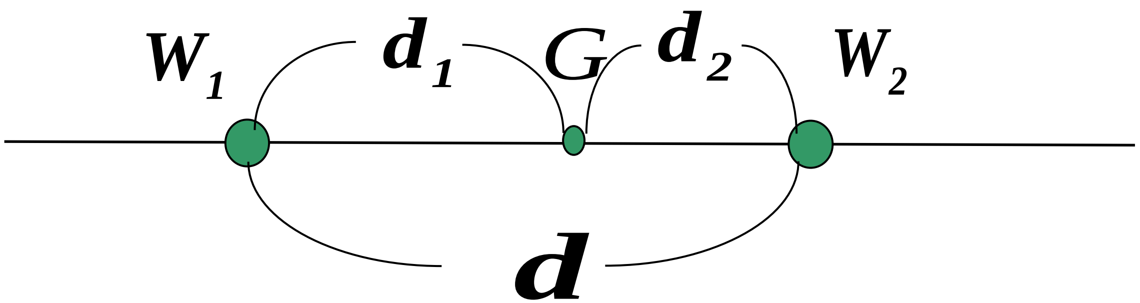


（3）重心性質：

1. 兩個質點重量W_1和W_2，二者相距 d，其重心與 W_1 及 W_2 距離為 d_1 和 d_2，則：

$$\boxed{d_1=\frac{W_2}{W_1+W_2}d} \qquad \boxed{d_2=\frac{W_1}{W_1+W_2}d}$$

∴重心的位置到兩物距離和兩物重量成<u>反</u>比。



兩質點與重心必連成一直線。

第41頁

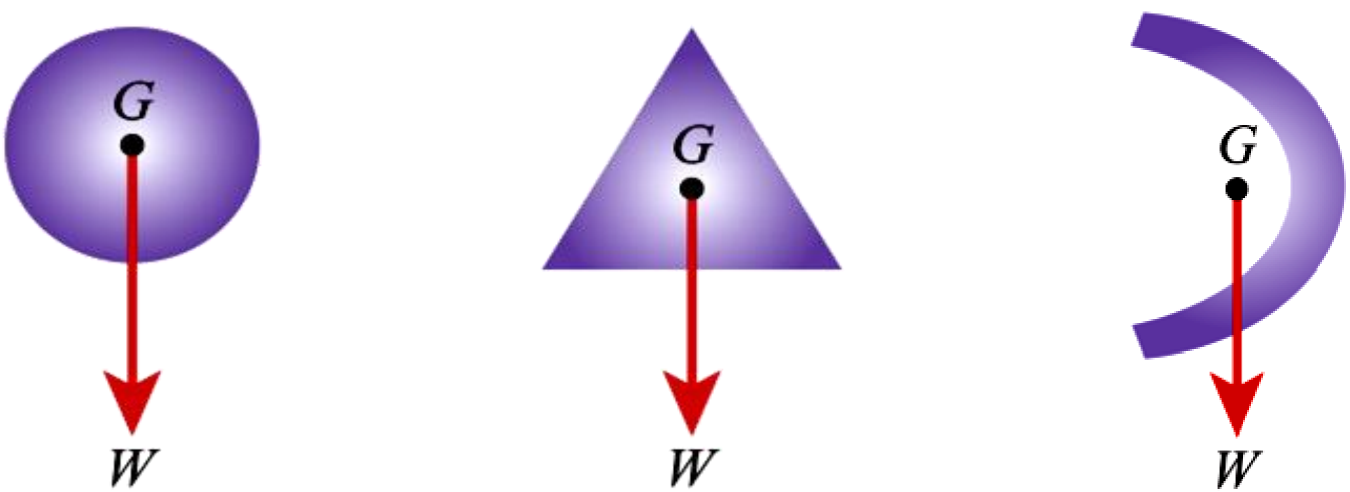
2. 重心坐標和原點位置 有關 ， 但**重心相對於物體的位置**和原點位置 無關 。

（均勻重力場中，剛體的重心不因剛體位置或方向的改變而變更其位置）

3. 在**均勻重力場**下，密度均勻、形狀規則物體其重心處在 幾何中心處。（如圖 (a)(b)）

4. 在重心位置處 不一定 存在有物質。（如下圖 (c)）

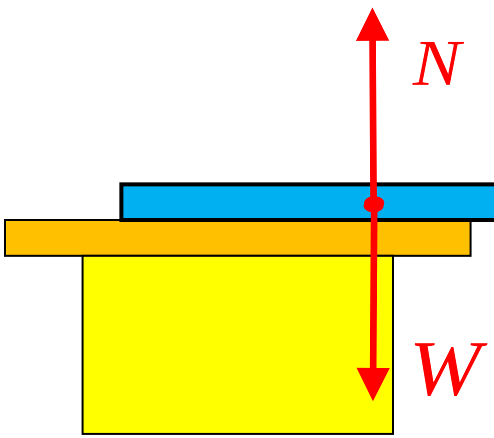
5. 在**無重力場處**，物體的重心無意義。



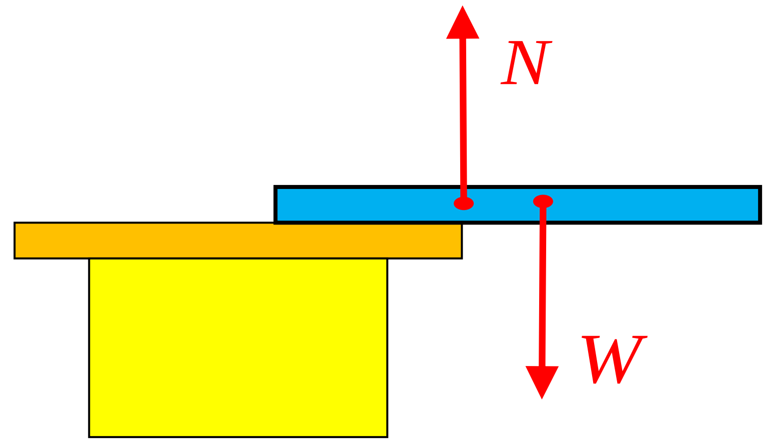
(a)　(b)　(c)

三、重心與平衡：

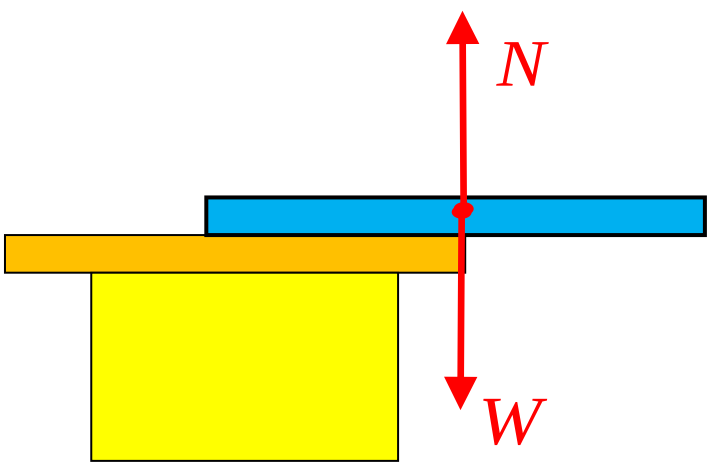
（1）物體的重心位置在底面範圍之內，才可保持平衡。



書本保持平衡

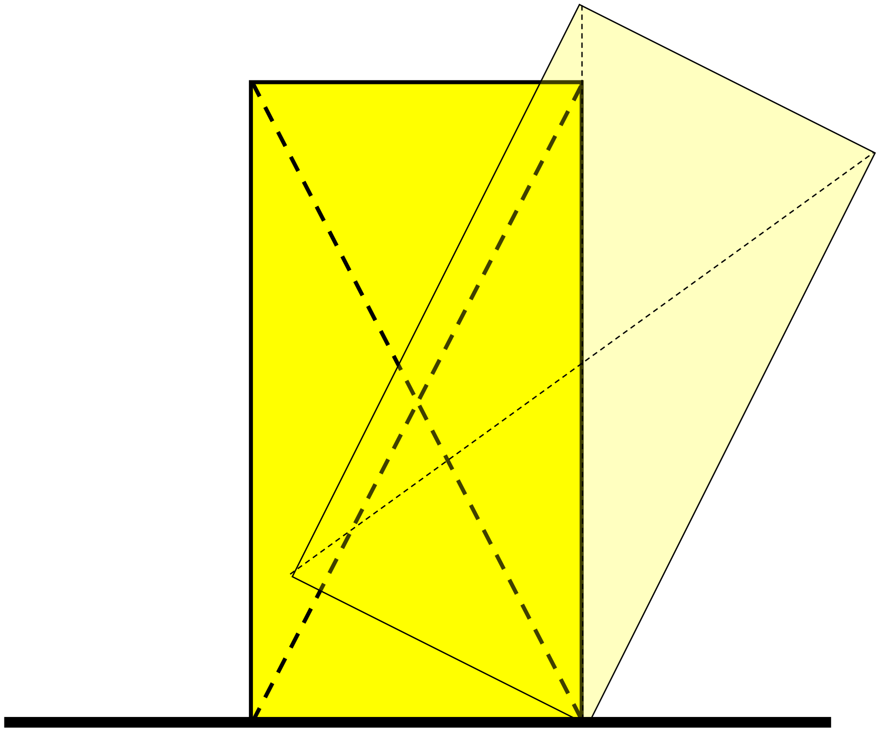


書本會翻倒



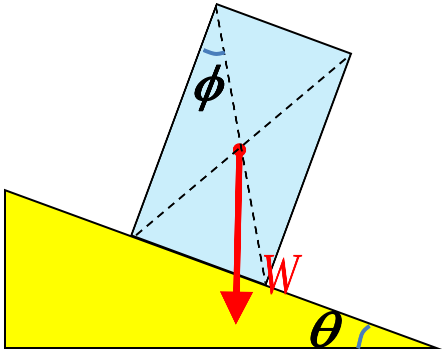
書本不倒的最大偏移(重心在桌角)

（2）物體受外力作用而略微傾斜時，通過重心之鉛垂線落於底面積之範圍內，物受到重力之力矩作用仍可恢復原狀；但是通過重心之鉛垂線超出底面積之範圍時，物體即傾倒。



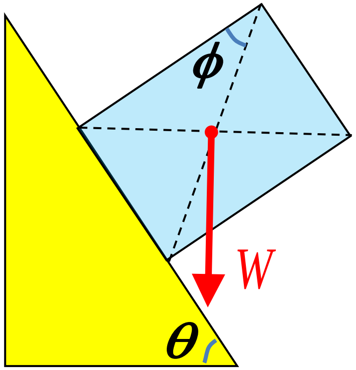
註：斜面上的長方體不翻倒的條件

斜面傾斜角$\theta \leq$正方體對角線與垂直斜面邊的夾角$\phi \rightarrow \tan\theta \leq \tan\phi = \dfrac{b}{a}$



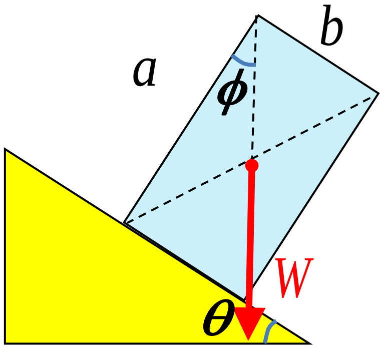
不會翻倒

$$\theta < \phi$$



會翻倒

$$\theta > \phi$$



恰要翻倒

木塊不翻倒的斜面最大傾斜角

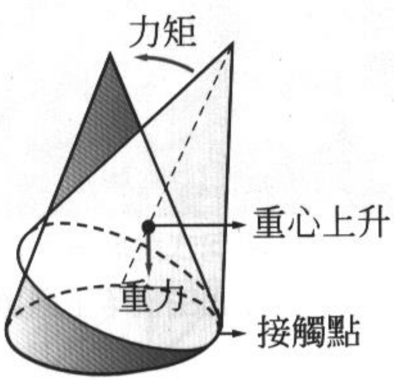
$$\theta = \phi$$

四、平衡的種類：

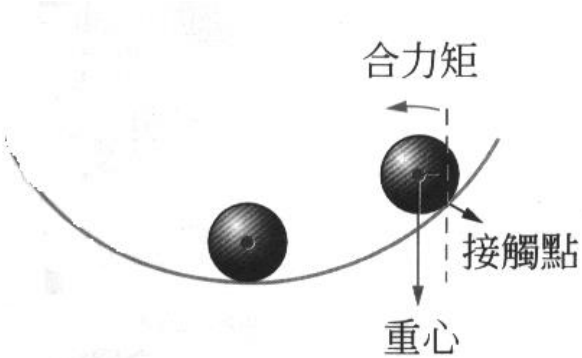
(1) **穩定平衡**：穩定平衡的物體受微擾後，且重心高度增加（重力位能增加），重力與作用在接觸點正向力所形成的力矩，傾向於使物體恢復原平衡位置。

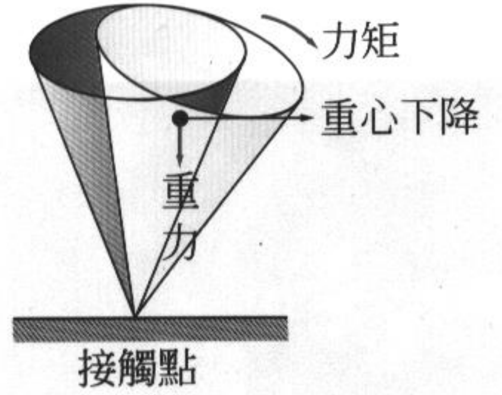
(2) **不穩定平衡**：不穩定平衡的物體受擾動後，其重心高度下降（重力位能降低），重力與接觸點的正向力所形成的力矩，使物體偏離原位。

(3) **隨遇平衡**：物體受微擾後，重心高度不變（重力位能不變），重力與正向力永遠在同一直線上，合力矩隨時為零，物體就會在新的位置平衡。

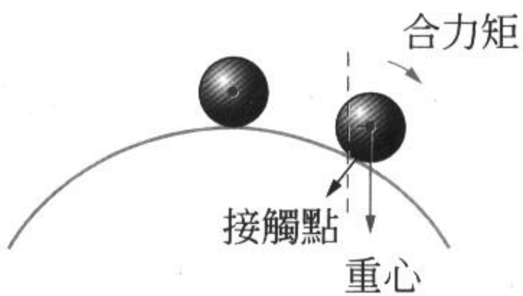


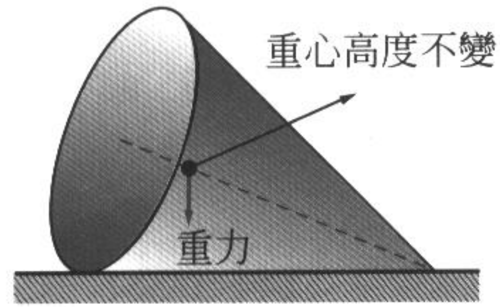
穩定平衡



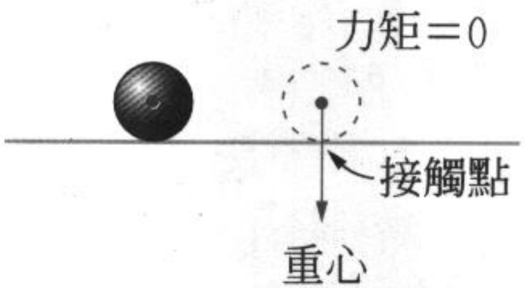


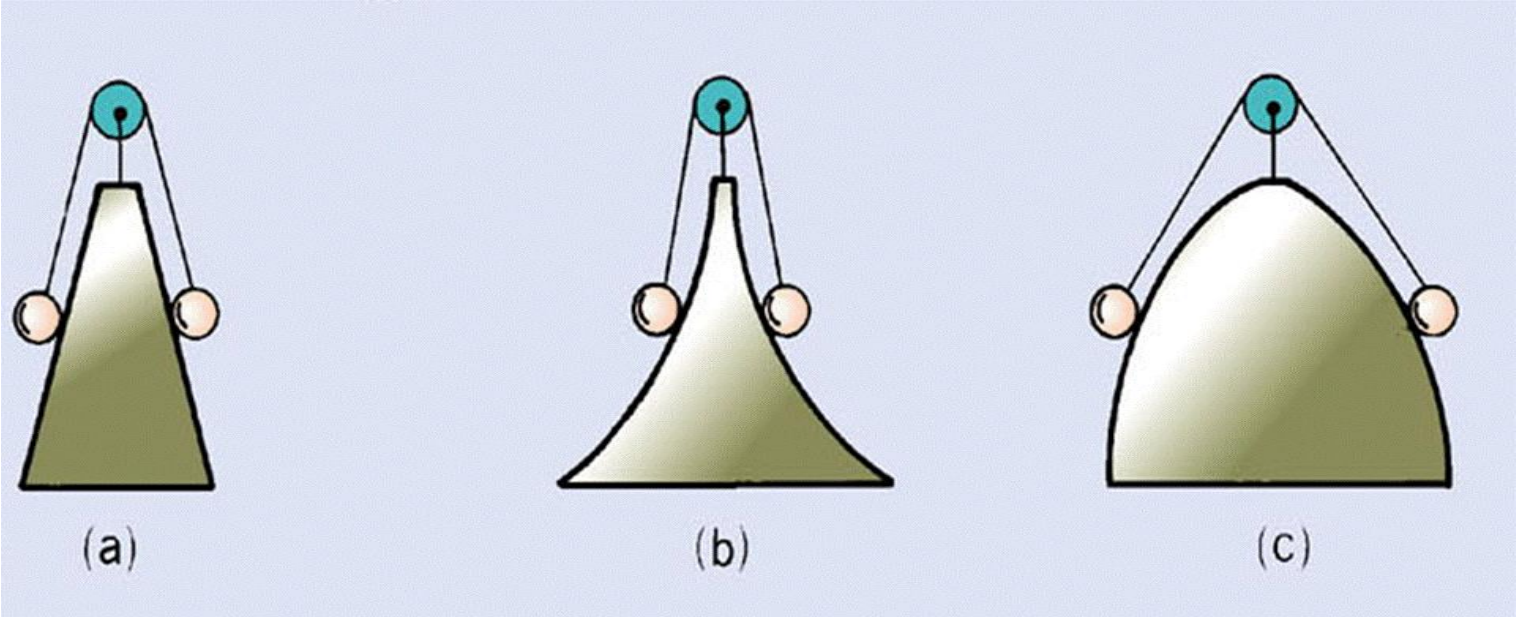
不穩定平衡



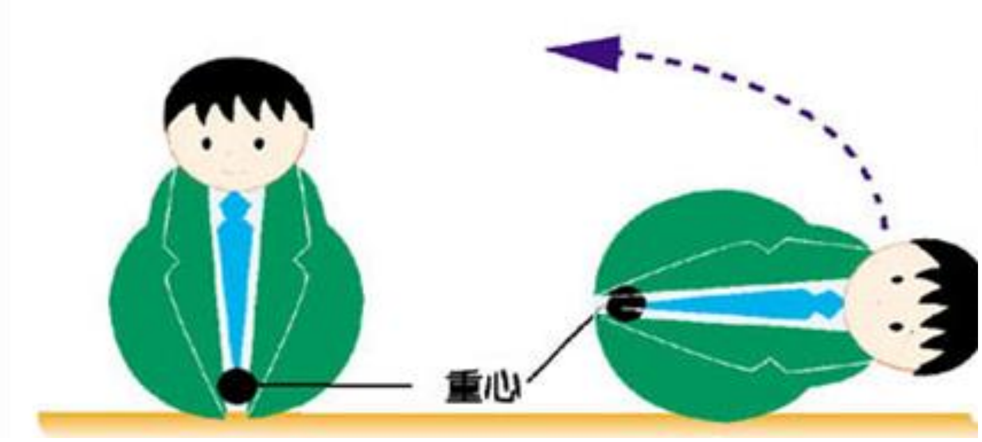


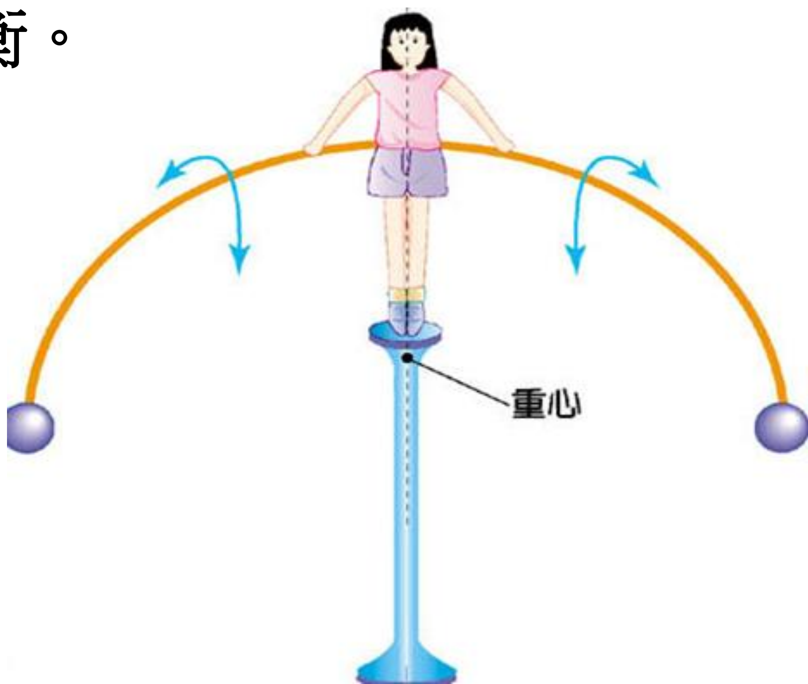
隨遇平衡



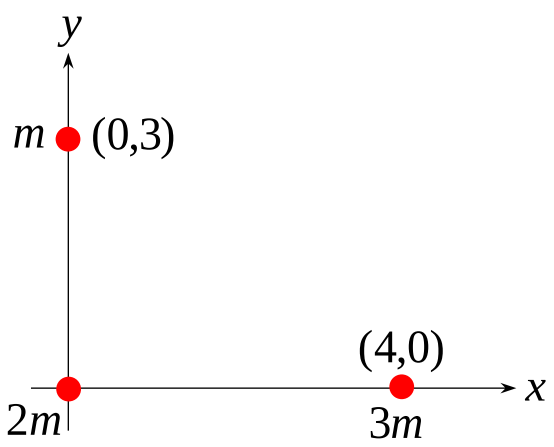


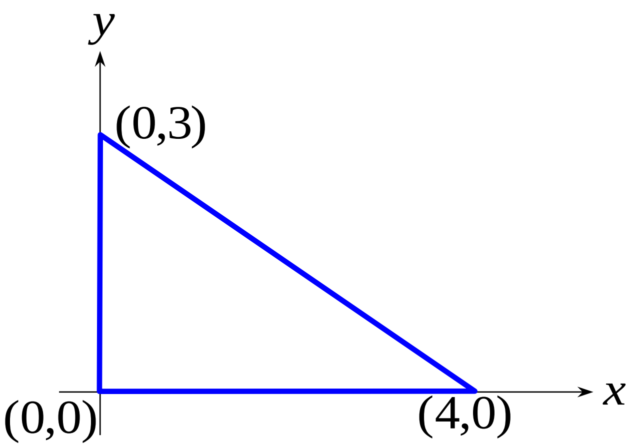
註：物體重心越 低，越易成為穩定平衡。

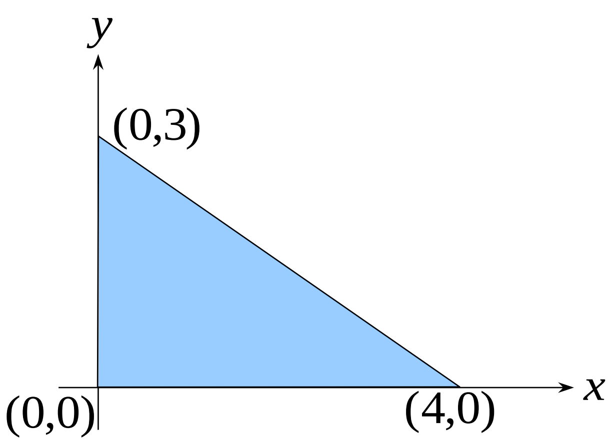




分別求下列三圖的重心位置座標(X，Y)。



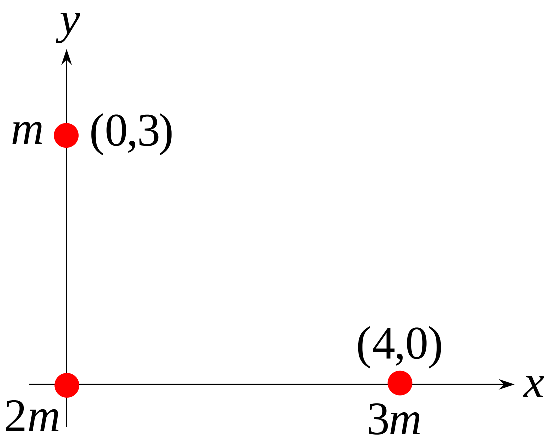




第44頁

[解析]

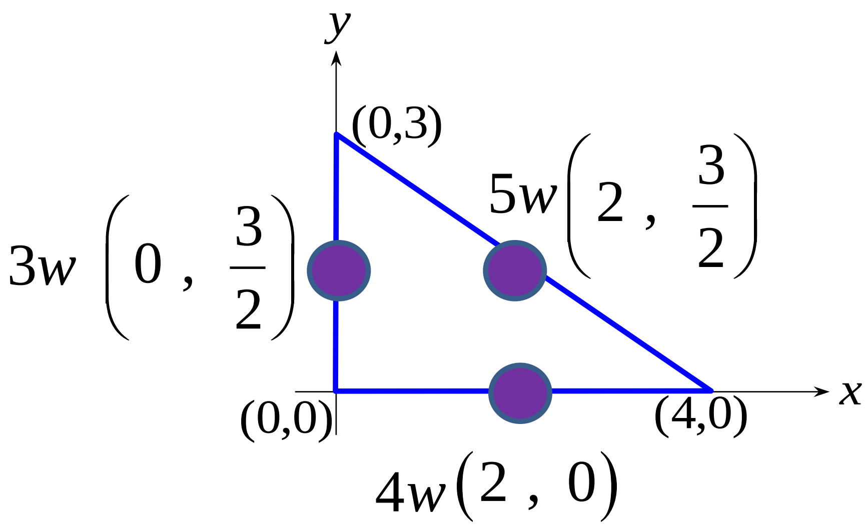
(1)



$$\begin{cases} x_G = \dfrac{W_1x_1 + W_2x_2 + \dots}{W_1 + W_2 + \dots} = \dfrac{mg\times 0 + 2mg\times 0 + 3mg\times 4}{mg + 2mg + 3mg} = 2 \\ y_G = \dfrac{W_1y_1 + W_2y_2 + \dots}{W_1 + W_2 + \dots} = \dfrac{mg\times 3 + 2mg\times 0 + 3mg\times 0}{mg + 2mg + 3mg} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

[解析]

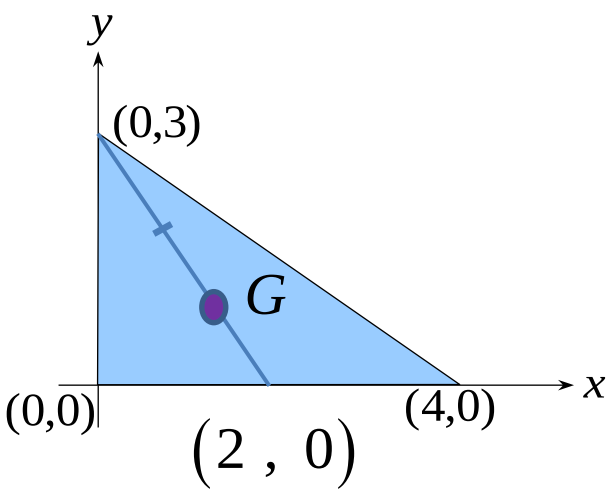
(2)



$$\begin{cases} x_G = \dfrac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} = \dfrac{5w \times 2 + 4w \times 2 + 3w \times 0}{5w + 4w + 3w} = \dfrac{3}{2} \\ y_G = \dfrac{W_1 y_1 + W_2 y_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} = \dfrac{5w \times \dfrac{3}{2} + 4w \times 0 + 3w \times \dfrac{3}{2}}{5w + 4w + 3w} = 1 \end{cases}$$

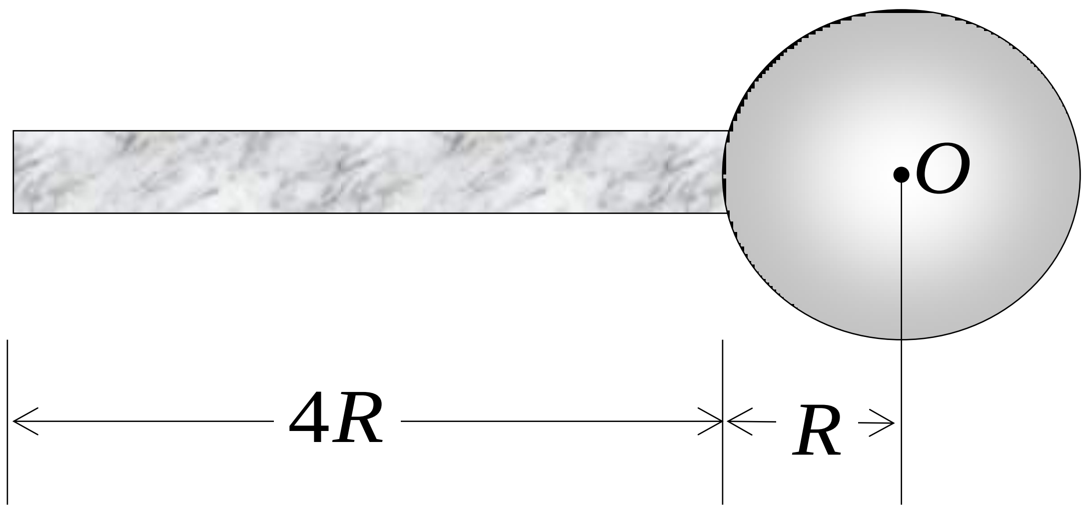
[解析]

(3)

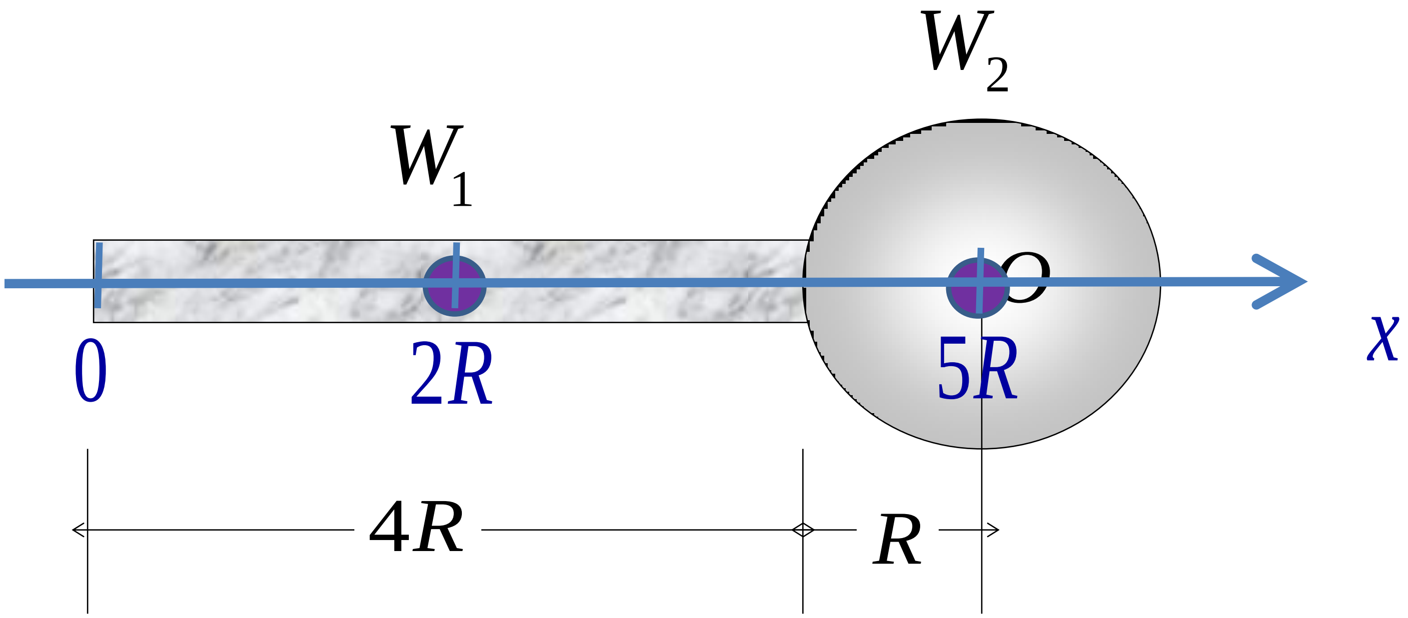


$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \times 2 = \dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3} \times 3 = 2 \end{cases}$$

1.重量為W_1，長$4R$之均勻木棒，質量為W_2，半徑為R之圓球，緊密接合，如圖，則此系統之重心與球心O之距離為？



[解析]

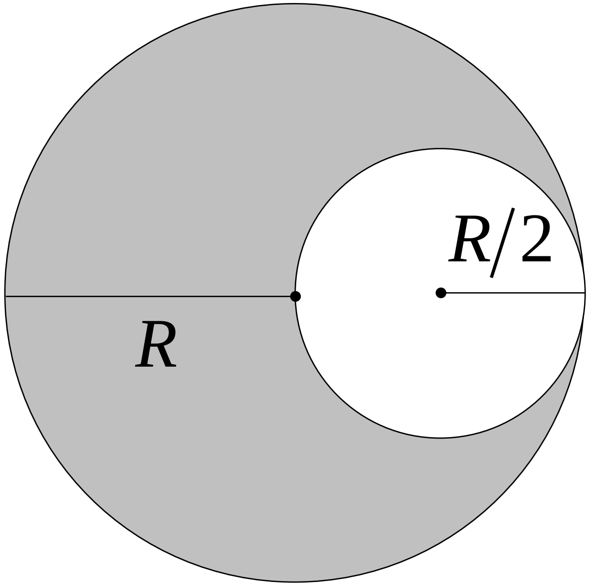


$$x_G = \frac{W_1x_1 + W_2x_2}{W_1 + W_2} = \frac{W_1 \times 2R + W_2 \times 5R}{W_1 + W_2} = \frac{2W_1 + 5W_2}{W_1 + W_2}R$$

$$5R - \frac{2W_1 + 5W_2}{W_1 + W_2}R = \frac{3W_1}{W_1 + W_2}R$$

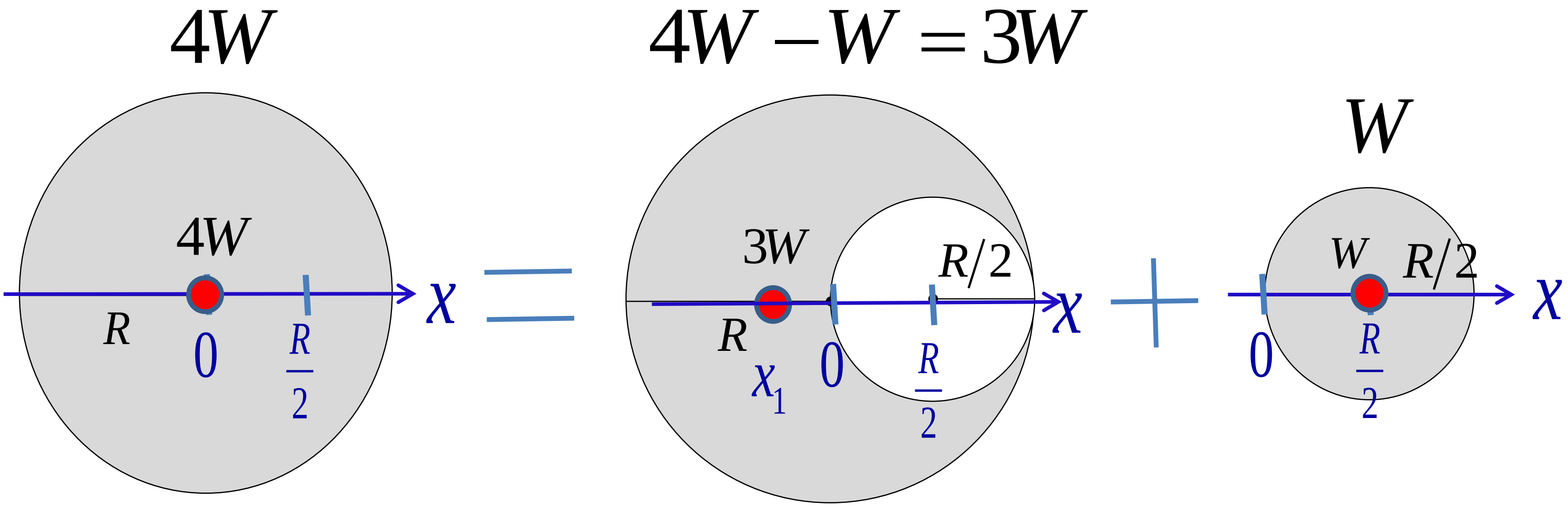
2.(*a*) 半徑為*R*之均勻圓形板挖去內切半徑 圓後，如圖，其剩餘部分之重心在何處？

(*b*) 將圓板改為均勻圓球則挖去內切半徑 之球後，其剩餘部分之重心在何處？



[解析]

(1)

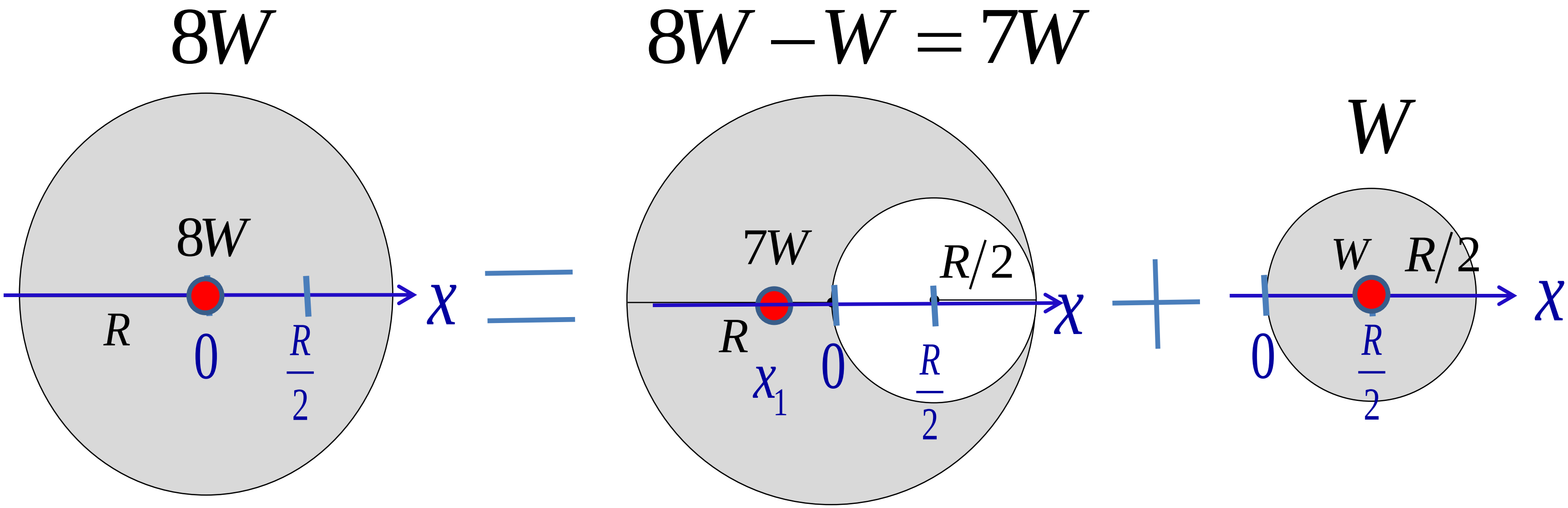


大圓可視為由小圓及剩餘的部分所組成，
故大圓的重心坐標即為小圓及剩餘的部分所組成系統的重心坐標。

$$x_G=\frac{W_1x_1+W_2x_2}{W_1+W_2}\rightarrow 0=\frac{3W\times x_1+W\times\frac{R}{2}}{3W+W}\therefore x_1=-\frac{R}{6}$$

[解析]

(2)

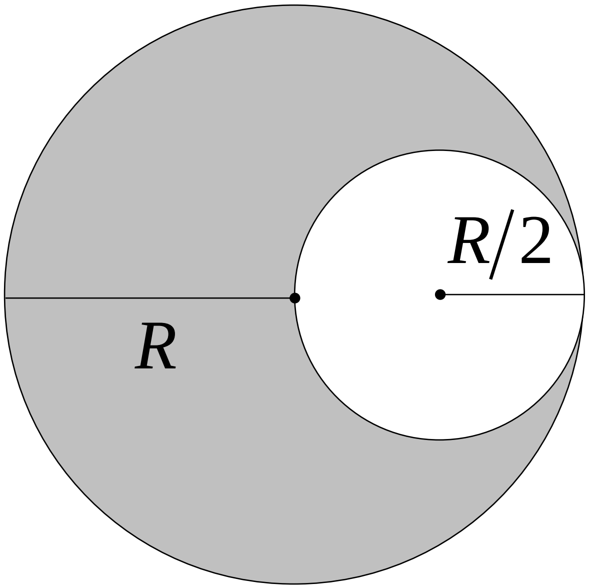


大球可視為由小球及剩餘的部分所組成，

故大球的重心坐標即為小球及剩餘的部分所組成系統的重心坐標。

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2} \to 0 = \frac{7W \times x_1 + W \times \frac{R}{2}}{7W + W} \therefore x_1 = -\frac{R}{14}$$

[討論]

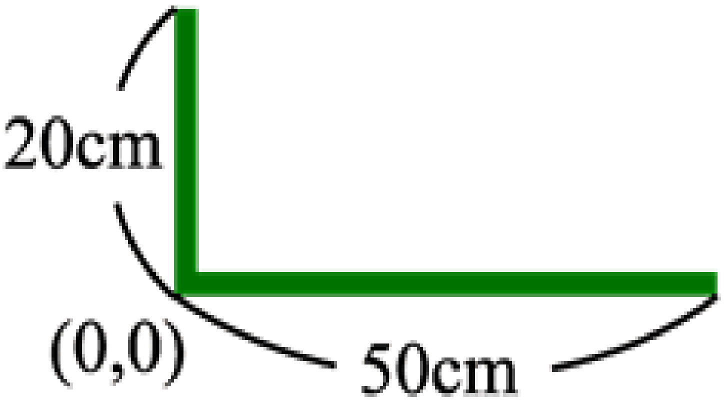


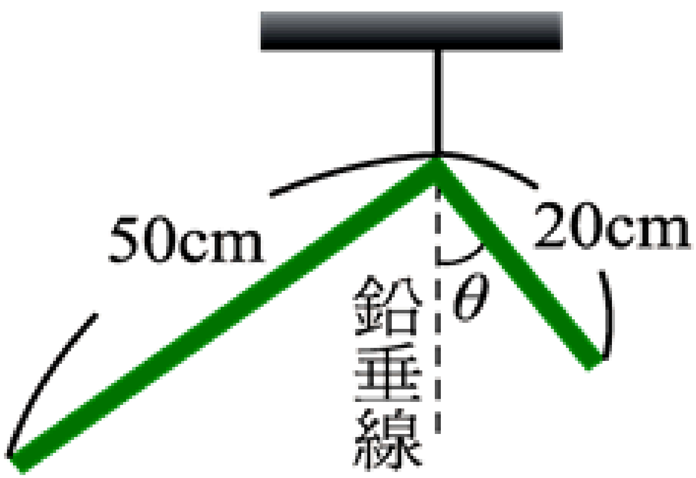
技巧概念

挖去(-)加上(+)

$$x_G = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 - w_3 x_3}{w_1 + w_2 - w_3}$$

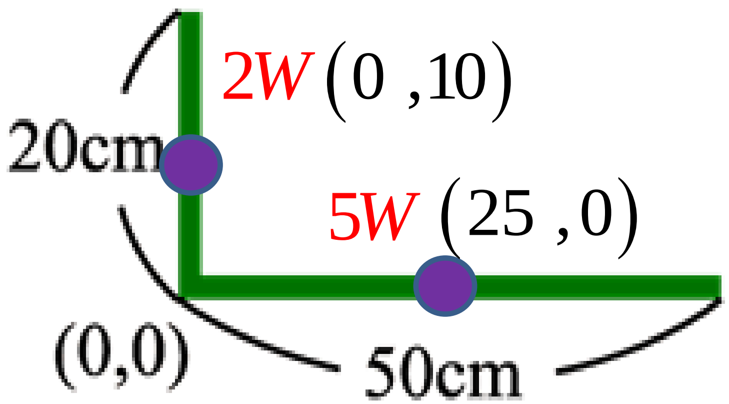
1. 上圖為一厚度及密度皆均勻的直角尺規，設其寬度甚小，可以忽略。兩邊的邊長分別為20公分和50公分。(1)若以50公分的邊為*x*軸，20公分的邊為*y*軸，兩邊交接處為坐標原點(0,0)，則此尺的重心坐標為_____公分。(2)下圖是以細線將該尺的兩邊交接處懸吊起平衡時的情形，則tanθ=_______。





[解析]

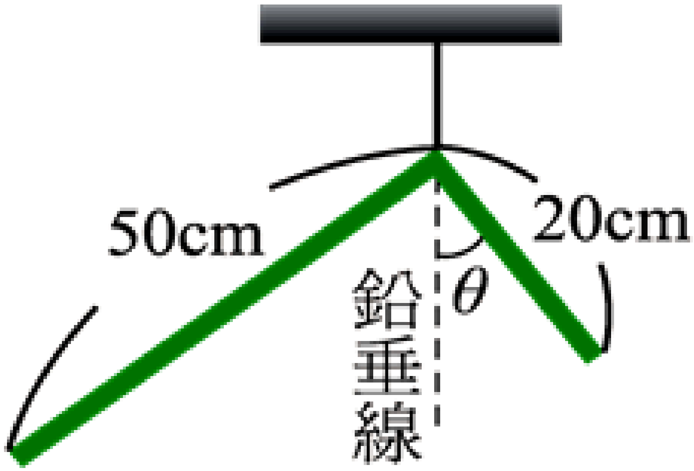
(1)設兩邊的重量分別為 $2W$ 及 $5W$

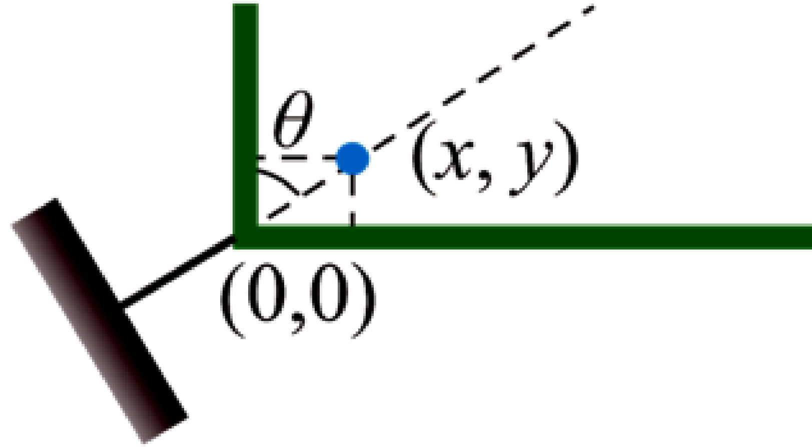


$$重心坐標(x,y)=\left(\frac{2W\times 0+5W\times 25}{2W+5W},\frac{2W\times 10+5W\times 0}{2W+5W}\right)$$

$$=\left(\frac{125}{7},\frac{20}{7}\right)(\text{cm})$$

[解析]





$$(2)\ \tan\theta=\frac{x}{y}=\frac{\frac{125}{7}}{\frac{20}{7}}=\frac{25}{4}$$

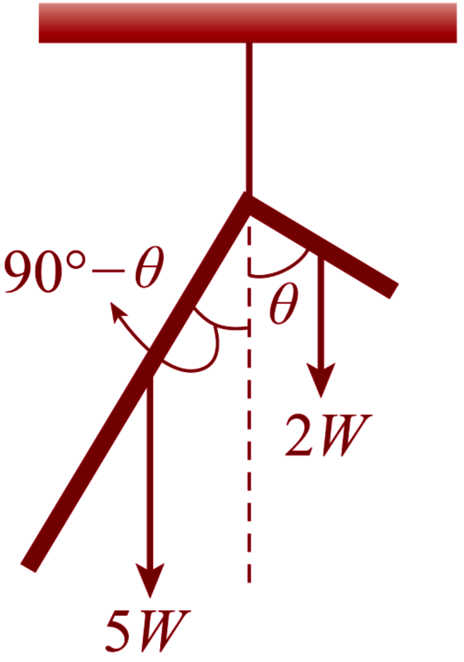
【另解】

如圖，以懸吊處為支點，由力矩平衡

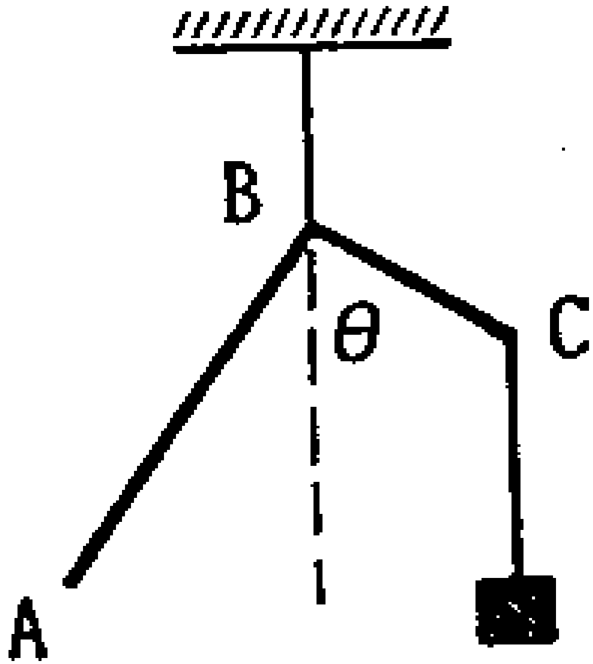
$$\Rightarrow 5W\times\frac{50}{2}\times\sin(90^\circ-\theta)$$

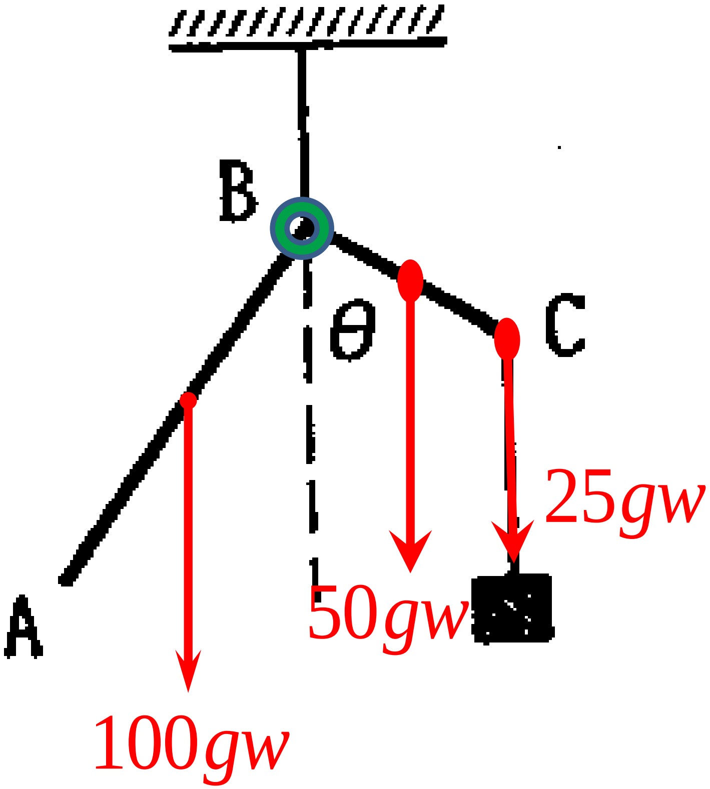
$$=2W\times\frac{20}{2}\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow 25\cos\theta=4\sin\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{25}{4}$$



2. 圖中，粗細均勻的*L*形鋼絲*ABC*重*150gw*，*AB=2BC*在*C*處以細繩繫一重*25gw* 之物，見CB與鉛直線之夾角為 ，則tan ＝？



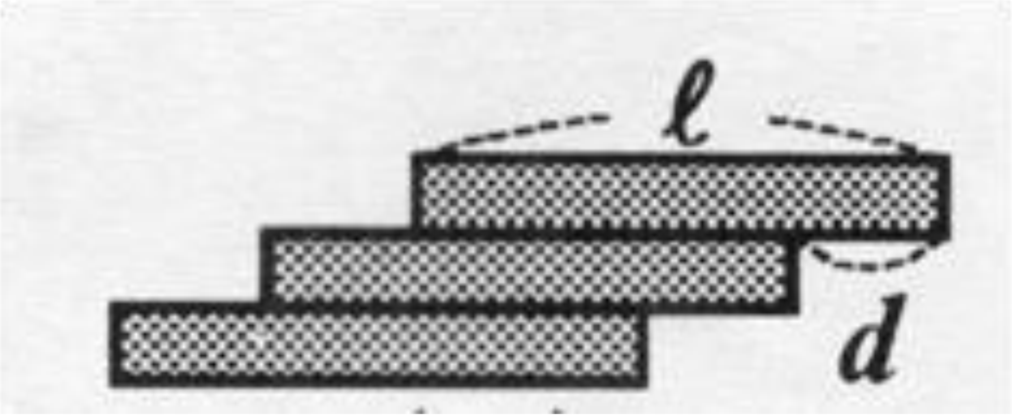


以懸吊處為支點，合力矩=0

$$100\times2\times\sin(90^\circ-\theta)=50\times1\times\sin\theta+25\times2\times\sin\theta$$

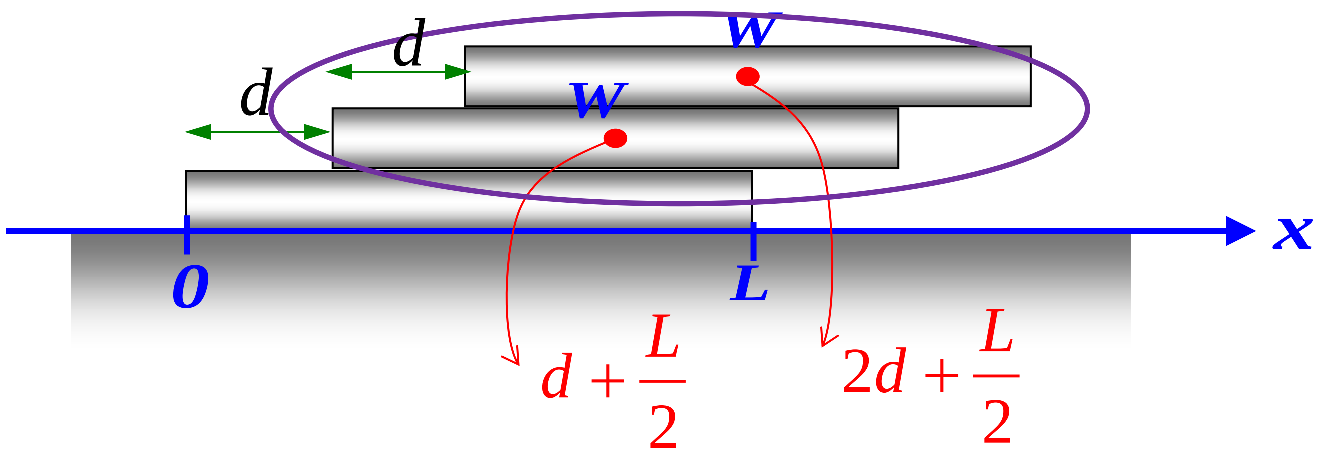
$$\therefore \tan\theta=2$$

1.邊長 之相同磚3塊，如右圖(a)所示的堆積方式。上面每塊磚儘可能伸出其下面磚塊範圍之外，而此系統仍能保持平衡，且每對之堆積距離*d* 相同，而此系統仍能保持靜平衡。試求堆積*d* 之最大值為何？



[解析]　(1)

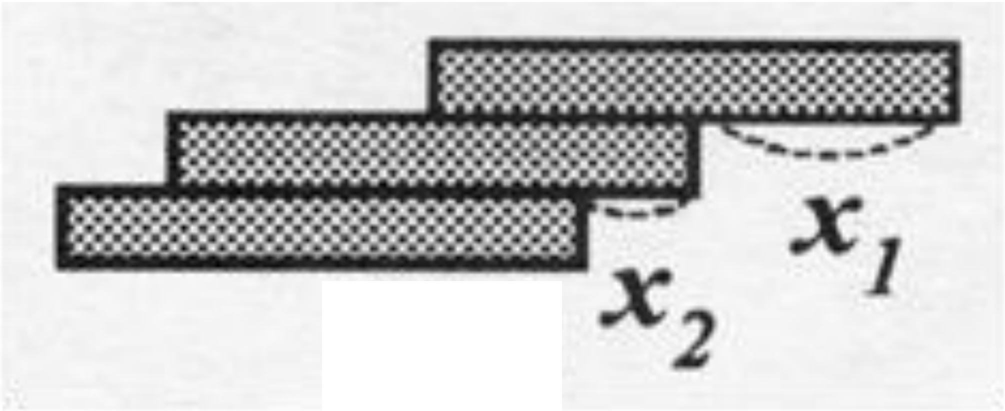
欲保持平衡，則 *A*、*B* 兩木塊的重心不可超過 *C* 木塊的最右緣以 *C* 木塊的最左緣為坐標原點，定出各木塊的坐標，則*A*、*B*兩木塊重心坐標的臨界值為<u>　L　</u>。



$$x_G=\frac{W\times\left(d+\frac{L}{2}\right)+W\times\left(2d+\frac{L}{2}\right)}{W+W}=L\rightarrow x=\frac{2}{3}L$$

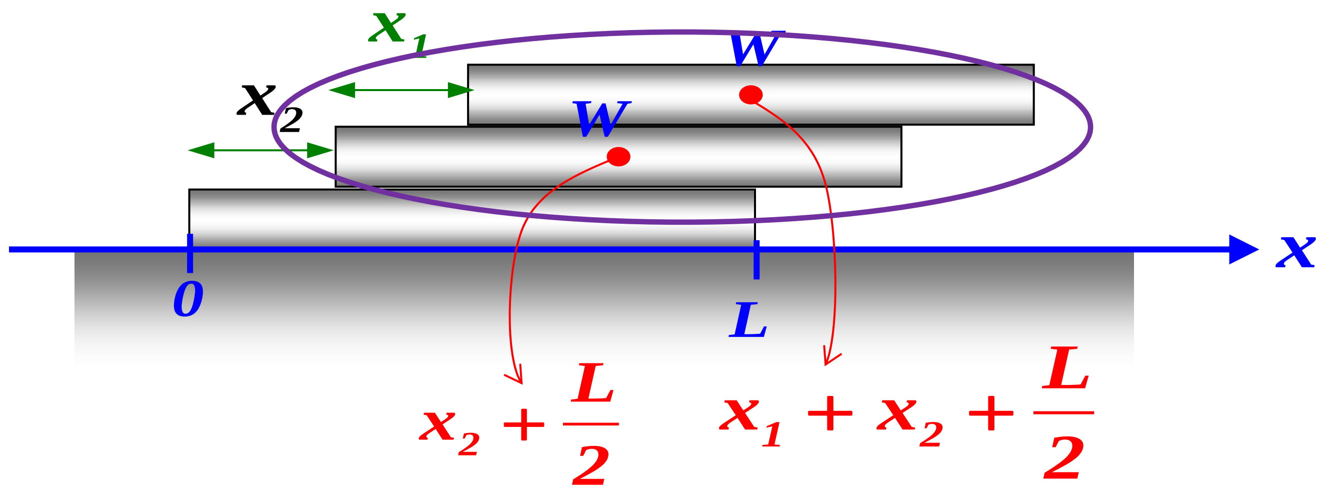
故 x 可能的最大值$=\frac{2}{3}L$

2.邊長 之相同磚3塊，堆積方式如圖(b)。上面每塊磚儘可能伸出其下面磚塊範圍之外，而此系統仍能保持平衡。試求最上面磚塊比最下面磚塊可能伸出之最大值為何？



[解析]

(2) 若*A*、*B*兩木塊伸出的長度不相等，欲求最大值，可先設定 *A* 木塊伸出 *B* 木塊邊緣x_1的最大值= $\frac{L}{2}$



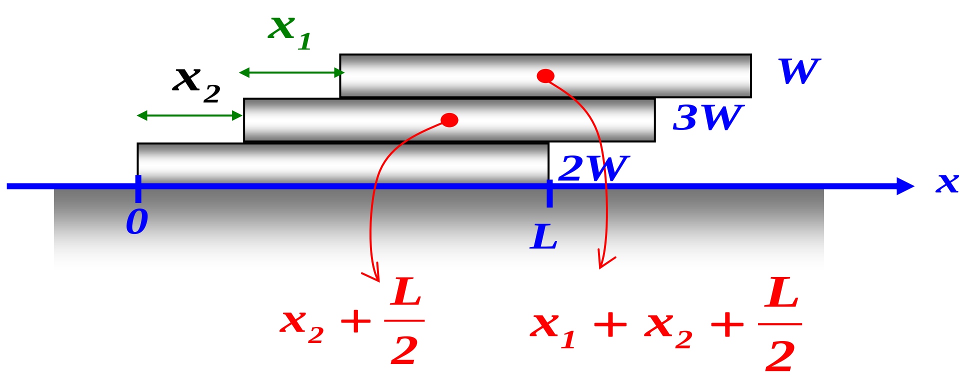
$$x_1=\frac{L}{2}$$

$$x_G=\frac{W\times\left(x_1+\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right)+W\times\left(x_1+\frac{L}{2}\right)}{W+W}=L\rightarrow x'=\frac{L}{4}$$

故 x_1+x_2 可能的最大值$=\frac{L}{2}+\frac{L}{4}=\frac{3}{4}L$

排列方式:
∵最下面一塊不計，越往下越重，
整體重心才會越向左偏，突出的長度才會大
∴最上面最輕W，第二塊最重$3W$
，最下面一塊$2W$

總伸長量最長的排列技巧：
由最上面一塊依序往下推
(1)先將最上面第1塊推到重心恰在第3塊邊緣
(2)再推第2塊推到(1+2塊)重心恰在第3塊邊緣
....



$$W: x_1 \le \frac{L}{2}$$

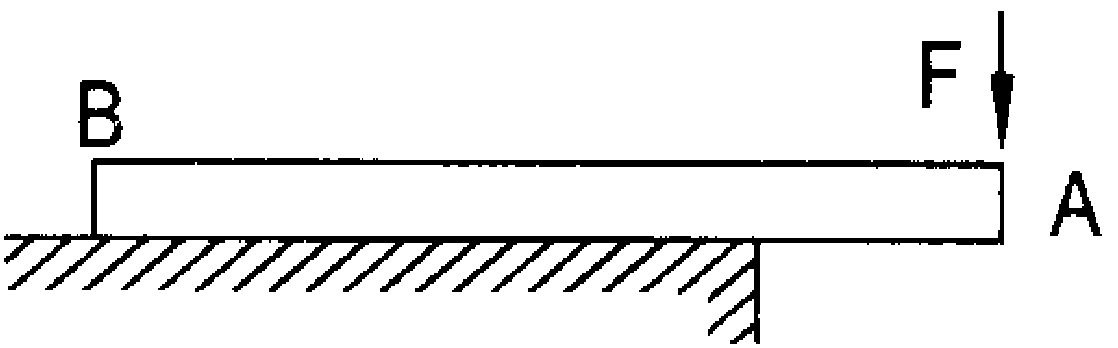
$$W+3W: x_G = \frac{W\times\left(x_1+x_2+\frac{L}{2}\right)+3W\times\left(x_2+\frac{L}{2}\right)}{W+3W} \le L$$

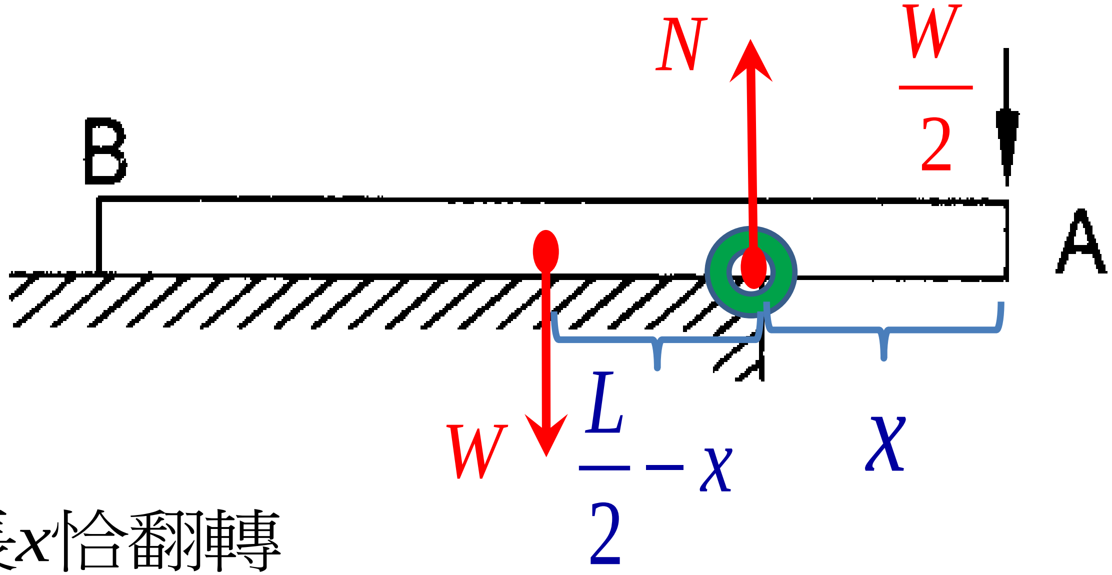
$$\rightarrow x_1+4x_2+2L \le 4L \rightarrow x_1+4x_2 \le 2L$$

$$\rightarrow 4\left(x_1+x_2\right) \le 3x_1+2L \le \frac{7L}{2}$$

$$\rightarrow x_1+x_2 \le \frac{7L}{8}$$

1.如圖所示，長度為L的均質棒，置於水平台上，欲使B端保 持與平台接觸下，在A端施予棒重一半之力；則A端突出平台邊緣之最長為？





令最長x恰翻轉

$\boxed{\text{恰翻轉時，正向力恰通過轉軸}}$

恰翻轉時　合力矩＝0

$$W\times\left(\frac{L}{2}-x\right)=\frac{W}{2}\times x\ \therefore x=\frac{L}{3}$$

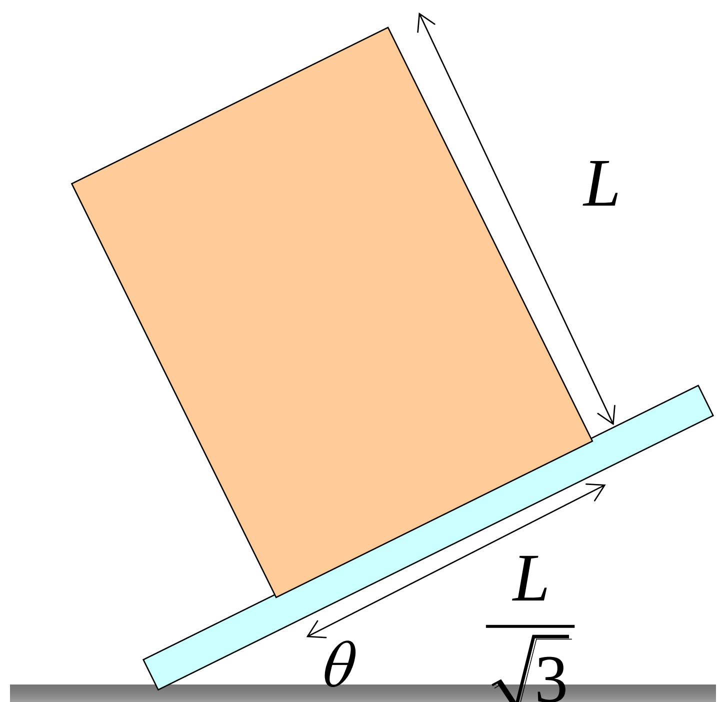
如圖所示，一高度為*L*的均勻長方體，其正方形底面之邊長為$\dfrac{L}{\sqrt{3}}$，靜置於一斜坡平面上，此長方體與斜坡面間之靜摩擦係數為μ=1。當傾斜角θ由0度開始，慢慢增加時，則：

(1)恰要傾倒時的傾斜角θ=_______。

(2)恰要滑動時的傾斜角θ=_______。

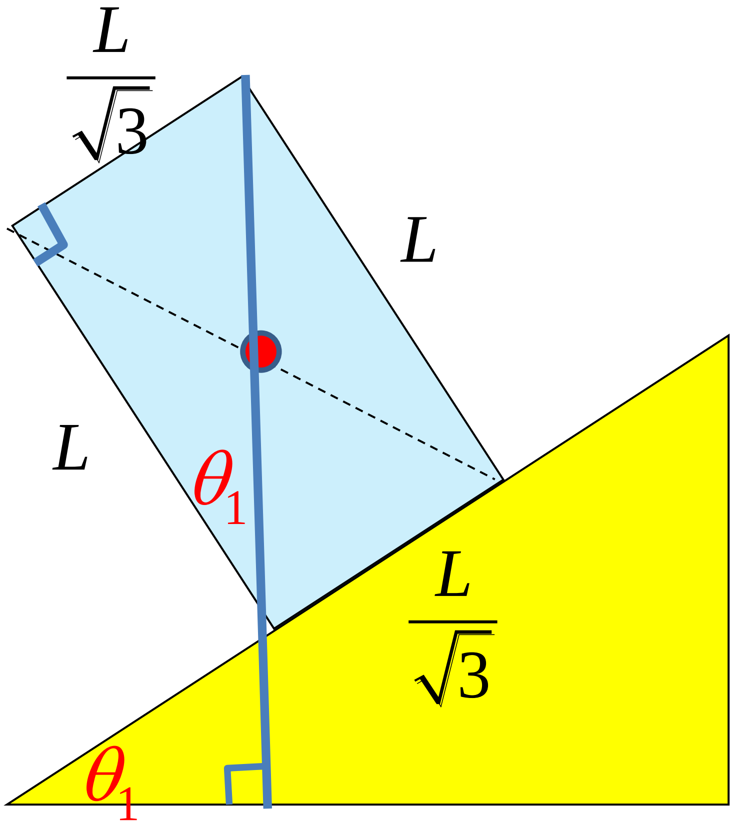
(3)傾斜角θ在哪個範圍內時，此長方體既不滑動，亦不傾倒？

(4)在θ由0開始持續增加的過程中，此長方體會先滑動還是先傾倒？



[解析] (1)

恰要傾倒時條件為：通過長方體重心的鉛直線恰通過其底面積的邊緣。



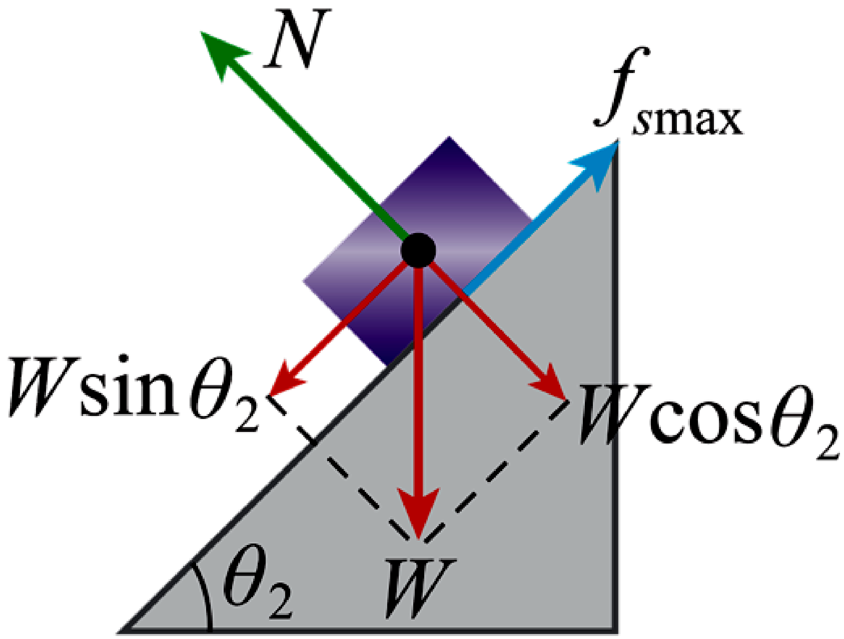
$$\tan\theta_1 = \frac{\frac{L}{\sqrt{3}}}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 30^\circ$$

[解析] (2)

恰要滑動時的條件為：下滑力=最大靜摩擦力

靜摩擦係數等於恰滑動時斜面傾斜角正切值 $\tan\theta = \mu_s$



恰要滑動

$$\tan\theta_2 = \mu_S = 1$$

$$\Rightarrow \theta_2 = 45°$$

[解析]

(3) 由(1)(2)可知，此長方體既不滑動亦不傾倒的條件為：傾斜角$\theta < 30°$。

(4)當θ超過$30°$時，此長方體即會傾倒，但當θ超過$45°$時才會滑動，故會先傾倒。