2016年第17屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第47屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2015年11月21日
13:30~16:30
考試時間：三小時

＜＜注意事項＞＞

1、 本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
2、 填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、 計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
4、 可使用掌上型計算器(含工程式計算器)。

2016年第17屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第47屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為150分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格4分，共30格，合計120分)

一、 一物體進行直線運動，其位置x，與時間t的關係為：$x = 4 + 7t - 2t^2$。圖1是速度與時間的作圖，則在0~2秒間，該物體速度$\vec{v}$與時間t的關係，可用圖1中A、B、C和D四條線的何者描述？ ___(1)___ 。(以A、B、C和D作答)

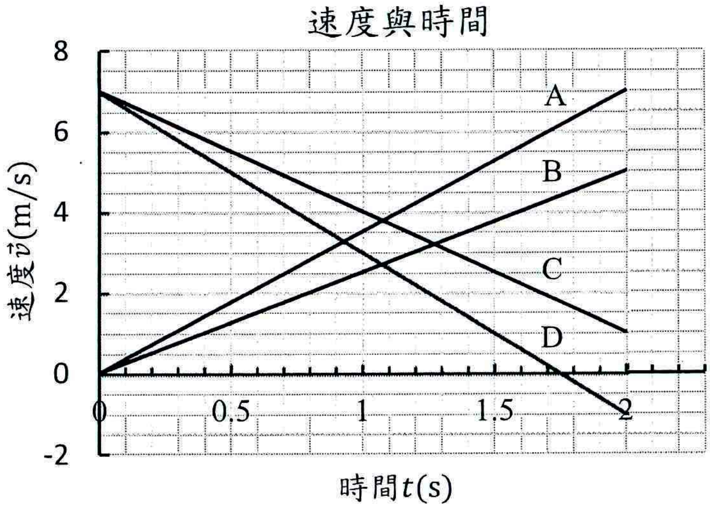


圖1：速度對時間的作圖

二、 將一個裝滿水之乒乓球由距離地面高度1公尺處自靜止釋放，乒乓球落地時反彈，依碰撞狀況，乒乓球會反覆地落下、反彈數次，直到靜止在地面上。圖2所示為該乒乓球在地面上幾次反彈過程中高度y和時間t之關係圖$y(t)$。由靜止釋放後三秒內之平均速率為 ___(2)___ 。若乒乓球落下與反彈過程中之空氣阻力可忽略，則第一次碰撞時之恢復係數為 ___(3)___ 。(作答時取三位有效數字)

【註】：恢復係數(coefficient of restitution)是指當兩物體碰撞時，碰撞後與碰撞前兩物體相對速率之比值。

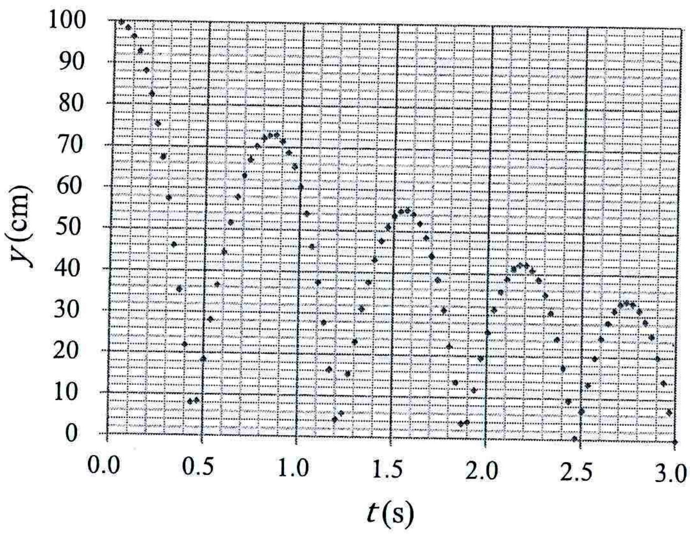


圖 2

三、 砲兵以仰角θ射擊一發榴彈砲，在前方之觀測士測得砲彈飛行在最高點時的瞬時速率為v，而當砲彈繼續飛行到高度為最高點之高度的一半時，測得之瞬時速率為$2v$。不計空氣阻力，則發射砲彈時砲管之仰角$\theta =$ __(4)__ 度；而砲彈的射程為 __(5)__ 。(設重力加速度g)

四、 今年 9 月 14 日位於日本九州熊本縣的阿蘇火山突然爆發，從火山噴口算起，火山灰鉛直向上衝高2000 m。已知火山口海拔高度為1592 m，噴出的火山灰，相對於火山噴口，其速率呈現半球形均勻分布。若不計風力和空氣阻力的影響，計算火山灰從火山口噴出的最大速率為 __(6)__ m/s；又噴出的火山灰降落在海拔高度為300 m山腳平地上，則火山灰覆蓋在山腳平地上的圓形面積半徑為 __(7)__ m。(當地的重力加速度$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$)

五、截面積為A的水塔內，有密度為ρ、深度為H的液體；水塔底部接著一根水平方向的水管，其長度為L、截面積為a，且$a \ll A$，如圖 3 所示。水管連接水塔處（即 S 點）的壓力為P_S，另一端壓力為大氣壓力為P_0。液體的黏滯係數為η，其單位為$\mathrm{kg/(m \cdot s)}$。在穩流的情形下，水管兩端的壓力差$P_S - P_0$與黏滯係數η、和水管長度L成正比，而與水管中(含水管兩端)每單位時間流出的體積Q(或稱為體積流率)、截面積 a 的關係為$(P_S - P_0) = 8\pi\,\eta L Q^{\alpha} a^{\beta}$；式中$\alpha$與$\beta$皆為常數，則$\beta =$ __(8)__ 。已知在水管以外的地方黏滯力皆可忽略，試求水管中液體的流速$v =$ __(9)__ 。

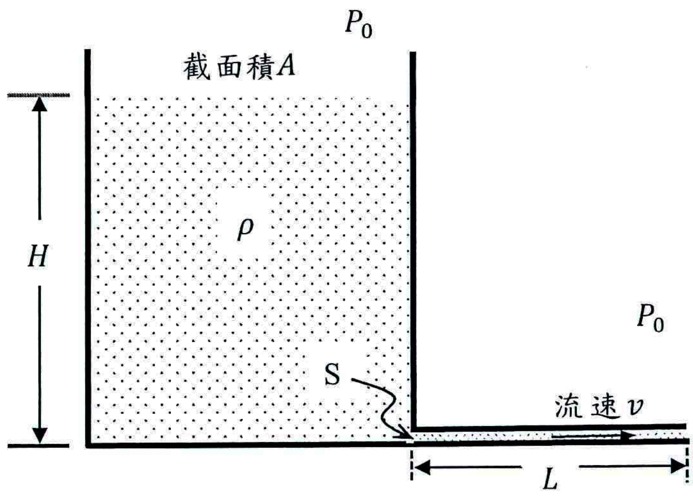


圖 3

六、 如圖 4(a)所示，某生將兩水平截面積與體積皆相同、密度各為ρ_1與ρ_2之方形板塊，以膠水黏結後浸入於某一液體中，發現黏結後的板塊可靜止平衡在液體內任一點，則液體的密度為 (10) 。若黏結前兩方形板塊之厚度皆為h，今將黏結後之板塊自離液面高度h_0處($h < h_0 < 2h$)由靜止釋放(如圖 4(b)所示)，液體的流動、阻力與表面張力可忽略不計，則板塊第一次恰完全沒入液體的時間為 (11) 。(設重力加速度為g)

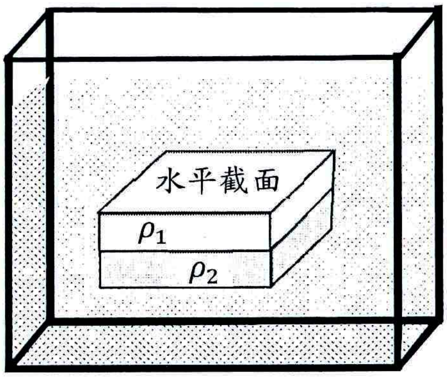


圖 4(a)

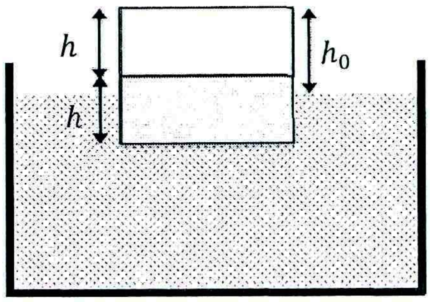


圖 4(b)

七、 一個鉛直放置之絕熱汽缸，其活塞面積為A、質量為m。汽缸內有n莫耳單原子之理想氣體，設活塞與汽缸之間的摩擦力可以不計。起始時，汽缸內氣體與活塞處於平衡狀態，其絕對溫度為T_0，氣體常數為R；已知汽缸外大氣壓力為P_0，則活塞內面與汽缸底面之距離為 (12) 。現在施外力，極緩慢地將活塞內面與汽缸底面之距離改變成h，求汽缸內氣體的溫度$T(h) =$ (13) 。

【提示】：積分公式：$\int \frac{dx}{x} = \ln x$。

八、 一個高度為75公分的圓柱形絕熱量熱器內，底部裝有25公分高的冰；再迅速將溫度為10°C的水注入此量熱器，使得水面高度到達50公分，如圖5所示。若冰一直固定於量熱器的底部，當溫度穩定後，在一大氣壓下，測得水面高度增加了0.5公分，則注入水之前，量熱器內冰的溫度是__(14)__°C。

已知冰的密度：0.9 ρ_{water}；冰的熔解熱：340 kJ/kg；冰的比熱：2.1 kJ/(kg·K)；水的比熱：4.2 kJ/(kg·K)。

圖 5：絕熱量熱器

九、 如圖6所示，一個具冷卻功能的簡易系統，包含兩個同心之半球形容器1和容器2，其半徑分別為R_1、R_2（$R_2 > R_1$）。容器1之頂蓋與外界大氣之單位長度熱傳導係數為κ_1，其半球形表面單位長度熱傳導係數為κ_2。內裝有水的容器2，半球形表面為絕熱，水與空氣介面間的單位長度熱傳導係數為κ_3，假設冷卻效應僅考慮水在自由面上蒸發，即水空氣的接觸面。已知水蒸發在單位時間內從每單位面積帶走η的熱量。若外界溫度T為定值，而系統達到穩態時，容器1內的溫度是T_1與容器2的水溫為T_2，則以下列何種方式調整κ_1、κ_2，才能使 T_1 的溫度降到最低?__(15)__(以A、B、C和D作答)。

A: 提高κ_1及κ_2，B:降低κ_1及κ_2，C:提高κ_1，降低κ_2，D:提高κ_2，降低κ_1。

當外界溫度T為定值，且系統達到穩態時，$T_1 - T_2 =$____(16)____。

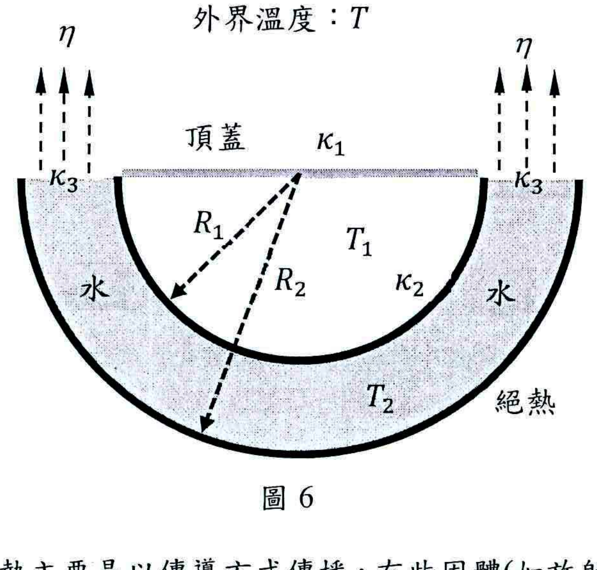


圖 6

十、 在一般固體材料中熱主要是以傳導方式傳播，有些固體(如放射性物質)除了傳導熱量外，本身也會產生熱量，而所產生的熱量也是透過熱傳導方式傳播出去。今有一此類材料所製之半徑為R之固體球體，假設球體中單位體積之熱量產生率為s (單位為$\mathrm{W/m^3}$)，試問當球體內每一點溫度達穩定平衡時，每秒由半徑r ($r < R$)之球面傳

播出去的熱量為____(17)____。假設此材料之熱傳導係數為κ，則溫度達穩定平衡時，球心與球面之溫度差為____(18)____。

【提示】：積分公式 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，$n \geq 0$。

十一、 如圖 7 所示，長度為$2L$的均勻長方體平板，靜止置於水平地面上。當時間$t=0$時，質量為m的小孩在平板右端，由靜止開始，沿平板表面的中分線，走到平板最左端，然後停在平板上。假設以平板中點 O 為座標系原點，且選定正x軸方向為水平向右。當時間t趨近無窮大時：(A)若平板與地面之間無摩擦力，則平板的水平位移為____(19)____。(B)若平板與地面之間的摩擦力與平板的速度成正比，則平板的水平位移為____(20)____。

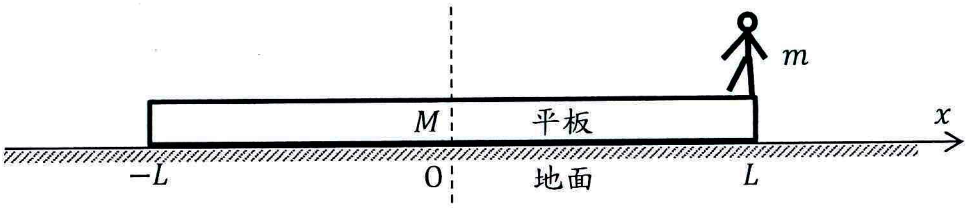


圖 7

十二、 (A) 質量m的小方塊，初始時置於固定斜面頂端。斜面高h；傾角為θ，且方塊的初速為v_0，方向沿斜面向下，如圖 8(a)所示。若方塊與斜面間的動摩擦係數為μ_k，則當方塊到達斜面底端時，動摩擦力所作的功為____(21)____。（設重力加速度為g）
(B) 若將斜面改為一半徑為R的圓弧面，圓弧面的圓心在底端的正上方，如圖 8(b)所示。方塊沿著圓弧面下滑，動摩擦係數仍為μ_k，當滑到最低處時速度恰為零，若$h/R \ll 1$，即忽略向心力的影響，利用(A)的做法，求$v_0^2=$____(22)____（以μ_k、h、R，表示之）。

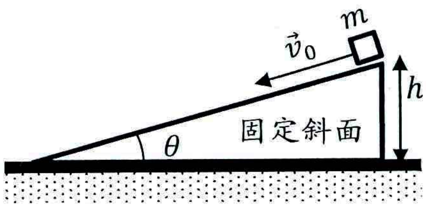


圖 8(a)

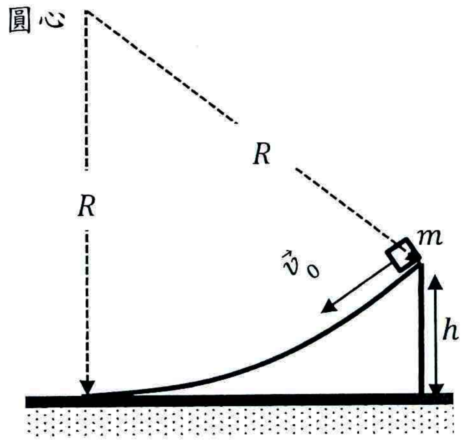


圖 8(b)

十三、 在外太空中有一艘子母太空船，已知子太空船質量為m，母太空船質量為$4m$，當子、母太空船的距離為d，子太空船以速率v_0相對母太空船離開，且完全脫離母太空船重力之影響，試問v_0至少應為____(23)____。(設重力常數為G)

十四、 考慮地震發生時的水平方向振動，使地板上的物體水平搖擺作簡諧運動，若測得物體的振幅為 5 公分，週期為1 秒，則該物體的最大加速度量值約為__(24)__公尺/秒 ^{2} (取 1 位有效數字即可)。在書架上的書本與水平架板間靜摩擦係數需大於__(25)__，書本才不會因此地震而滑動？（取重力加速度$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$）

十五、 有一自然長度為l、力常數為k的輕質彈簧，上端固定於天花板，下端繫著長度亦為 l、且無彈性的輕質細繩，細繩下端再繫有一質量為m的質點，受重力自然下垂如圖 9。重力加速度為g，則在初始靜力平衡時，以外力將質點垂直下拉後釋放，使質點開始上下振盪。(A)若振盪過程中細繩始終保持拉直的狀態，則振盪的最大振幅為__(26)__。(B)若在初始靜力平衡時，給質點一個向上的初速v，使得質點在之後的過程中可以觸及彈簧的下端，則該v的最小值為__(27)__。

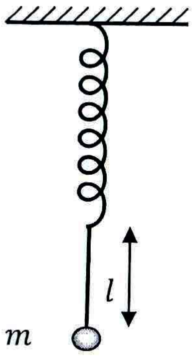


圖 9

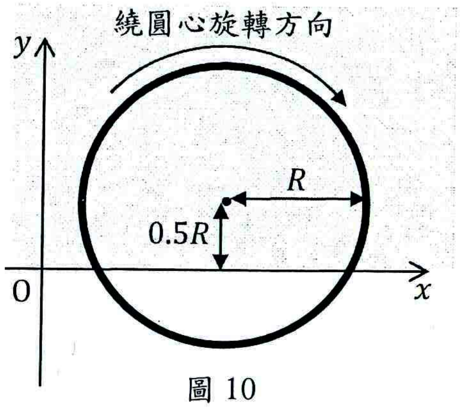


圖 10

十六、 如圖 10 所示，一均勻圓環，半徑為R，質量為M，放置於水平的平面上，設此平面為$x-y$面。平面上以x軸為分界，兩邊的區域各自都是均勻的。$y>0$的區域較粗糙，與圓環之間的動摩擦係數為μ，而$y<0$的區域很光滑，與金屬環之間的動摩擦力可以忽略。在某瞬間，此圓環的環心恰在$y=0.5R$處，圓環不平移，但繞通過圓心的垂直軸旋轉。此時圓環所受的總動摩擦力，其y軸方向的分量為__(28)__，而x軸方向的分量為__(29)__，動摩擦力對圓環所施的力矩（相對於圓環中心）為__(30)__。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、 如圖 11 所示，在裝有單原子理想氣體的低壓真空容器內，有兩片固定不動、彼此平行的正方形平板A與A'，兩板沿x方向之間隔d遠小於氣體分子之平均自由行程(即原子在連續兩次碰撞之間行進的平均距離)。兩板內側(相向)表面的溫度，分別維持於固定的絕對溫度T與T'。假設氣體分子在撞擊內側板面後，立即以板面分子熱運動的平均速率，垂直板面反彈(此處假設表面分子只沿±x方向有熱運動，且能

量均分定理成立)，而兩板面均大到邊緣效應可以忽略。已知兩板間氣體分子數目的分布達到穩定態，每個原子的質量為m，波茲曼常數為k，在每單位時間內，通過單位橫截面積(在$y-z$平面)，沿$+x$方向由A往A′的氣體分子個數平均為n，而沿$-x$方向由A′往A的氣體分子個數平均為n'，則

(a) 比值n'/n為何？(5 分)

(b) 兩板間橫截面(在$y-z$平面)受到的平均壓力為何？(5 分)

(c) 每單位時間內、每單位面積由A板傳到A′板上的熱量為何？(5 分)

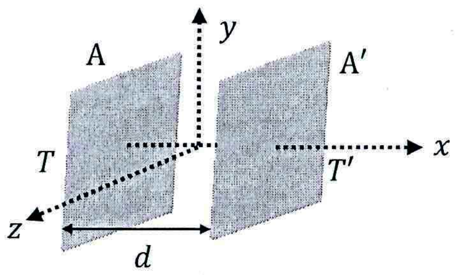


圖 11

二、 一均勻實心球質量為m、半徑為R，由桌子邊緣 P 點滾下，如圖 12 所示，座標x軸向右為正，y軸向上為正，球心為 O，OP 連線與x軸夾角為θ。圖中虛線為初始靜止位置，球恰可沿 P 點滾下。已知滾動下落過程中，球與桌緣接處點 P 之間沒有相對移動(即無滑動)，設重力加速度為g，則

(a) 滾動下落過程中，相對於 P 點而言，球的角加速度為何？(逆時針方向為正)。

(b) 滾動下落過程中，球和桌緣 P 點間的摩擦力大小為何？

(c) 滾動下落過程中，球所受到的正向力大小為何？

(d) 當球剛要脫離桌子邊緣的時候，OP 連線與x軸夾角θ為何？

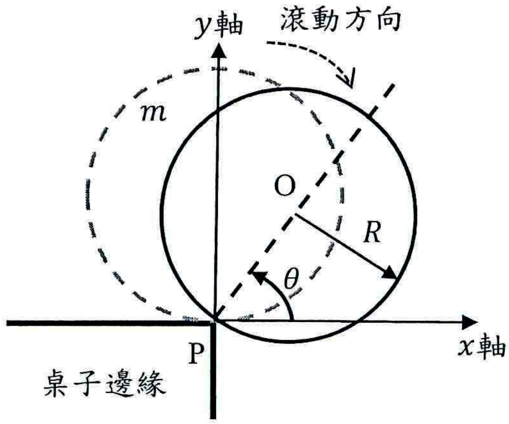


圖 12

註：當質量為m的物體進行純轉動運動時，若轉動軸距離質心為d，則相對於此轉動軸的轉動慣量為$I_{cm}+md^2$，其中I_{cm}為通過質心轉動軸的轉動慣量，對半徑為R的實心球而言，其I_{cm}等於$\frac{2}{5}mR^2$。

2016 年第 17 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 47 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、填充題

一、(1) D

解：

由關係式，$x = 4 + 7t - 2t^2$，與位置公式$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$相比較後，得到初速度為7 m/s，且加速度為−4 m/s^2，故得速度與時間的關係式為

$$v = 7 - 4t \text{ ，} \tag{1}$$

是為等加速度運動(直線形式)，圖中初始值為7，斜率為−4，故曲線D可用於描述該物體的速度與時間的關係。

二、(2) 169 cm/s (誤差 2 cm/s 均可)

(3) 0.854 (誤差 0.002 均可)

解：

(2) 平均速率$v = \frac{\text{行經總路徑}}{\text{經過時間}} = \frac{100+73\text{x}2+55\text{x}2+42\text{x}2+33\text{x}2}{3} = 169\ \text{cm/s}$ (誤差2 cm/s)

(3) 恢復係數定義為$\eta = \frac{\text{碰撞後相對速率}}{\text{碰撞前相對速率}}$；又乒乓球與地球碰撞，地球速度可視為零；因此，恢復係數為乒乓球碰撞前速度與碰撞後速度絕對值比值。忽略空氣阻力作用，由能量守恆率，動能與位能互換，得知

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh} \tag{2}$$

因此，所求恢復係數為第一次反彈高度(73 cm)與原靜止高度(100 cm)比值的根號值，即 $\eta = \frac{\sqrt{73}}{\sqrt{100}} \cong 0.854$。(誤差 0.002 均可)

三、(4) 67.8$^{\text{o}}$

(5) $2\sqrt{6}\frac{v^2}{g}$

解：

(4) 令最高點高度 H，由能量守恆知

$$mgH + \frac{1}{2}mv^2 = mg\left(\frac{1}{2}H\right) + \frac{1}{2}m(2v^2)$$

得 $v=\sqrt{\frac{1}{3}gH}$ 此為水平速率（速度水平分量），最高點無垂直分量；且飛行中速度水平分量不變。

令發射時之瞬時初速率為v_o

$\frac{1}{2}mv_o^2=mgH+\frac{1}{2}mv^2$。故$v_o=\sqrt{\frac{7}{3}gH}$。

$\cos\theta=\frac{v}{v_o}=\sqrt{\frac{1}{7}}$, 求得 $\theta=67.8^o$。

(5) 由(4)可知初始速度垂直分量為$v_y=v_o\sin(67.8^o)=\sqrt{\frac{6}{7}}\,v_o$

因此，砲彈總飛行時間 $T=\frac{2v_y}{g}$

射程 $R=v\frac{2v_y}{g}=\frac{2v^2}{g}\tan\theta=2\sqrt{6}\frac{v^2}{g}$。

四、(6) 198m/s

(7) 5132m

解：

(6) 若火山灰石以最大的初速v_0，自噴口處沿鉛直方向噴出，則可達最大的高度$h=$ 2000m。利用自由落體的運動公式，可得

$$v_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.80\times 2000}=198\,\mathrm{m/s} \tag{1}$$

(7) 取火山噴口為xyz坐標系的原點，其中z軸沿鉛直方向，向上取正號；x和y分別為水平面上的兩正交坐標軸。考慮一個火山灰石質點，以最大初速v_0，在xz平面上從噴口處以仰角θ噴出，則該質點降落在山腳平地上的最大射程，即為所求圓形覆蓋範圍的半徑。利用斜向拋體的運動公式，可得該質點在空間$x-z$平面上軌跡的任一點坐標分別為

$$x=(v_0\cos\theta)t \tag{2}$$

$$z=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

從(2)和(3)兩式中消去t，可得該質點的軌跡方程式為

$$z=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2}\,(1+\tan^2\theta) \tag{4}$$

上式經整理後，得

$$\tan^2\theta-\frac{2v_0^2}{gx}\tan\theta+\left(1+\frac{2v_0^2z}{gx^2}\right)=0 \tag{5}$$

對$\tan\theta$而言，(5)式有實數解的條件為

$$\left(\frac{2v_0^2}{gx}\right)^2 - 4\left(1+\frac{2v_0^2 z}{gx^2}\right) \geq 0 \qquad (6)$$

$$v_0^4 - g^2x^2 - (2v_0^2 g)z \geq 0$$

所以得到

$$z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2 \qquad (7)$$

從上式可知 z 的最大值$z_{\max} \leq \frac{v_0^2}{2g}$，該值等於質點可到達的最大高度$h$，和(1)式相符。現考慮該質點在山腳平地上的落點，即取$z = -(1592-300) = -1292\ m$，則(7)式可寫為

$$-1292 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \left(\frac{g}{2v_0^2}\right)x^2 \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad -1292 \leq 2000 - \left(\frac{1}{4\times 2000}\right)x^2$$

$$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt{(4\times 2000)\times(2000+1292)} = 5132\ \mathrm{m}$$

火山灰石質點在山腳平坦地面上的最大射程為$x_{\max} = 5132\mathrm{m}$，此即為所求圓形覆蓋範圍的半徑，約為 5 公里。

五、(8) $\beta = -2$

(9) $v = \sqrt{2gH + \left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)^2} - \left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)$

解：

(8)由白努力定理得知

$$P_0 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

故解得 $v_0 = \sqrt{2gH}$，因此體積流率Q_0等於

$$Q_0 = av_0 = a\sqrt{2gH}$$

水管兩端壓力差公式為$(P_S - P_0) = 8\pi\,\eta L Q^\alpha a^\beta$，經由因次分析，得：

$$kg\ ms^{-2}m^{-2} = kg\ m^{-1}s^{-1}m\,[m^3s^{-1}]^\alpha[m^2]^\alpha$$

$$s^{-1}m^{-1} = m^{3\alpha+2\beta}s^{-\alpha}$$

故得 $\alpha = 1$；$\beta = -2$，即為答案。

(9) 根據 Bernoulli 方程

$$P_0+\rho gH=P_S+\tfrac{1}{2}\rho v^2=[P_0+8\pi\eta L(aV)a^{-2}]+\tfrac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow\quad \rho gH=8\pi\eta Lv/a+\tfrac{1}{2}\rho v^2 \quad\Rightarrow\quad v^2+2\left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)v-2gH=0$$

$$\Rightarrow\quad v^2+2\left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)v-\ 2gH=0\ \Rightarrow\quad v=\sqrt{2gH+\left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)^2}-\left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)$$

六、(10) $(\rho_1+\rho_2)/2$

(11) $\pi\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$

解：

(10) 設結合前方形板塊之體積為V，液體密度為ρ，則$\rho_1 Vg+\rho_2 Vg=\rho(2V)g$，故$\rho=(\rho_1+\rho_2)/2$。

(11) 當板塊離水面高度為x時，板塊受重力為$(\rho_1+\rho_2)Vg$，浮力為$\rho(2V)(1-\frac{x}{2h})g$，因此板塊受到的向下淨力為$(\rho_1+\rho_2)Vg\frac{x}{2h}=mg\frac{x}{2h}$($m$ 為板塊的質量)，此為簡諧運動，週期 T 為 $T=2\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}$，而板塊恰完全沒入液體的時間為$\frac{T}{4}=\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$。

七、(12) $\dfrac{nRT_0}{(P_0A+mg)}$

(13) $T=T_0\left[\dfrac{nRT_0}{(P_0A+mg)h}\right]^{2/3}$

解：

(12) 由$PV=\left(P_0+\frac{mg}{A}\right)Ah_0=nRT_0$，可得$h_0=\frac{nRT_0}{\left(P_0+\frac{mg}{A}\right)A}$。

(13) 由功能定理：$-P(h)Adh=\frac{3}{2}nRdT$，可得$-\frac{nRT}{Ah}Adh=\frac{3}{2}nRdT$，簡化可得

$$\frac{dT}{T}+\frac{2}{3}\frac{dh}{h}=0$$

可以解得$Th^{2/3}=$常數，即$Th^{2/3}=T_0h_0^{2/3}$，故

$$T=T_0\left[\frac{nRT_0}{(P_0A+mg)h}\right]^{2/3}。$$

八、（14） $\underline{-54}$

解：

(14) 熱平衡時，體積增加意味著部分的水會結成冰，但不是全部，否則第一個量熱器內的內容物高度將增加：$(h/3)[(\rho_{\text{water}}/\rho_{\text{ice}})-1] \approx 2.5\ \text{cm}(h/3)$，而非所給的$\Delta h = 0.5\ \text{cm}$，故知此時量熱器內冰、水共存，溫度為0 ℃。利用這些條件，可以寫下熱平衡方程式：

$$c_{\text{water}} m_{\text{water}} (T_{\text{water}} - 0) = -\lambda \Delta m + c_{\text{ice}} m_{\text{ice}} (0 - T_{\text{ice}}) \tag{1}$$

設 S 為量熱器之截面積，則

$$\Delta h \cdot S = \left[\left(\frac{\rho_{\text{water}}}{\rho_{\text{ice}}}\right) - 1\right] \times (\Delta m/\rho_{\text{water}})$$

推算出$\Delta m = \Delta h \cdot S[\rho_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{ice}}/(\rho_{\text{water}} - \rho_{\text{ice}})]$，又$m_{\text{water}} = (h/3)\ \rho_{\text{water}} \cdot S$，且$m_{\text{ice}} = (h/3)\ \rho_{\text{ice}} \cdot S$，代入(1)式得

$$c_{\text{water}} \cdot \left(\frac{h}{3}\right) \cdot \rho_{\text{water}} \cdot S \cdot T_{\text{water}}$$

$$= -\lambda \cdot \Delta h \cdot S[\rho_{\text{water}} \cdot \rho_{\text{ice}}/(\rho_{\text{water}} - \rho_{\text{ice}})] - c_{\text{ice}} \cdot (h/3) \cdot \rho_{\text{ice}} \cdot S\, T_{\text{ice}}$$

即

$$T_{\text{ice}} = -\left\{\left(\frac{\lambda}{c_{\text{ice}}}\right) \cdot \left(\frac{3\Delta h}{h}\right) \cdot [\rho_{\text{water}}/(\rho_{\text{water}} - \rho_{\text{ice}})]\right\}$$

$$-\,(c_{\text{water}}/c_{\text{ice}}) \cdot (\rho_{\text{water}}/\rho_{\text{ice}}) \cdot T_{\text{water}}$$

故解得 $T_{\text{ice}} = -54°\text{C}$。

九、（15） $\underline{\text{ D }}$

（16） $\underline{\dfrac{\eta(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2 \kappa_3(\kappa_1 + 2\kappa_2) + R_1^2(2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_3)}}$

解：

(15) 由於容器2的水會蒸發，因此溫度會先下降，之後容器1會受影響，溫度跟著下降。因此$T_2 < T_1 < T$，熱從外界傳導到容器 1，而從容器 1 傳導到容器 2。因此要使冷卻效果最佳，必須盡量降低κ_1而提高κ_2。

（16）達到穩態時，流進容器1和容器2的總熱流都要為零:

$$\kappa_1(T - T_1)\pi R_1^2 - \kappa_2(T_1 - T_2)2\pi(R_2^2 - R_1^2) = 0$$

和

$$\kappa_2(T_1 - T_2)2\pi(R_2^2 - R_1^2) + \kappa_3(T - T_2)\pi(R_2^2 - R_1^2) = \eta\pi(R_2^2 - R_1^2)$$

由以上兩式可求得

$$T_1 - T_2 = \frac{\eta(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2 \kappa_3(\kappa_1 + 2\kappa_2) + R_1^2(2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_3)}$$

十、(17) $\underline{\quad \frac{4\pi}{3}sr^3 \quad}$

(18) $\underline{\quad \frac{sR^2}{6\kappa} \quad}$

解：

(17) 當溫度達平衡時，熱量不累積，半徑r之球體內所產生之熱量一定要經由半徑r之球面傳播出去，故每秒通過半徑r之球面的熱量為$\frac{4\pi}{3}(r)^3s = \frac{4\pi}{3}sr^3$。

(18) 設每秒、單位面積由半徑 r 之球面傳播出去的熱量為 J，則$4\pi r^2J = \frac{4\pi r^3}{3}s$，$J = \frac{rs}{3}$。沿一固定方向之熱量傳播為$\int_0^R Jdr = \kappa\Delta T$，故$\Delta T = \frac{sR^2}{6\kappa}$。

十一、 (19) $\underline{\quad \frac{2m}{m+M}L \quad}$

(20) $\underline{\;0\;}$

解：

(19) 最初平板中點 O (即平板質心)位於座標系原點，故平板的位移等於其質心的位置座標。平板與地面之間無摩擦力時，小孩--平板系統沿水平方向所受的外力為零，故小孩一平板系統的質心速度恆為零，即系統的質心位置座標ξ為定值。若平板的水平位移(即平板的質心位置座標)為X_0，則

$$\xi = \frac{mL + M\cdot 0}{m+M} = \frac{m(X_0 - L) + MX_0}{m+M}$$

解之得

$$X_0 = \frac{2m}{m+M}L$$

(20) 因平板與地面之間的摩擦力F與平板的速度V成正比，故$F = -kV$，k為比例常數。當小孩由平板右端走到左端停下時，小孩與平板(及系統質心)具有相同的速度，但因摩擦阻力的耗散作用，當時間趨近無窮大時，系統可能具有的動能與速度，最後必衰減為零。故時間趨近無窮大時，系統的動量變化量$\Delta P_s = 0$，這必須等於同一期間摩擦力F所產生的衝量，即

$$\Delta P_s = \int_0^\infty Fdt = \int_0^\infty -kVdt = -k[X(\infty) - X(0)] = -kX(\infty)$$

上式中$X(t)$為平板在時刻t的位移(當$t = 0$時，$X(0) = 0$)。因$\Delta P_s = 0$，故時間趨近無窮大時，平板的位移$X(\infty)$為零。

另解：

$$m\ddot{x}+M\ddot{X}=-k\dot{X} \tag{1}$$

對時間積分：

$$m(\dot{x}-0)+M(\dot{X}-0)=-k(X-0) \tag{2}$$

因$t\to\infty$時，$\dot{x}=\dot{X}=0$，故$X=0$。

十二、(21) $\underline{\mu_k mgh\cot\theta}$

(22) $\underline{2g\left[\mu_k\sqrt{2hR-h^2}-h\right]}$ 或 $\underline{2g\left[\mu_k\sqrt{2hR}-h\right]}$ 或 $\underline{2g\left[\mu_k\sqrt{2hR}\right]}$

解：

(21) 作功為動摩擦力$\mu_k mg\cos\theta$，乘以斜面長$h/\sin\theta$，故作功是：$W=\mu_k mg\cos\theta\ [h/\sin\theta]=\mu_k mgh\cot\theta$

(22) 依據(A)的作法，想像弧面是斜面的組合，故總能量為動能和為能之和為：

$$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh\cong\mu_k mgR\sin\theta， \tag{1}$$

其中高度為h，且等於$h=R(1-\cos\theta)$。設$\alpha=h/R$，則$\cos\theta=(1-\alpha)$，且

$\sin\theta=\sqrt{1-(1-\alpha)^2}=\sqrt{2\alpha-\alpha^2}$。故由(1)式得：

$$v_0^2\approx 2g\left[\mu_k R\sqrt{2\alpha-\alpha^2}-h\right]=2g\left[\mu_k\sqrt{2hR-h^2}-h\right]，$$

即$v_0^2\approx 2g\left[\mu_k\sqrt{2hR-h^2}-h\right]$，也可近似為

$$v_0^2\approx 2g\left[\mu_k\sqrt{2hR}-h\right]，$$

或

$$v_0^2=2g\left[\mu_k\sqrt{2hR}\right]。$$

十三、(23) $\underline{v\geq\sqrt{\dfrac{10Gm}{d}}}$

解：

(23) 設相對速度為v，在母子太空船距離為 d 時，母子太空船之質心速度 為 $v/5$，故母子太空船之相對動能為$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(5m)\left(\frac{v}{5}\right)^2=\frac{2}{5}mv^2$，欲脫離母船重力影響時，總能量必須大於或等於零。

$$\frac{2}{5}mv^2-\frac{G4m^2}{d}\geq 0，$$

故 $v \geq \sqrt{\frac{10Gm}{d}}$。

十四、（24）$\underline{\ 2\ }$

（25）$\underline{\ 0.2\ }$

解：

(24)由題目所給定測量的數據，振幅為0.05公尺，角頻率$\omega = 2\pi$，可以據此寫出簡諧運動的函數：

$$x = R\cos\omega t = 0.05\cos 2\pi t$$

兩次微分後可以得到$a_x = -R\omega^2\cos 2\pi t$，所以最大加速度的數值為$R\omega^2$，等於$0.05 \times (2\pi)^2 = 2\ \mathrm{m/s^2}$。

(25) 因為最大加速度為$2\ \mathrm{m/s^2}$，相當於對質量M的物體施力$2M$，書價板面與書之間的最大靜摩擦力(μMg)必須大於此地震所給予的施力書本才不會滑動，即$\mu Mg \geq 2M$，也就是$\mu \geq 2/g = 0.2$。

十五、（26）$\underline{\ \frac{mg}{k}\ }$

（27）$\underline{\ \sqrt{2gl + \frac{mg^2}{k}}\ }$

解：

(26) 張力等於彈簧的彈力，又張力最小時必發生在質點到達最高點時，因此 若要使細繩始終保持拉直的狀態，則繩子必須保持有張力，也就是質點到達最高點時，彈簧伸長量為零，此時質點相對於平衡位置的位移即為振幅，$kA = mg$，即：

$$A = \frac{mg}{k}$$

(27) 考慮力學能守恆。令彈簧處於自然長度時之質點高度為零，則質點在初始的力學能E_i要等於質點到達最高點、觸及彈簧下端時的力學能E_f。初始時彈簧伸長量為A，質點的高度為$-(l + A)$，速率為v，故：

$$E_i = \frac{1}{2}kA^2 - mg(l + A) + \frac{1}{2}mv^2$$

而當質點到達最高點、觸及彈簧下端時，彈簧伸長量為零故彈力位能為零、高度為零故重力位能為零、質點無速率故動能亦為零，即：$E_f = 0$

因此由$E_i = E_f$可求得：

$$v = \sqrt{2gl + \frac{mg^2}{k}}$$

十六、 (28) 0

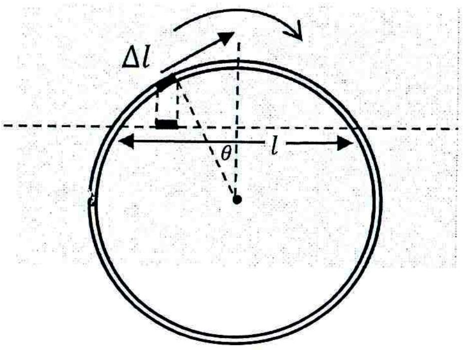
(29) $\frac{\sqrt{3}Mg\mu}{2\pi}$

(30) $\frac{2}{3}Mg\mu R$

解：考慮圓環是由一段段的小圓弧組成，因為圓環是均勻的，正向力會均勻分配到所有小圓弧上，小圓弧Δl所受的摩擦力大小為

$$Mg\mu \cdot \frac{\Delta l}{2\pi R}$$

動摩擦力方向與各個小圓弧的運動方向相反。在$R > y > 0$之間的左右兩段圓弧，所受的動摩擦力正好完全抵消，因此可以忽略。整個圓環只有$1.5R > y > R$的圓弧會有動摩擦力：



(28) 對這一段圓弧，垂直方向的動摩擦亦恰好抵銷，因此整個圓環動摩擦力的y方向分量為零。

(29) 圓弧所受的摩擦力在x方向上的投影為：

$$Mg\mu \cdot \frac{\Delta l}{2\pi R} \cdot \cos\theta$$

而$\Delta l \cdot \cos\theta$正好就是該小段長度在水平方向的投影。因此加總後，$\Delta l \cdot \cos\theta$加總為圓弧在水平方向的投影$l$，而該圓弧的摩擦力水平方向分量等於：

$$Mg\mu \cdot \frac{l}{2\pi R} = Mg\mu \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2\pi R} = \frac{\sqrt{3}Mg\mu}{2\pi}$$

(30) 因為動摩擦力與運動方向平行，在圓環上永遠與力臂垂直，因此摩擦力所施的力矩等於所有在粗糙區域的圓環所受的動摩擦力乘上力臂：

$$\tau = \frac{2}{3}Mg\mu R。$$

貳、計算題

一、解：

(a) 考慮A′板(考慮A板的結論相同)：當氣體分子數目的分布達到穩定態時，根據流體的連續性方程式，每單位時間內，每單位面積上撞擊板面(分子沿$+x$方向運動，速率由T決定)與自板面反彈(分子沿$-x$方向運動，速率由T'決定)的分子個數必須相等，故$n = n'$，即$n'/n = 1$。

(b) 在單位時間內，yz平面上每單位面積受到的動量為$nmv + n'mv'$，此即壓力p。因v與v'分別為絕對溫度T與T'時熱分子運動的速率，依能量均分定理，$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT$，$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kT'$，故壓力$p$為

$$\begin{aligned} p &= nmv + n'mv' = m(nv + n'v') \\ &= \sqrt{mk}(n\sqrt{T} + n'\sqrt{T'}) \qquad \text{(ans)} \\ &= n\sqrt{mk}(\sqrt{T} + \sqrt{T'}) \qquad \text{(ans)} \end{aligned}$$

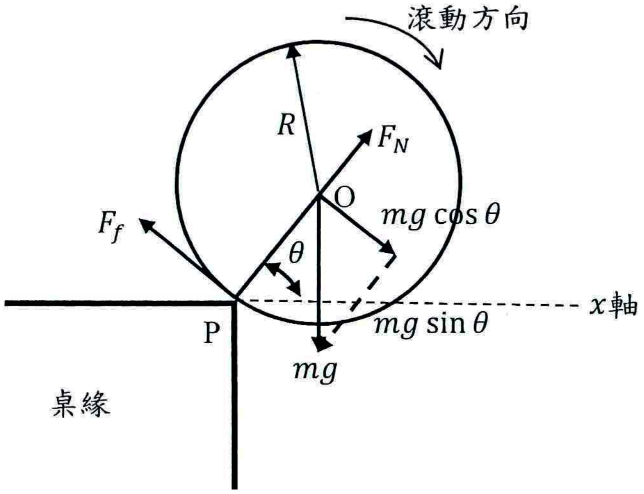
(c) 在單位時間內每單位面積由 A 板流向 A′ 板的能量為

$$n \times \frac{1}{2}kT - n' \times \frac{1}{2}kT' = n \times \frac{1}{2}nk(T - T')$$

或是僅考慮由T傳到T'的能量$n \times \frac{1}{2}kT$亦可。

二、解：

(a)



由上圖得知相對於 P 點的力矩大小為$mgR\cos\theta$，恰等於相對於 P 點的轉動慣量I與角加速度α的乘積，即：

$$I\alpha = -mgR\cos\theta \qquad (1)$$

其中轉動慣量I等於$\frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$，代入(1)式得角加速度$\alpha$為

$$\alpha = -\frac{5}{7}\frac{g}{R}\cos\theta \qquad (2)$$

故角加速度為$-\frac{5}{7}\frac{g}{R}\cos\theta$。

(b) 因為摩擦力F_f為靜摩擦力，故等於$ma = mg\cos\theta - F_f$，其中a為球質心加速度，

因為是純滾動故$a = R\alpha$，因此

$$F_f = mg\cos\theta - mR\alpha = mg\cos\theta - mR\left(\frac{5}{7}\frac{g}{R}\cos\theta\right) = \frac{2}{7}mg\cos\theta$$

摩擦力大小為$\frac{2}{7}mg\cos\theta$。

(c) 因為正向力F_N是沿著 OP 連線，因此$mg\sin\theta - F_N = mR\omega^2$，即

$$F_N = mg\sin\theta - mR\omega^2$$

其中ω是質心相對於 P 點的轉動角速率，由能量守恆知轉動動能是由位能而來，所以

$$mgR(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}mR^2\right)\omega^2$$

得

$$\omega^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R}(1-\sin\theta)$$

所以正向力F_N等於

$$F_N = mg\sin\theta - mR\omega^2$$

$$F_N = mg\sin\theta - mR\frac{10}{7}\frac{g}{R}(1-\sin\theta) = \frac{mg}{7}(17\sin\theta - 10)$$

(d) 當正向力F_N等於零時，球與桌子邊緣脫離，也就是$(17\sin\theta - 10) = 0$

可以解得$\sin^{-1}\frac{10}{17} = 36$度。