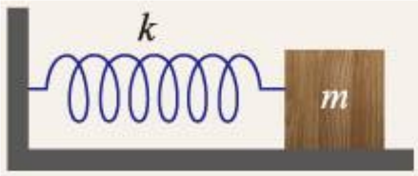
簡 諧 運 動 Simple Harmonic Motion

在光滑水平面上，用一忽略質量的彈簧，其彈性係數為 k，一端繫在牆上，另一端繫一質量 m 的木塊，如圖。將木塊從彈簧原長處，拉長 R 後釋放，使木塊作簡諧運動，可利用牛頓運動定律，解微分方程式找出位置跟時間關係：



定彈簧原長處為原點，向右為正，

由 $\overline{F} = m\bar{a}$ ， $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

M 在水平方向只受彈力 $F = kx$ ，向左

$$\Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

從方程式中可知， $x(t)$ 要找對 t 微分兩次後，仍與 $x(t)$ 成正比的函數

設 $x(t) = A\cos(\lambda t + \phi)$ $\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2 A\cos(\lambda t + \phi)$

$-\lambda^2 A\cos(\lambda t + \phi) + \omega_0{}^2 A\cos(\lambda t + \phi) = 0$ 同除 $A\cos(\lambda t + \phi)$

$\Rightarrow -\lambda^2 + \omega_0{}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega_0$ (取正)

故 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

若初始位置為 $x(t=0) = R$

則 $R = A\cos(\phi) \Rightarrow \phi = 0, A = R \Rightarrow x(t) = R\cos(\omega_0 t)$

此為簡諧運動物體位置-時間關係