2010年第11屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第41屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2009年11月14日
13:30~16:30
考試時間：三小時

＜＜注意事項＞＞

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器。

2010 年第 11 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 41 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、 據報導我國於 2006 年發射的福衛三號衛星系統，由六顆微衛星所組成，每個衛星的質量約為 62kg，環繞地球的軌道為圓形，軌道離地面的高度為 800km，其軌道平面和地球赤道面之間的夾角為 72°。利用上述的數據和地球半徑 $R_E = 6400$ km，地表的重力加速度 $g = 9.80\ \text{m/s}^2$，計算衛星的飛行速率為何？__(1)__m/s；又衛星的環繞週期為多少分鐘？__(2)__分。

二、 如圖 1 所示的撞球檯，長度為 a，寬度為 b，現欲將位在角落 A 處的球，擊出後先射向 BC 邊，再撞向 AD 邊，最後射入對角 C 處的球袋內。若不計球與檯面之間的摩擦，且球與檯邊的碰撞為完全彈性碰撞，則從 A 處擊出球的角度 θ，應滿足的條件為 $\tan\theta =$ __(3)__。

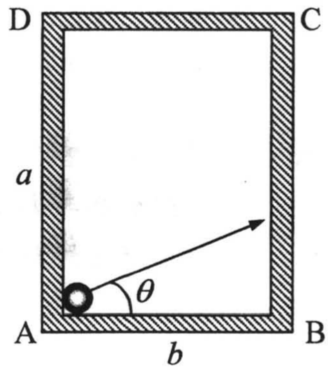


圖 1

三、 一裝有不明液體的容器放置在磅秤上，今將一截面積 $A = 100\ \text{cm}^2$ 的實心圓柱，沿著垂直於水面的方向，施力將其緩緩的浸入液體中，如圖 2a 所示。圖 2b 顯示實心圓柱浸入液中的深度 h 和磅秤上讀數的關係圖線，利用該圖線，可知此液體的密度為__(4)__g/cm^3。

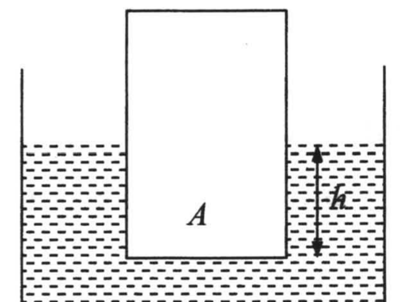


圖 2a

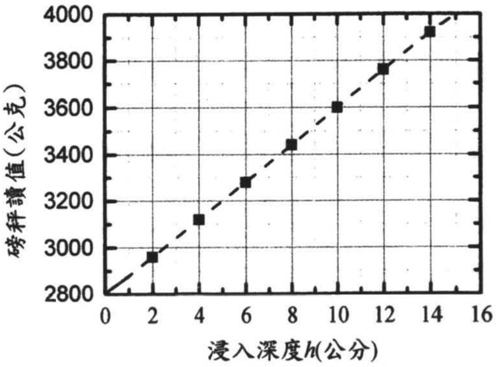


圖 2b

四、 一顆小球從離地面高度為 h 的位置，自靜止開始自由落下。若球和地面碰撞的恢復係數為 e，地面上的重力加速度為 g，則在第 n 次碰撞後，球反跳能到達的最大高度為__(5)__；又球從開始落下算起，至少須經多久的時間，才能靜止在地面上？__(6)__。

【註】：恢復係數 $e=\frac{\text{接近速度}}{\text{脫離速度}}$

五、 如圖 3 所示的兩個均勻空心薄壁圓筒，小圓筒的質量為 m，兩圓筒之間的動摩擦係數為 μ。若大圓筒在水平地面上作純滾動時，以等加速度 a 前進，小圓筒在大圓筒內壁上運動時產生滑動，但接觸點的張角 θ 保持固定，則 $\tan\theta$ 等於__(7)__，而大圓筒作用於小圓筒的正向力的量值為__(8)__（答案須以重力加速度 g、m、a、μ 表示之）。

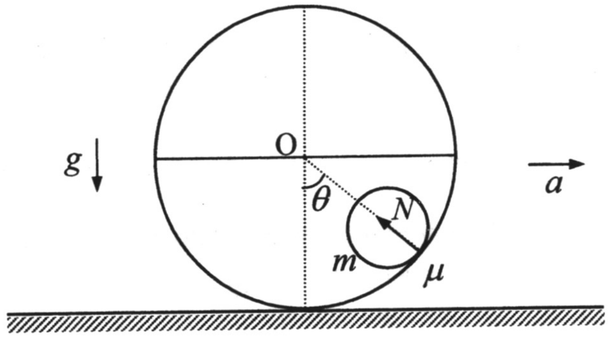


圖 3

六、 在固定 1/4 哩（約 400 公尺）的直線競速賽車中，若跑車從一開始直至終點，皆以最大輸出功率 P(或稱最大馬力)衝刺，且不計跑車在加速過程中的任何摩擦損失，設跑車抵達終點時的最高速率為 v_e，則 v_e 和 P 之間的數學關係式可寫為 $v\propto P^n$，式中之 n 值為__(9)__。

七、 如圖 4 所示，在光滑的水平桌面上，置有一長度為 ℓ，且質量可忽略的細桿，其兩端各固結有一質量皆為 m 的質點，另一質量亦為 m 的質點沿垂直於細桿的方向入射，以速度 v 撞擊一端的質點。若該入射的質點和被撞擊的質點，在碰撞後合而為一，則當碰撞後的瞬間，整個系統的質心速度為__(10)__；又細桿中點的速度為__(11)__。（以上的速度皆指相對於桌面而言。）

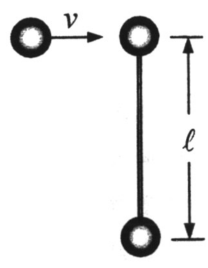


圖 4

八、 在三維空間中有一力場，它對任一位在坐標點 (x,y,z) 上的質點（質量為 m）所形成的位能，可表之為 $U=mC\left(x^2+y^2+z^2\right)$，式中 C 為一常數。今從原點將一未知質量的質點，以初速率 v_0 往 $+x$ 軸方向射出，求：
(a)該質點所能到達的最遠距離為__(12)__；(b)該質點受場力作用，返回原點所需的時間為__(13)__。

九、 如圖 5 所示，在一光滑的水平桌面上，有一質量為 m 的長木塊，其長邊與 x 軸平行。另有一質量為 $2m$ 的小銅塊置於長木塊之上。起始時，長木塊以速率 v 向 $+x$ 方向運動．小銅塊位於長木塊的最右端．相對於長木塊以速度 $v/3$ 向 x 方向運動．小銅塊與長木塊之間的動摩擦係數為 μ。假設木塊的長度足夠長，小銅塊不會滑出木塊的表面，則木塊的最終速度的量值為__(14)__；為了避免銅塊滑落，木塊的長度不能小於__(15)__。（以 g 代表重力加速度）

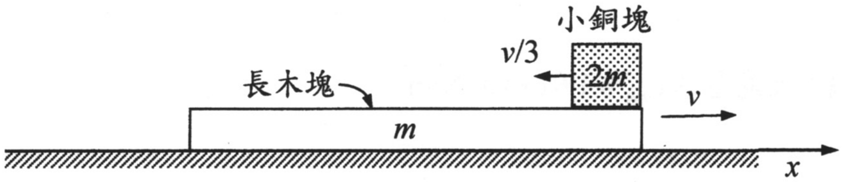


圖 5

十、 如圖 6 所示，建築用的鉛垂是在一條細線的下端繫結一鉛塊而成，用於測定和水平面成垂直的直線。但由於地球的自轉，利用鉛垂所得的鉛垂線並不會指向地球中心，而會偏離一個很小的角度 δ。該角度和地球半徑 R_E，自轉角速度 ω，地表重力加速度 g，和所在的緯度 θ 有關。(a)寫出此 δ 的數學式__(16)__（以 R_E、ω、g、和 θ 表示之）。(b) δ 的最大值為__(17)__。

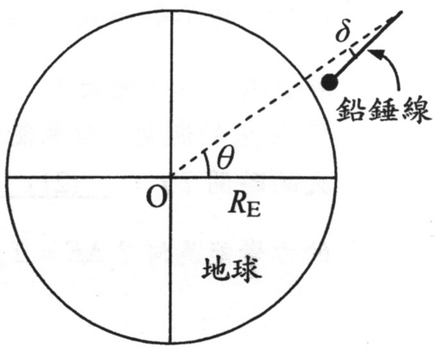


圖 6

【註】$R_E = 6400\ \text{km}$，$g = 9.8\ \text{m/s}^2$。

十一、 如圖 7 所示，兩個相同的單擺，擺長為 ℓ，擺錘的質量為 m，懸掛在同一水平面的天花板上。圖上的 A 和 B 分別為兩單擺的懸點，兩者之間的距離為 d（$d < 2\ell$）。起始時，將兩擺錘拉至懸點的高度，即和天花板相齊，拉緊擺線，並同時使兩擺錘自靜止開始釋放。若兩擺錘之間的碰撞為完全非彈性碰撞，則在碰撞後，當兩者上升至最大的高度時，其與天花板之間的鉛直距離為__(18)__。

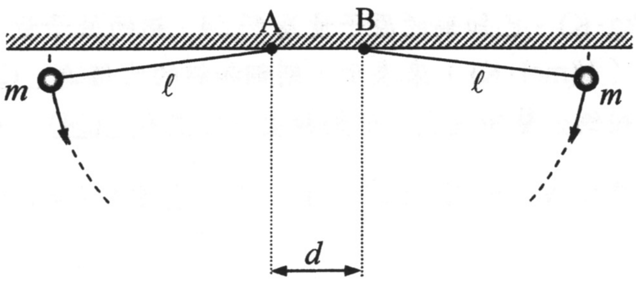


圖 7

十二、 有一兩端開口的細玻璃管，其長度$L = 0.500\ \mathrm{m}$，鉛直地放在裝滿水的容器上方，使玻璃管底端稍微觸及水面。在這樣的情況下，玻璃管內的水柱高度$h = 20.0\ \mathrm{mm}$。今若在玻璃管的下端尚未碰觸水面之前，先將管之上端開口封住，然後使管下端稍微觸及水面，結果管內的水柱高度變為h'，假設在整個過程中，溫度維持不變，試問這時管內外的氣體壓力差為何？$\Delta P = P_{內} - P_{外} =$ __(19)__（以h'、大氣壓力P_{atm}、和原管內的空氣柱長度L表示之）；利用已知的數據，求出$h' =$ __(20)__ mm （由於$L >> h'$，在計算過程中，可僅保留至(h'/L)的一次方項）。

【註】：大氣壓力$P_{atm} = 1.01 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$。

十三、 如圖 8 所示，考慮一個質量為m、半徑為R的剛性空心圓筒，圓筒與地面之間的靜摩擦係數為μ_s，動摩擦係數為μ_k，$\mu_s > \mu_k$。起始時，將繞有細繩的圓筒靜置在一水平地面上，然後將細繩沿鉛直方向，向上猛力一抽，施予圓筒一量值為p_0的衝量，結果使圓筒開始向右運動。試問圓筒進行加速度運動，持續多久的時間？$t =$ __(21)__（以已知量表示之）；在整個運動過程中，圓筒所損失的力學能為何？$\Delta E = E_{末} - E_{初} =$ __(22)__（以已知量表示之）。

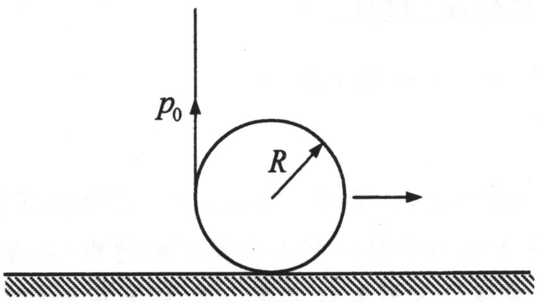


圖 8

十四、 金屬的定容比熱近似等於定壓比熱。銅的定壓比熱為386 J/(kg·K)，鋁的定壓比熱為900 J/(kg·K)。已知銅的原子量為63.54，鋁的原子量為26.98，若改用定壓的莫耳比熱（J/(mol·K)）來表示，則銅和鋁的比值為 __(23)__。若以定容的莫耳比熱來比較銅金屬和氦氣，則銅和氦的比值為 __(24)__。

【註】：亞佛加厥常數$N_A = 6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$；波茲曼常數$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$。

十五、 在溫度不變的情況下，起先兩個圓球形肥皂泡的半徑分別為 a 和 b，兩球泡合併後，成為一個半徑為 c 的球泡。若週圍的大氣壓力保持為 p_o，則肥皂泡液的表面張力 S 為__(25)__（以 a、b、c、和 p_o 表示之）；在兩球泡合併的過程中，球泡內、外氣體對肥皂泡所作的功為__(26)__（以 a、b、c、和 S 表示之）。

十六、 在一封閉的唧筒內，裝有 3.0g 的水和 3.0g 的水蒸汽，兩者處於熱平衡狀態，溫度同為 100^{o}C。若對該系統（水+水蒸汽）加熱，使其在壓力維持不變下，體積增為原來的 1.5 倍，則在整個膨脹過程中，系統對外界所做的總功為__(27)__J；又系統所吸收的總熱能為__(28)__J。

【註】：$1\text{atm} = 1.013\times10^{5}$ N/m^2，波茲曼常數 $k = 1.38\times10^{-23}$ J/K

十七、 考慮如圖 9 所示的氣缸，其內以一片隔板分成兩個氣室 A 和 B。左方的 A 氣室內裝有 1 mol 由單原子分子所組成的氣體，右方的 B 氣室內裝有 1 mol 由雙原子分子所組成的氣體。A 氣室的左端面附有活塞，可以施力壓縮或擴張氣室內的氣體體積。整個氣缸對外界絕熱，但氣缸中分隔氣室的隔板，可以傳熱，且可自由地左右移動。現施力使活塞向右壓縮，且壓縮過程足夠緩慢，使氣缸各部分一直保持平衡狀態。觀察此壓縮過程，發現 B 氣室的體積與壓力，滿足下述的關係式：$P_B V_B^a =$ 定值。為決定常數 a 的數值，先考慮使活塞壓縮一個很小距離的過程，若 B 氣室的體積產生一個很小變化量 ΔV_B，則整個氣缸內氣體的總內能的變化量為何？$\Delta U=$ __(29)__（以 a、P_B、V_B、和 ΔV_B 表示之，計算時僅取至 ΔV_B 的一次方項即可）；前已假設整個氣缸對外界絕熱，因此可求得 a 的數值為__(30)__。

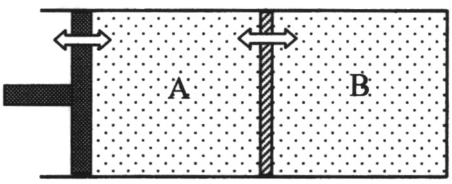


圖 9

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、 如圖 10 所示，一質量為 M 的直角楔型木塊，高度為 h，斜角為 θ，起始時靜止在光滑的水平桌面上，另一質量為 m 的小木塊，置於該楔形木塊斜面的頂端，自靜止開始下滑。假設兩木塊接觸面之間皆光滑，以 g 代表重力加速度，回答下列問題：

(a)在小木塊下滑後，楔形木塊的加速度為何？

(b)小木塊從斜面頂端滑至其底端，所需的時間為何？

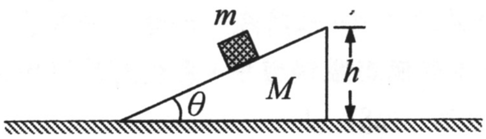


圖 10

二、 早期居家使用的木桶，是以窄木板彼此密接而成，在桶身上以鐵圈箍緊，如圖 11 所示。製作時，先將室溫時的鐵圈（半徑略小於桶身，這時為自然長度，鐵圈上沒有張力）加熱膨脹至可套入桶身，冷縮後即可束緊。已知桶身的半徑 $R = 20.0$ cm，鐵圈恰可套入桶身時的溫度為 90°C，鐵的楊氏係數 $Y = 2.11\times10^{11}$ N/m^2，鐵的線膨脹係數 $\alpha = 11.8\times10^{-6}$ °C^{-1}。在室溫 25°C 時，鐵圈的寬度為 1.0 cm，厚度為 0.10 cm，試求在室溫時，(a)鐵圈上的張力為何？(b)桶身上箍緊處所受的壓力為何？

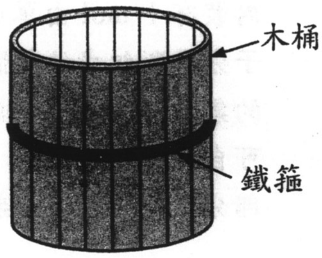


圖 11

【註】：楊氏係數的定義 $\dfrac{F}{A} = Y\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$，式中 $\dfrac{F}{A}$ 稱為應力，為每單位面積所承受的縱向力；$\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$ 稱為應變，為每單位長度的縱向長度變化量。

2010 年第 11 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 41 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、填充題

一、(1) $\underline{7.47\times10^3}$

(2) $\underline{101}$

解：

衛星作圓運動時，所需的向心力來自於地球的吸引力，即

$$\frac{mv^2}{R}=G\frac{mM_E}{R^2} \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{GM_E}{R}}$$

式中衛星的軌道半徑 $R=R_E+h$，h 為衛星離地的高度。設在地表的重力加速度為 g，則

$$mg=G\frac{mM_E}{R_E^2} \quad\Rightarrow\quad g=\frac{GM_E}{R_E^2}$$

利用上式，可得衛星的飛行速率為

$$v=\sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E+h}}=\sqrt{\frac{9.80\times(6400\times10^3)^2}{(6400+800)\times10^3}}=7.47\times10^3\ \text{m/s}$$

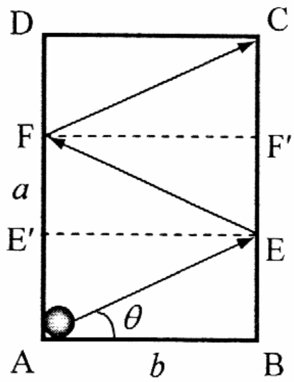
衛星的環繞週期為

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\times(6400+800)\times10^3}{7.47\times10^3}=101\ \text{min}$$

二、(3) $\underline{\dfrac{a}{3b}}$

解：

由於題設球與檯邊的碰撞為完全彈性碰撞，且不計球和檯面之間的摩擦，故球和檯邊碰撞時的入射角和反射角相等。右圖所示為球先後碰撞 BC 邊的 E 點和 AD 邊的 F 點，最後射入 C 處球袋內的路徑圖。由圖上的幾何關係，可知



$$\overline{BE}=\overline{EF'}=\overline{F'C}=\frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \tan\theta=\frac{a}{3b}$$

三、 (4) 0.80

解：

由浮力原理可知：磅秤上的讀數為原先容器的重量和圓柱體所受浮力的和，即

$$磅秤讀數 = W_0 + (A \cdot h) \cdot \rho_{液}$$

式中W_0是原先容器（含液體）的重量（由圖 2b 的縱軸截距，可知約等於 2800 公克重）。圖 2b 的斜率為 80g/cm，故

$$A \cdot \rho_{液} = 80\ \text{g/cm} \quad \Rightarrow \quad \rho_{液} = \frac{80\ \text{g/cm}}{100\ \text{cm}^2} = 0.80\ \text{g/cm}^3$$

四、(5) $e^{2n}h$

(6) $\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

解：

(a)小球第一次落至地面時的瞬時速度為$v_1 = \sqrt{2gh}$，按恢復係數的定義，球和地面碰撞後的反跳速度為$v_1' = ev_1$。小球反跳後，第二次落至地面時的瞬時速度為$v_2 = v_1' = ev_1$，再和地面碰撞後的反跳速度為$v_2' = ev_2 = e^2 v_1$。依此類推，小球在第 n 次碰撞後的反跳速度為$v_n' = e^n v_1$，因此球反跳能到達的最大高度

$$h_n = \frac{v_n'^2}{2g} = \frac{(e^n v_1)^2}{2g} = \frac{e^{2n} \cdot 2gh}{2g} = e^{2n}h$$

(b)小球從起始位置，第一次落至地面所經的時間為 t_1，得

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

從第一次反跳後，再落至地面所經的時間為 t_2，得

$$0 = v_1't_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2v_1'}{g} = \frac{2ev_1}{g} = \frac{2e\sqrt{2gh}}{g} = 2e\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

設小球在第$n-1$次反跳後，再落至地面所經的時間為 t_n，則

$$t_n = \frac{2v_{n-1}'}{g} = \frac{2e^{n-1}v_1}{g} = \frac{2e^{n-1}\sqrt{2gh}}{g} = 2e^{n-1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

六、(9) $\underline{\dfrac{1}{3}}$

解：

設跑車的質量為 m，瞬時速率為 v，則跑車所獲的推力 F 為

$$Fv = P \;\Rightarrow\; m\left(\frac{dv}{dt}\right)v = P \;\Rightarrow\; mv\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = P \;\Rightarrow\; mv^2\frac{dv}{dx} = P$$

$$\Rightarrow\; mv^2dv = Pdx \;\Rightarrow\; \int_0^{v_e} mv^2dv = \int_0^{\ell} Pdx$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3}mv_e^3 = P\ell \;\Rightarrow\; v_e \propto P^{1/3} \;\Rightarrow\; n = \frac{1}{3}$$

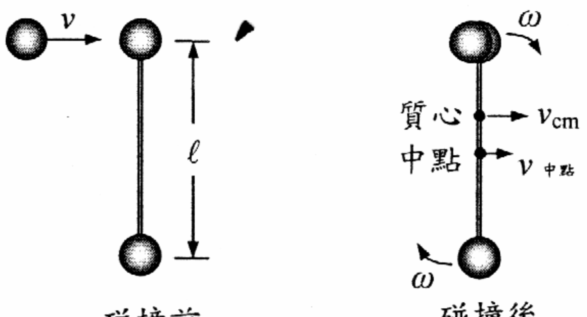
七、(10) $\underline{\dfrac{1}{3}v}$

(11) $\underline{\dfrac{1}{4}v}$

解：

(a)就整個系統（合算三個質點）而言，設碰撞後的系統質心速度為 $v_{質心}$，由於水平桌面光滑，故系統在水平方向所受的外力為零，利用動量守恆定律，可得

$$mv = (3m)v_{質心} \;\Rightarrow\; v_{質心} = \frac{1}{3}v \quad （方向向右）$$



(b)由於兩質點碰撞後，合而為一，故系統的質心位在細桿上，距其兩端各為 $\ell/3$ 與 $2\ell/3$。設碰撞後細桿繞系統質心轉動的角速度為 ω，就系統質心的參考系而言，由於系統所受的合力矩為零，利用角動量守恆定律，可得

$$(mv)\frac{\ell}{3} = (2m)\left(\frac{\ell}{3}\right)^2\omega + m\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 \;\Rightarrow\; \omega = \frac{v}{2\ell}$$

細桿中點和質心之間的距離為 $\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{\ell}{3}=\dfrac{\ell}{6}$，故細桿中點相對於質心的速度為

小球從起始位置落下算起，到能靜止在地面上，所經歷的最短時間為

$$
\begin{aligned}
t &= t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e\sqrt{\frac{2h}{g}} + \cdots + 2e^{n-1}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \cdots \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + 2(e + e^2 + \cdots + e^{n-1} + \cdots)\right] \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + 2\left(\frac{e}{1-e}\right)\right] = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}
\end{aligned}
$$

五、 (7) $\underline{\dfrac{\mu g - a}{\mu a + g}}$

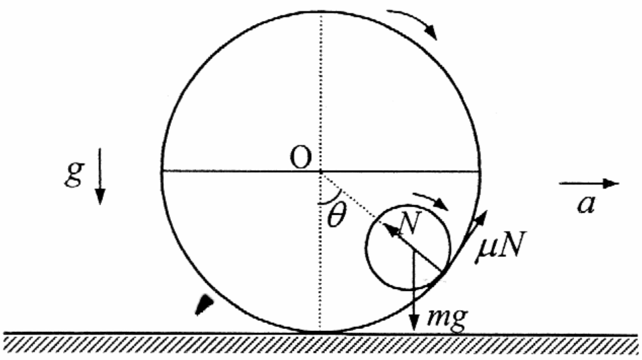
(8) $\underline{m\sqrt{\dfrac{a^2 + g^2}{1 + \mu^2}}}$

解：

小圓筒質心的水平加速度為 a，鉛直加速度為零。設大圓筒作用於小圓筒的正向力為 N，則小圓筒所受的動摩擦力量值為 μN，故小圓筒質心沿水平與鉛直方向之運動方程式分別為

$$ma = \mu N\cos\theta - N\sin\theta \qquad (1)$$

$$mg = \mu N\sin\theta + N\cos\theta \qquad (2)$$



由上兩式消去 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，分別得

$$\mu ma + mg = \left(1 + \mu^2\right)N\cos\theta \qquad (3)$$

$$\mu mg - ma = \left(1 + \mu^2\right)N\sin\theta \qquad (4)$$

將(3)和(4)兩式相除，得

$$\tan\theta = \frac{\mu g - a}{\mu a + g} \qquad (5)$$

將(3)和(4)兩式平方後相加，再求平方根得

$$m\sqrt{(\mu a)^2 + g^2 + (\mu g)^2 + a^2} = (1 + \mu^2)N \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad N = m\sqrt{\frac{a^2 + g^2}{1 + \mu^2}}$$

$$v_{中點-質心} = -\left(\frac{\ell}{6}\right)\omega = -\frac{\ell}{6} \times \frac{v}{2\ell} = -\frac{1}{12}v \quad （方向向左）$$

細桿中點相對於桌面的速度為

$$v_{中點} = v_{中點-質心} + v_{質心} = -\frac{1}{12}v + \frac{1}{3}v = \frac{1}{4}v \quad （方向向右）$$

八、(12) $\underline{\dfrac{v_0}{\sqrt{2C}}}$

(13) $\underline{\dfrac{\pi}{\sqrt{2C}}}$

解：

(a)由於質點位置和原點的距離為 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，故在該空間的位能可改寫為

$$U = mCr^2 \tag{1}$$

由上式可知位能僅和質點距原點的距離有關，和方向無關。質點所受的場力為

$$F = -\frac{dU}{dr} = -(2mC)r \quad （方向指向原點） \tag{2}$$

質點在力場中的加速度為

$$a = \frac{F}{m} = -2Cr$$

此為一變加速度運動（該力場相當於均質球體內部的重力場）。利用上式，可得

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v = -2Cr$$

$$\Rightarrow \quad \int v\,dv = -2C\int r\,dr \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = -Cr^2 + A \tag{3}$$

利用起始條件：當 $r = 0$ ，$v = v_0$ ，將之代入上式，得 $A = \frac{1}{2}v_0^2$ ，即

$$v^2 = v_0^2 - 2Cr^2 \tag{4}$$

【另解】：上式亦可直接利用力學能守恆定律得出：

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2Cr^2$$

當質點到達最遠處時，$v = 0$，代入(4)式，可得

$$0 = v_0^2 - 2Cr_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = \frac{v_0}{\sqrt{2C}}$$

(b)由(2)式可知質點所受的場力，和其位移成正比，故質點的運動為沿著徑向的簡諧運動，其振動週期為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2mC}} = \pi\sqrt{\frac{2}{C}}$$

質點從原點射出，再返回原點所需的時間，等於半週期，即

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{C}} = \frac{\pi}{\sqrt{2C}}$$

九、(14) $\underline{\frac{7}{9}v}$

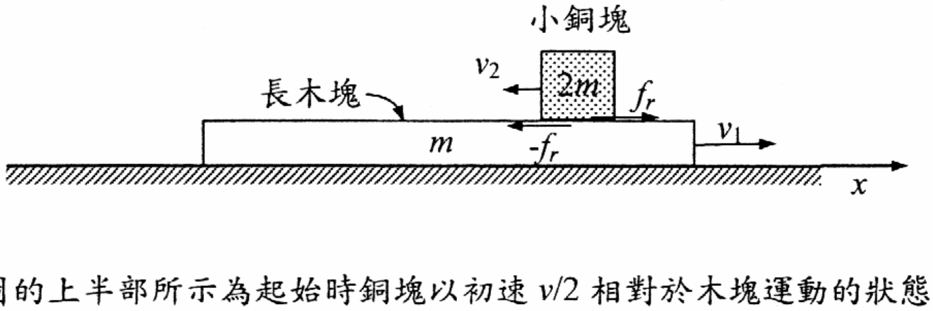
(15) $\underline{\frac{v^2}{54\mu g}}$

解：

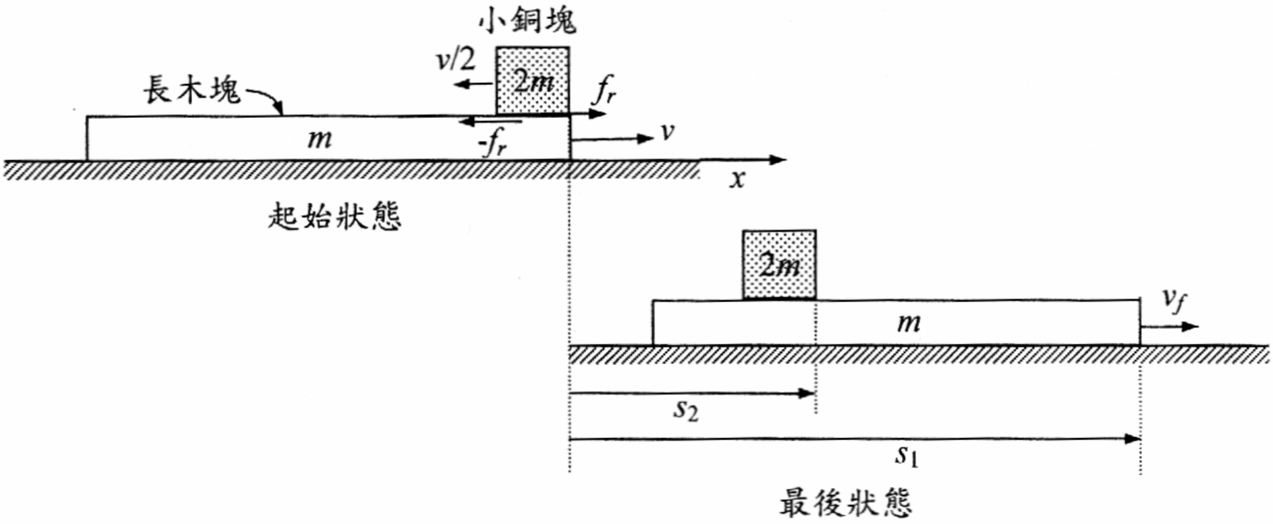
(a)起始時，銅塊相對於桌面的速度為$-\frac{v}{3}$，朝向 $-x$ 方向，故銅塊相對於桌面的初速度為$-\frac{v}{3}+v=\frac{2v}{3}$，朝向$+x$ 方向。由於銅塊和長木塊之間有摩擦力的作用，銅塊相對於木塊的速度將逐漸減小，最後停止在木塊上，這時銅塊和木塊以同一速度 v_f 運動。就銅塊和長木塊構成的系統而言，由於桌面光滑，該系統在水平方向上所受的外力為零，利用動量守恆定律，可得

$$mv + 2m\left(\frac{2v}{3}\right) = (m+2m)v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{7}{9}v \text{ 。}$$

(b)以 f_r 代表銅塊和長木塊之間的摩擦力，銅塊和木塊的受力情形如下圖所示。圖中 v_2 為銅塊相對於木塊的速度，v_1 為木塊相對於桌面的速度，銅塊所受的摩擦力方向向右，木塊所受的摩擦力方向向左。



下圖的上半部所示為起始時銅塊以初速 $v/2$ 相對於木塊運動的狀態；下半部為最後當銅塊停止在木塊時的狀態。相對於固定的桌面而言，銅塊的位移為 s_1，木塊的位移為 s_2。



下面以三種方法分別求解：

【解法一】：取固定的桌面作為參考坐標系

對銅塊而言，銅塊相對於桌面的初速度為$-\dfrac{v}{3}+v=\dfrac{2}{3}v$，朝向$+x$方向，摩擦力$f_r$對銅塊作正功。在最後狀態時，銅塊靜止在木塊上，故銅塊和木塊以相同的速度v_f，相對於桌面運動。利用功能原理，可得

$$f_r s_2=\frac{1}{2}(2m)v_f^2-\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{2v}{3}\right)^2=\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{7v}{9}\right)^2-\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{2v}{3}\right)^2=\frac{13}{81}mv^2$$

對木塊而言，摩擦力f_r對銅塊作負功。同樣利用功能原理，可得

$$-f_r s_1=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{7v}{9}\right)^2-\frac{1}{2}mv^2=-\frac{16}{81}mv^2$$

將上兩式相加，代入$f_r=\mu\times 2mg=2\mu mg$，得

$$f_r(s_2-s_1)=\left(\frac{13}{81}-\frac{16}{81}\right)mv^2 \quad\Rightarrow\quad s_1-s_2=\frac{v^2}{54\mu g}$$

設木塊的長度為L，　為避免銅塊滑出木塊，其條件為

$$s_1-s_2\le L \quad\Rightarrow\quad L\ge\frac{v^2}{54\mu g} \quad\Rightarrow\quad L_{\min}=\frac{v^2}{54\mu g}$$

【解法二】：取木塊的表面作為參考坐標系

設以a_1和a_2分別代表木塊和銅塊相對於桌面的加速度，由牛頓第二運動定律得

$$-f_r=ma_1 \quad\Rightarrow\quad a_1=-\frac{f_r}{m}=-\frac{2\mu mg}{m}=-2\mu g \quad (方向向左)$$

$$f_r=(2m)a_2 \quad\Rightarrow\quad a_2=\frac{f_r}{2m}=\frac{2\mu mg}{2m}=\mu g \quad (方向向右)$$

銅塊相對於木塊的加速度a'為

$$a'=a_2-a_1=\mu g-(-2\mu g)=3\mu g \quad (方向向右)$$

銅塊相對於木塊的初速度為$-\dfrac{v}{3}$（方向向左），利用等加速度運動公式，可得銅塊在木塊上靜止之前，所行的位移s'為

$$0=\left(-\frac{v}{3}\right)^2+2a's' \quad\Rightarrow\quad s'=-\frac{v^2}{18a'}=-\frac{v^2}{18(3\mu g)}=-\frac{v^2}{54\mu g}$$

設木塊的長度為L，　為避免銅塊滑出木塊，其條件為

$$|s'|\le L \quad\Rightarrow\quad L\ge\frac{v^2}{54\mu g} \quad\Rightarrow\quad L_{\min}=\frac{v^2}{54\mu g}$$

【解法二】：利用約化質量（reduced mass）

將本題兩物體之間的相對運動，轉換為單一物體的運動，其約化質量m'為

$$\frac{1}{m'}=\frac{1}{m}+\frac{1}{2m} \quad\Rightarrow\quad m'=\frac{2}{3}m$$

就銅塊相對於木塊的運動而言，其初速度為$-\dfrac{v}{3}$（方向向左），末速度為零，摩擦力f_r對銅塊作負功。利用功能原理，可得

$$-f_r|s'|=0-\frac{1}{2}m'\left(-\frac{v}{3}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad |s'|=\frac{m'v^2}{18f_r}=\frac{(2/3)mv^2}{18\times 2\mu mg}=\frac{v^2}{54\mu g}$$

設木塊的長度為L，　為避免銅塊滑出木塊，其條件為

$$|s'|\le L \quad\Rightarrow\quad L\ge\frac{v^2}{54\mu g} \quad\Rightarrow\quad L_{\min}=\frac{v^2}{54\mu g}$$

十、(16) $\underline{\dfrac{R_E\omega^2\sin 2\theta}{2g}}$

(17) $\underline{0.10^\circ}$

解：

【解法一】：取固定於地球表面的參考坐標系（加速參考系）

(a)從地球表面的觀察者來看，鉛錘在靜止時受到三個力的作用，如下圖所示：T為細繩的張力，F為鉛錘的離心力，mg為鉛錘的重力。此三力構成靜力平衡，可得

$$\begin{cases} T\cos\delta+F\cos\theta=mg \\ T\sin\delta=F\sin\theta \end{cases}$$

式中$F=mr\omega^2=m(R_E\cos\theta)\omega^2=mR_E\omega^2\cos\theta$。由上兩式中消去$T$，可得

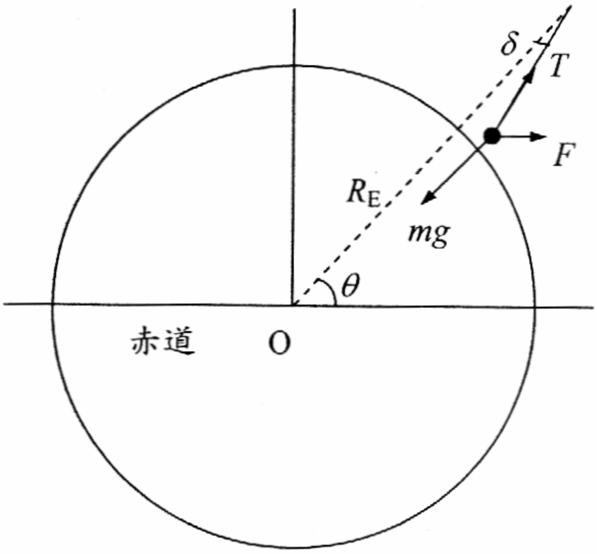
$$\tan\delta=\frac{F\sin\theta}{mg-F\cos\theta}=\frac{R_E\omega^2\sin\theta\cos\theta}{g-R_E\omega^2\cos^2\theta}=\frac{R_E\omega^2\sin 2\theta}{2(g-R_E\omega^2\cos^2\theta)}$$

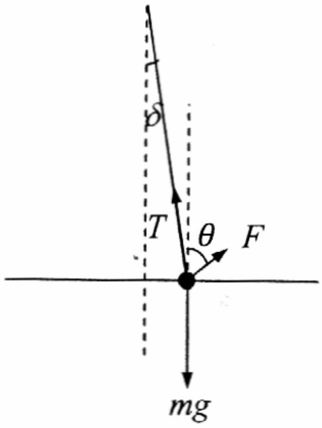
比較 F 和 mg 的量值，得

$$\frac{F}{mg}=\frac{R_E\omega^2\cos\theta}{g}<\frac{R_E\omega^2}{g}=\frac{6400\times10^3}{9.8}\times\left(\frac{2\pi}{24\times60\times60}\right)^2=3.5\times10^{-3}$$

由上值可知 $F<<mg$，故偏離角 δ 很小，$\tan\delta\approx\delta$，得

$$\delta\approx\frac{F\sin\theta}{mg}=\frac{R_E\omega^2\sin 2\theta}{2g}$$





(b)當 $\theta=45^\circ$ 時，偏離角 δ 有最大值，即

$$\delta_{\max}=\frac{R_E\omega^2}{2g}=\frac{6400\times10^3}{2\times9.8}\times\left(\frac{2\pi}{24\times60\times60}\right)^2=1.7\times10^{-3}\ \text{rad}=0.10^\circ$$

【解法二】：取固定於地球中心的參考坐標系（慣性參考系）

從慣性參考系的觀察者來看，鉛錘隨者地球的自轉，繞著地球的自轉軸作半徑為 $R_E\cos\theta$ 的圓運動，所需的向心力 F 來自於細繩張力 T 和重力 mg 的合力，如下圖所示。從圖上三力的幾何關係，利用正弦定律，可得

$$\frac{F}{\sin\delta}=\frac{mg}{\sin\left[\pi-(\theta+\delta)\right]}=\frac{T}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}T\sin\delta=F\sin\theta\\T\sin(\theta+\delta)=mg\sin\theta\end{cases}$$

由上兩式中消去 T，得

$$mg\sin\delta=F\sin(\theta+\delta)$$

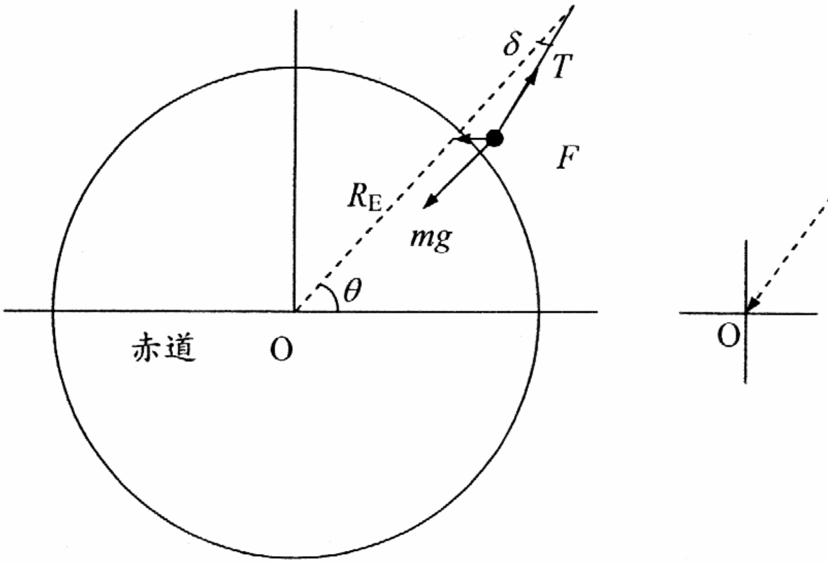
$$\Rightarrow\quad mg\sin\delta=F(\sin\theta\cos\delta+\cos\theta\sin\delta)$$

$$\Rightarrow\quad \tan\delta=\frac{F\sin\theta}{mg-F\cos\theta}=\frac{R_E\omega^2\sin\theta\cos\theta}{g-R_E\omega^2\cos^2\theta}=\frac{R_E\omega^2\sin 2\theta}{2(g-R_E\omega^2\cos^2\theta)}$$

由前述可知$F << mg$，故偏離角δ很小，上式可近似為

$$\delta \approx \frac{R_E \omega^2 \sin 2\theta}{2g}$$

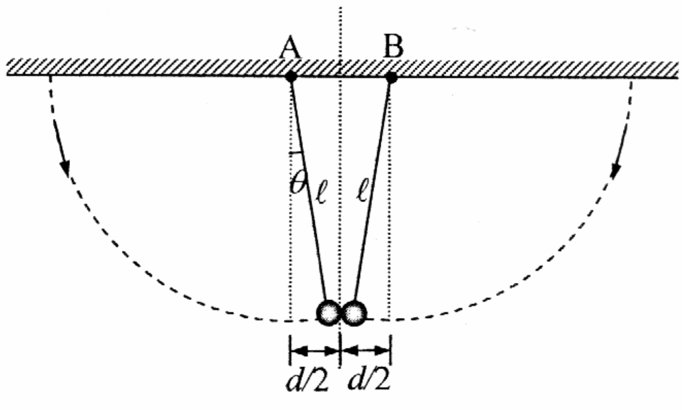
結果和解法一所得者相同。



十一、 (18) $\underline{\ell\left[1-\left(\dfrac{d}{2\ell}\right)^2\right]^{3/2}}$

解：

參看右圖，取懸點處的水平面為重力位能的零點，設兩擺錘碰撞前瞬間的速度為v，則由力學能守恆定律得



$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\sqrt{\ell^2-(d/2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v = \left(2g\ell\sqrt{1-(d/2\ell)^2}\right)^{1/2}$$

該速度沿鉛直方向的分量為

$$v_\perp = v\sin\theta = v\left(\frac{d}{2\ell}\right)$$

兩擺錘在碰撞後，在水平方向的動量分量彼此抵銷；在鉛直方向的動量分量則相加。因此兩擺錘共同以速度$v_\perp$，沿$\overline{AB}$的中垂線上升。設兩者能上升的最大高度為h，則由力學能守恆定律得

$$\frac{1}{2}(2m)v_{\perp}^2 = (2m)gh$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{v_{\perp}^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2 = \ell\sqrt{1-(d/2\ell)^2}\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2$$

當兩擺錘上升至最高點時，其與天花板之間的鉛直距離為

$$H = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} - h = \ell\sqrt{1-\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2} - \ell\sqrt{1-\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2}\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2 = \ell\left[1-\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2\right]^{3/2}$$

十二、 (19) $\underline{P_{atm}\left(\frac{h'}{L-h'}\right)}$

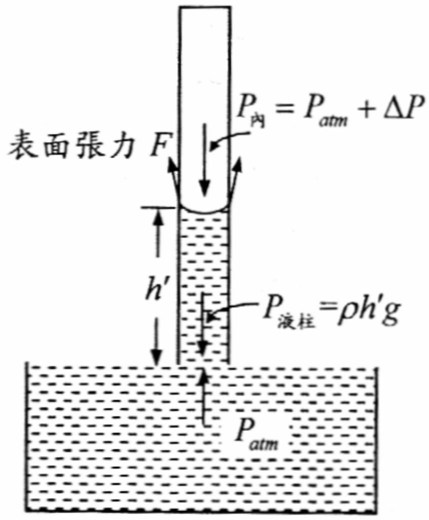
(20) <u>0.925</u>

解：

設玻璃管的內半徑為r，當玻璃管上端開口，底端稍微觸及水面時，管內的水柱高度$h = 20.0$ mm ，這時管內在水柱上、下方所受的氣體壓力皆等於大氣壓力P_{atm}，而水柱的重量是由表面張力所導致的向上拉力 F 所平衡，即

$$F = \rho\pi r^2 hg \qquad (1)$$

式中ρ為水的密度。



若先將管的上端開口封閉，然後使管下端稍微觸及水面，管內上升的水柱高度變為h'，因此管內原先的空氣柱長度L，被壓縮為$L-h'$。利用波以耳定律，可得

$$P_{atm}(L\pi r^2) = (P_{atm} + \Delta P)(L-h')\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = P_{atm}\left(\frac{h'}{L-h'}\right) \qquad (2)$$

右圖所示為管內液柱的受力情形，由靜液平衡的條件可得

$$\rho\pi r^2 h' g + (P_{atm} + \Delta P)\pi r^2 = P_{atm}\pi r^2 + F$$

$$\Rightarrow \quad \rho\pi r^2 h' g + (\Delta P)\pi r^2 = F \qquad (3)$$

將(1)和(2)兩式代入(3)式，得

$$\rho\pi r^2 h' g + P_{atm}\left(\frac{h'}{L-h'}\right)\pi r^2 = \rho\pi r^2 hg$$

$$\Rightarrow \quad \rho h' g + P_{atm}\frac{h'}{L} \approx \rho h g$$

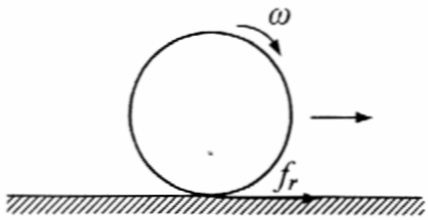
$$\Rightarrow \quad h' \approx h\left(1+\frac{P_{atm}}{\rho L g}\right)^{-1} = 20.0\times\left(1+\frac{1.01\times10^{5}}{1.00\times10^{3}\times0.500\times9.80}\right)^{-1} = 0.925\text{ mm}$$

十三、 (21) $\underline{\dfrac{p_0}{2\mu_k mg}}$

(22) $\underline{-\dfrac{p_0^2}{4m}}$

解：

(a)圓筒受到沿鉛直方向的衝量 p_0 後，其相對於圓筒質心的衝量矩為 p_0R（順時針方向），因此圓筒獲得的起始角動量為 $I\omega_0 = p_0R$，式中 $I = mR^2$ 為圓筒繞其中心軸的轉動慣量。之後，圓筒開始向右運動，由於有滑動，故圓筒受到向右的動摩擦力 $f_r = \mu_k mg$，使圓筒向右作等加速度運動，如右圖所示。此摩擦力相對於圓筒中心軸所生的逆時針力矩，使圓筒的角速度減小。



圓筒質心的初速為零，在時刻 t 的速度為

$$v(t) = at = \left(\frac{f_r}{m}\right)t = \left(\frac{\mu_k mg}{m}\right)t = \mu_k gt \tag{1}$$

圓筒的起始角速度為

$$\omega_0 = \frac{p_0R}{I} = \frac{p_0R}{mR^2} = \frac{p_0}{mR} \tag{2}$$

圓筒在在時刻 t 的角速度為

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \left(\frac{Rf_r}{I}\right)t = \frac{p_0}{mR} - \left(\frac{R\mu_k mg}{mR^2}\right)t = \frac{p_0}{mR} - \left(\frac{\mu_k g}{R}\right)t \tag{3}$$

當 $v(t) = R\omega(t)$ 時，圓筒開始純滾動，不再滑動，摩擦力為零，即

$$\mu_k gt = R\left[\frac{p_0}{mR} - \left(\frac{\mu_k g}{R}\right)t\right] \quad \Rightarrow \quad t = \frac{p_0}{2\mu_k mg}$$

圓筒進行加速度運動，持續的時間為 $t = \dfrac{p_0}{2\mu_k mg}$ 。

(b)當圓筒開始純滾動時，圓筒的平移速度和轉動角速度分別為

$$v(t) = \mu_k g \times \frac{p_0}{2\mu_k mg} = \frac{p_0}{2m} \tag{4}$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{p_0}{2mR} \tag{5}$$

在純滾動開始後，圓筒的平移速度和角速度維持不變，因此圓筒的最後動能為

$$E_{末}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{p_0}{2m}\right)^2+\frac{1}{2}\left(mR^2\right)\left(\frac{p_0}{2mR}\right)^2=\frac{p_0^2}{4m} \tag{6}$$

圓筒的起始動能為

$$E_{初}=\frac{1}{2}I\omega_0^2=\frac{1}{2}\left(mR^2\right)\times\left(\frac{p_0}{mR}\right)^2=\frac{p_0^2}{2m} \tag{7}$$

由(6)和(7)兩式得

$$\Delta E=E_{末}-E_{初}=\frac{p_0^2}{4m}-\frac{p_0^2}{2m}=-\frac{p_0^2}{4m}$$

十四、 (23) <u>1.01</u>　或　<u>1</u>

(24) <u>1.96</u>　或　<u>2</u>

解：

銅的定壓莫耳比熱$C_p(\mathrm{Cu})=\dfrac{386}{(1000/63.54)}\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}=24.5\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$

鋁的定壓莫耳比熱$C_p(\mathrm{Al})=\dfrac{900}{(1000/26.98)}\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}=24.3\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$

銅和鋁的定壓莫耳比熱的比值為$\dfrac{C_p(\mathrm{Cu})}{C_p(\mathrm{Al})}=\dfrac{24.5}{24.3}=1.01\approx 1$

氦的定容比熱$C_V=\dfrac{3}{2}N_Ak=\dfrac{3}{2}\times 6.02\times 10^{23}\times 1.38\times 10^{-23}\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}=12.5\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$

銅和氦的定容莫耳比熱的比值為$\dfrac{C_V(\mathrm{Cu})}{C_V(\mathrm{He})}=\dfrac{C_P(\mathrm{Cu})}{C_V(\mathrm{He})}=\dfrac{24.5}{12.5}=1.96\approx 2$

十五、 (25) $\underline{\dfrac{p_o}{4}\left(\dfrac{a^3+b^3-c^3}{c^2-a^2-b^2}\right)}$

(26) $\underline{8\pi\left(c^2-a^2-b^2\right)S}$

解：

當絕對溫度為 T 時，就半徑為 a 的肥皂泡而言，設球泡內氣體的莫耳數為 n_a、壓力為 p_a、體積為 V_a，則依據理想氣體方程式，可得

$$p_aV_a=n_aRT \tag{1}$$

同理，就半徑為 a 和 b 的兩肥皂泡而言，分別可得

$$p_bV_b=n_bRT\ ,\qquad p_cV_c=\left(n_a+n_b\right)RT \tag{2}$$

以 S 代表肥皂泡液的表面張力，p_0 為球泡外的大氣壓力，則球泡內的氣體壓力為

$$p_a = p_0 + \frac{4S}{a} ,\quad p_b = p_0 + \frac{4S}{b} ,\quad p_c = p_0 + \frac{4S}{c} \tag{3}$$

利用以上三式，可得

$$p_c V_c = (n_a + n_b) RT = p_a V_a + p_b V_b = \left(p_0 + \frac{4S}{a} \right) V_a + \left(p_0 + \frac{4S}{b} \right) V_b$$

$$= p_0 (V_a + V_b) + 4S \left(\frac{V_a}{a} + \frac{V_b}{b} \right)$$

$$= p_0 V_c + 4S \frac{V_c}{c} \tag{4}$$

上式經移項整理後，可得

$$p_0 (V_a + V_b - V_c) = 4S \left(\frac{V_c}{c} - \frac{V_a}{a} - \frac{V_b}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \quad p_0 \frac{4\pi}{3} (a^3 + b^3 - c^3) = 4S \times \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c^3}{c} - \frac{a^3}{a} - \frac{b^3}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \quad p_0 (a^3 + b^3 - c^3) = 4S (c^2 - a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{p_o}{4} \left(\frac{a^3 + b^3 - c^3}{c^2 - a^2 - b^2} \right) \tag{5}$$

液體的表面張力代表液面上每單位面積所儲存的位能，因球形肥皂泡有內外兩層液面，故在兩球泡合併的過程中，球泡內外的氣體對球泡所作的功 W，等於液面位能的增加量，即

$$W = 2 \times (4\pi c^2) S - 2 \times (4\pi a^2) S - 2 \times (4\pi b^2) S = 8\pi (c^2 - a^2 - b^2) S \tag{6}$$

十六、 (27) $\underline{2.6 \times 10^2}$

(28) $\underline{3.38 \times 10^3}$

解：

(a)水蒸汽在 100°C 時的蒸汽壓為 1atm，利用理想氣體方程式，可得唧筒在加熱膨脹前的蒸汽體積為

$$V_1 = \frac{NkT}{P} = \frac{\left(\frac{3.0}{18} \times 6.02 \times 10^{23} \right) \times 1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 100)}{1.013 \times 10^5} = 5.1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

題設唧筒在加熱膨脹過程中，壓力維持不變，即 $p = 1$ atm ，系統對外界所作的總功為

$$W = P(V_2 - V_1) = P(1.5V_1 - V_1) = 1.013 \times 10^5 \times (0.5 \times 5.1 \times 10^{-3}) = 2.6 \times 10^2\ \mathrm{J}$$

(b)由於唧筒在加熱過程中，壓力維持不變，故其內的水蒸汽溫度保持為 100°C。唧筒加熱前的氣體體積 V_1，為 3.0g 的水蒸汽所佔有；加熱後，唧筒內的氣體體積增為原來的 1.5 倍，即有 1.5 克的水轉變為水蒸汽，因此系統所吸收的總熱能為

$$Q = 1.5 \times 539 \text{ cal} = 3.38 \times 10^3 \text{ J}$$

十七、 (29) $\underline{4(1-a)P_B \Delta V_B}$

(30) $\underline{\dfrac{3}{2}}$

解：

(a)因為兩氣室內的氣體處於力平衡，所以壓力相等，設為 P；由於中間隔板導熱，故兩者亦處於熱平衡，因此溫度相等，設為 T；又兩氣室內的氣體莫耳數亦相等，由理想氣體方程式可知兩者的體積亦相等，設為 V。當氣體被壓縮時，亦伴隨有溫度的變化，故氣缸內氣體總內能的變化量為

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T + \frac{5}{2}nR\Delta T = 4nR\Delta T \tag{1}$$

利用理想氣體方程式 $PV = nRT$ ，可得

$$P\Delta V + V\Delta P = nR\Delta T \tag{2}$$

將(2)式代入(1)式，得

$$\Delta U = 4(P\Delta V + V\Delta P) \tag{3}$$

由題設 $PV^a =$ 定值，得

$$(P+\Delta P)\times(V+\Delta V)^a - PV^a = 0$$

利用二項式展開，僅保留至 $\Delta V / V$ 的一次方項，可得

$$P\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)\times V^a\left(1+\frac{a\Delta V}{V}\right) - PV^a \approx 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} = -a\frac{\Delta V}{V} \tag{4}$$

由(3)和(4)兩式，可得

$$\Delta U = 4(1-a)P\Delta V \tag{5}$$

由於 $P_A = P_B = P$ ，$V_A = V_B = V$ ，$T_A = T_B = T$ ，上式亦可寫為

$$\Delta U = 4(1-a)P_A\Delta V_A = 4(1-a)P_B\Delta V_B$$

(b) 因為整個氣缸對外界絕熱，進出氣缸的熱量 $Q = 0$，根據熱力學第一定律 $\Delta U = Q - W$ ，可得

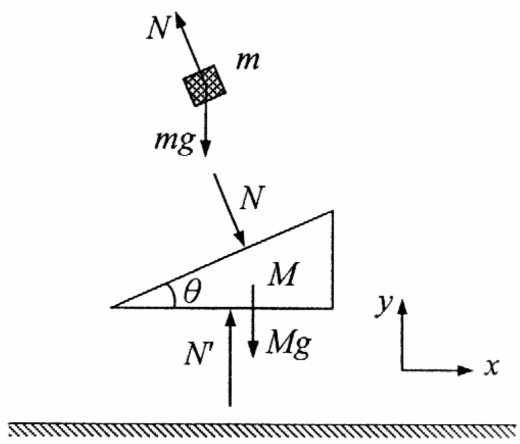
$$\Delta U + W = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(1-a)P\Delta V + 2P\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}$$

貳、計算題

一、解：

(a)【解法一】：利用力圖分析，取桌面作為參考系（慣性參考系）

兩木塊的受力情形，如右圖所示。設小木塊的加速度沿 x 和 y 方向的分量，分別為 a_{1x} 和 a_{1y}；楔形木塊在水平桌面上的加速度為 a_2，沿 x 方向運動，利用牛頓運動定律，可得



$$-N\sin\theta = ma_{1x} \tag{1}$$

$$N\cos\theta - mg = ma_{1y} \tag{2}$$

$$N\sin\theta = Ma_2 \tag{3}$$

在 x 方向上，小木塊相對於楔形木塊的加速度為 $a_{1x}-a_2$。由於小木塊緊貼在楔形木塊的斜面上滑行，故

$$\tan\theta = \frac{a_{1y}}{a_{1x}-a_2} \tag{4}$$

由(1)和(3)兩式得

$$a_{1x} = -\frac{M}{m}a_2 \tag{5}$$

由(1)和(2)兩式中消去 N，得

$$a_{1x}\cos\theta + (g+a_{1y})\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{1y} = -\frac{a_{1x}\cos\theta + g\sin\theta}{\sin\theta} \tag{6}$$

將(5)式代入上式，得

$$a_{1y} = \frac{Ma_2\cos\theta - mg\sin\theta}{m\sin\theta} \tag{7}$$

將(5)和(7)兩式代入(4)式，得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{Ma_2\cos\theta - mg\sin\theta}{m\sin\theta}}{-\dfrac{M}{m}a_2 - a_2} = \frac{-Ma_2\cos\theta + mg\sin\theta}{(M+m)\sin\theta a_2}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{8}$$

【解法二】：利用動量和能量守恆定律

設小木塊沿 x 和 y 方向的速度分量分別為 u_x 和 u_y，楔形木塊在水平桌面上的速度為 v，沿 $+x$ 方向運動，由於在 x 方向上，兩木塊系統不受力，故在水平方向的動量守恆，得

$$mu_x + Mv = 0 \tag{9}$$

題設兩木塊和桌面皆光滑，故兩木塊系統的力學能守恆，設小木塊質心的離桌面的高度為 y，得

$$\frac{1}{2}m(u_x^2+u_y^2)+\frac{1}{2}Mv^2+mgy=mgh \tag{10}$$

由於小木塊緊貼在楔形木塊的斜面上滑行，故

$$\tan\theta=\frac{u_y}{u_x-v} \tag{11}$$

將(10)式對時間 t 微分，得

$$m\left(u_x\dot{u}_x+u_y\dot{u}_y\right)+Mv\dot{v}+mgu_y=0 \tag{12}$$

利用(11)式，可得

$$u_y=(u_x-v)\tan\theta \tag{13}$$

$$\dot{u}_y=(\dot{u}_x-\dot{v})\tan\theta \tag{14}$$

將(13)和(14)兩式代入(12)式，得

$$m\left[u_x\dot{u}_x+(u_x-v)(\dot{u}_x-\dot{v})\tan^2\theta\right]+Mv\dot{v}+mg(u_x-v)\tan\theta=0$$

$$\Rightarrow\quad m\left[1+\left(1-\frac{v}{u_x}\right)\left(1-\frac{\dot{v}}{\dot{u}_x}\right)\tan^2\theta\right]+M\frac{v}{u_x}\frac{\dot{v}}{\dot{u}_x}+mg\left(1-\frac{v}{u_x}\right)\frac{1}{\dot{u}_x}\tan\theta=0 \tag{15}$$

由(9)式可得

$$\frac{v}{u_x}=-\frac{m}{M}\qquad\qquad \frac{\dot{v}}{\dot{u}_x}=-\frac{m}{M} \tag{16}$$

將(16)式代入(15)式，得

$$m\left[1+\left(1+\frac{m}{M}\right)^2\tan^2\theta\right]+M\left(\frac{m}{M}\right)^2+mg\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{1}{\dot{u}_x}\tan\theta=0$$

$$\Rightarrow\quad \left(1+\frac{m}{M}\right)^2\tan^2\theta+m\left(1+\frac{m}{M}\right)+mg\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{1}{\dot{u}_x}\tan\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{m}{M}\right)\tan^2\theta+1+\frac{g\tan\theta}{\dot{u}_x}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_x}{dt}=\dot{u}_x=-\frac{Mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{17}$$

將(17)式代入(16)式，得楔形木塊的加速度為

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{m}{M}\frac{du_x}{dt}=\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{18}$$

此和(8)式所得相同。

(b)小木塊沿楔形木塊的斜面滑下時，其在 y 方向上的下降加速度分量為 a_{1y}。利用(4)式可得

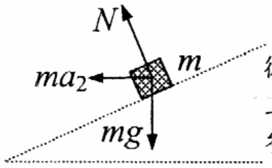
$$a_{1y}=(a_{1x}-a_2)\tan\theta=-\left(\frac{M}{m}+1\right)a_2\tan\theta=-\frac{(M+m)g\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{19}$$

利用等加速度運動公式，可得小木塊從斜面頂端滑至其底端，所需的時間為

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a_{1y}}}=\sqrt{\frac{2h(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)g\sin^2\theta}} \tag{20}$$

【解法三】：取楔形木塊的斜面作為參考系（加速參考系）

(a)從楔形木塊斜面上的觀察者（加速參考系）來看，小木塊受有假力 ma_2 的作用（方向向左），其受力情形如右圖所示。由於小木塊沿著斜面滑下，故小木塊在垂直斜面的方向上，所受的合力為零，即



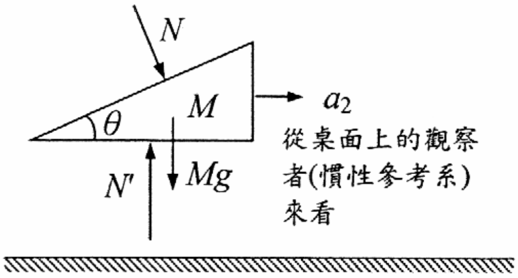
從楔形木塊斜面上的觀察者(加速參考系)來看

$$N+ma_2\sin\theta=mg\cos\theta \tag{21}$$

設小木塊沿斜面滑下的加速度為 a_1'（相對於斜面），其運動方程式為

$$ma_1'=ma_2\cos\theta+mg\sin\theta \tag{22}$$

另從桌面上的觀察者（慣性參考系）來看，從右圖所示的楔形木塊受力情形，可得



從桌面上的觀察者(慣性參考系)來看

$$Ma_2=N\sin\theta \tag{23}$$

由(21)和(22)兩式消去 N，可解得

$$a_2=\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{24}$$

(b)將上式代入(22)式，可解得

$$a_1'=\left(\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}\right)\cos\theta+g\sin\theta=\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{25}$$

小木塊從斜面頂端滑至其底端，所需的時間 t 為

$$s=\frac{1}{2}a_1't^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}\right]t^2$$

$$\Rightarrow \quad t=\sqrt{\frac{2h(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)g\sin^2\theta}}$$

二、解：

(a)利用線膨脹公式 $\ell=\ell_0(1+\alpha\Delta T)$，可得鐵圈的長度應變為

$$\frac{\Delta\ell}{\ell}=\alpha\Delta T \tag{1}$$

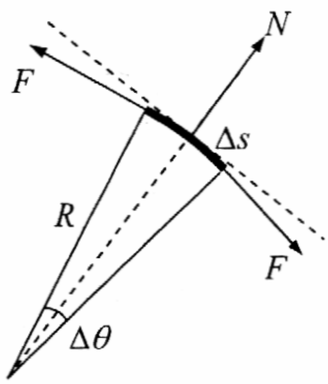
按題設鐵圈在 $90^\circ\mathrm{C}$ 時，其半徑恰和桶身相等。當鐵圈冷卻至室溫 $25^\circ\mathrm{C}$ 時，其半徑縮小，但因桶身的限制，鐵圈的半徑被撐大至與桶身同大，故鐵圈上呈現有被拉長的張力。設鐵圈上的張力為 F，按楊氏系數的定義 $\frac{F}{A}=Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$，利用(1)式，可得

$$\frac{F}{A}=Y\alpha\Delta T \quad \Rightarrow \quad F=AY\alpha\Delta T \tag{2}$$

式中 A 為鐵圈本身的截面積。將已知的數據代入上式，得

$$\begin{aligned} F &= (0.10\mathrm{cm}\times1.0\mathrm{cm})\times2.11\times10^{11}\mathrm{N/m^2}\times11.8\times10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}\times(90-25)^\circ\mathrm{C} \\ &= 1.6\times10^3\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{3}$$

(b)在鐵圈上取一長度為 Δs 的極小段，該段鐵圈上的受力情形如右圖所示，圖中 N 為鐵圈所受的正向力。由靜力平衡的條件可得



$$2F\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)=N \quad \Rightarrow \quad F\Delta\theta\approx N \tag{4}$$

桶身上所受的壓力為

$$\begin{aligned} P &= \frac{N}{\Delta a}=\frac{N}{w\Delta s}=\frac{F\Delta\theta}{wR\Delta\theta}=\frac{F}{wR} \\ &= \frac{1.6\times10^3\ \mathrm{N}}{1.0\times10^{-2}\mathrm{m}\times20\times10^{-2}\mathrm{m}} \\ &= 8\times10^5\mathrm{N/m^2} \end{aligned} \tag{5}$$