2011年第12屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第42屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2010年11月13日
13:30~16:30
考試時間：三小時

＜＜注意事項＞＞

1、 本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
2、 填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、 計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
4、 可使用掌上型計算器。

2011 年第 12 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 42 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、如圖 1 所示，一圓盤以固定的頻率 $f=10\text{ Hz}$，沿順時針方向轉動。在圓盤上靠近邊緣處標記有一個紅點，現將圓盤置於暗室內，以頻閃儀照射該圓盤。當頻閃儀的閃光頻率為 12Hz 時，所見該紅點的轉動視頻率為__(1)__Hz，其轉動方向為__(2)__(填入順時針或逆時針)。

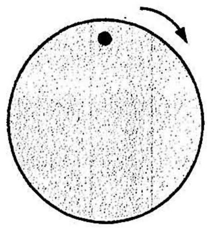


圖 1

二、如圖 2 所示，欲利用油壓起重機，抬高一質量為 1200 kg 的重物。已知 U 型油壓機內充滿密度為 800 kg/m^3、不可壓縮的油；右槽內活塞的半徑為 20.0 cm；左槽內活塞的半徑為 5.00 cm。起始時，兩活塞的位置等高，此時施加於左槽內活塞上的力 F 為__(3)__N。當重物被升高 1.00m 靜止後，施加在左槽內活塞上的力應為__(4)__N。

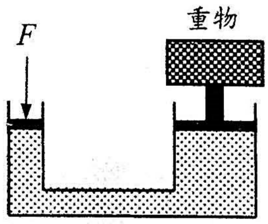
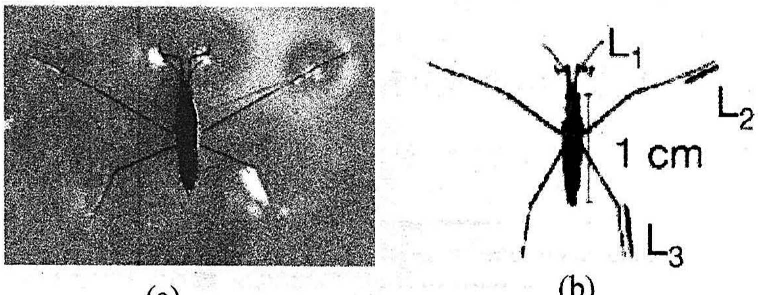


圖 2

三、水黽有三對腳，腳上長著濃密的油質纖毛，不會被水濡濕，因此藉由表面張力的作用，可在水面上停留或行走，如下圖 3(a)所示。它的前腳、中腳、和後腳，每一隻腳和水面接觸的長度各為 L_1、L_2、和 L_3，如圖 3(b)所示。若以 γ 表示水和空氣之間的表面張力，則水黽因表面張力的作用，所獲向上支撐力的最大值 F_S 為何？$F_S=$__(5)__ (以已給量表示之)。若就尺度比例而言，設以 W 表示水黽的體重，則 F_S 和 W 之間的關係式可寫為 $F_S \propto W^n$，式中的 $n=$__(6)__。



(a) (b)

圖 3

四、 本題討論慣性質量與重力質量的差異。假設重力質量和慣性質量的比值對所有物質而言，並非常數，因此無法令兩者恆等。現設有兩種不同物質 A 與 B 所構成的質點，質點 A 的慣性質量與重力質量分別為 m_{AI} 與 m_{AG}；而質點 B 的慣性質量與重力質量分別為 m_{BI} 與 m_{BG}。若將兩質點分別以長度同為 L 的輕繩懸掛成單擺，並使其作小角度擺動，則質點 A 與質點 B 的週期比為__(7)__。

五、 一熱水瓶的電熱功率為 700W，接通電源後，可在兩分鐘內，將瓶內的水溫從 90°C 加熱至 95°C。接著將電源關閉一分鐘後，水溫下降至 94°C。按上述的數據估算瓶內的水量約為__(8)__kg。(水的比熱為 $4.2\times10^3\,\mathrm{J/kg}$)

六、 已知湖面上的空氣溫度為 −10°C，湖中的水溫為 0°C，湖面已結有一層厚度為 2.0cm 的薄冰，假設僅考慮熱傳導的效應，則此薄冰層的厚度增加率約為__(9)__（公分/小時）。

[註]：水和冰的熱導率各為 $0.58\,\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ 和 $2.2\,\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$；水和冰的密度各為 $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ 與 $920\,\mathrm{kg/m^3}$；冰的熔化熱為 $3.3\times10^5\,\mathrm{J/kg}$。

七、 有一器壁絕熱的圓柱形汽缸，附有一質量為 m，截面積為 A，可自由運動的絕熱活塞。活塞和汽缸器壁之間的摩擦可以忽略不計。起始時，汽缸內充有溫度為 T 的 1 莫耳單原子理想氣體。汽缸外的空氣壓力為一大氣壓 P_0。又汽缸內部裝有電熱線用以加熱氣體。以 g 代表重力加速度，R 為氣體常數，回答下列各小題：

(a)若汽缸為水平置放，利用電熱線加熱，使氣體的溫度緩慢地增加至 $T+\Delta T$，則經由電熱線加入氣體的熱量為__(10)__。

(b)若汽缸改為鉛直置放，且活塞向上，利用電熱線加熱，使氣體的溫度緩慢地增加至 $T+\Delta T$，則經由電熱線加入氣體的熱量為__(11)__。

(c)以 x 代表在(a)小題中活塞移動的距離；以 y 代表在(b)小題中活塞移動的距離，則兩者的比值 $\dfrac{x}{y}=$__(12)__。

八、 如圖 4 所示，一支水槍的槍管長為 L，管內的截面積為 A，但槍口射出端的截面積為 a。槍管內裝滿水之後，在底端以等速率 v 推動活塞將水壓出槍口，試問此水槍的最大射程為何？__(13)__ (以已知量表示之)。

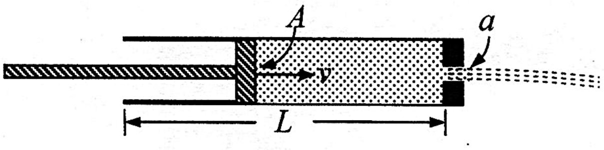


圖 4

九、 如圖 5 所示，一圓柱形容器內裝有密度為 ρ_0 的液體，液面高度為 H。該容器底部的中心處有一直徑為 $2r$ 的圓洞，現以一塞子塞住此圓洞，以防止液體外流。為有效阻止液體外流，該塞子由兩個同軸、同高度（$h=H/4$），但半徑各為 $2r$ 和 r 的實心圓柱串連而成。已知塞子的密度為 ρ，重力加速度為 g，若大氣壓力可不計，則塞子所受的液體浮力為 ___(14)___（以已知量表示之）。

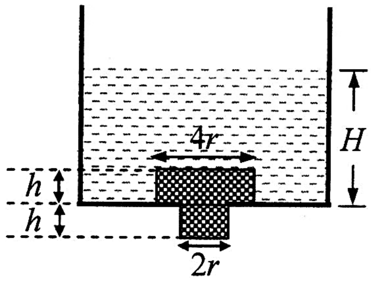


圖 5

十、 一質量為 m 的行星起初在半徑為 r 的圓形軌道上，環繞一質量為 M 的恆星轉動。今在遠處有一質量同為 m、但速率為 v 的殞石，朝向該行星系統射來。經一段時間後，此行星和殞石皆以正圓軌道，環繞該恆星轉動，且殞石的軌道半徑為 $2r$。若行星和隕石之間的交互作用力可忽略，以 G 表示萬有引力常數，求最後該行星環繞恆星轉動的速率為 ___(15)___（以已知量表示之）。

十一、 如圖 6 所示，某一半徑為 R 的行星有一離地高度亦為 R 的衛星 A，以速率 v 環繞該行星轉動。假設行星本身沒有自轉，今在該行星表面上沿水平方向發射一枚火箭 B，欲與衛星 A 會合。若火箭發射後，即不再具有動力，則火箭 B 在發射時的速率 v' 的最小值需為 ___(16)___。

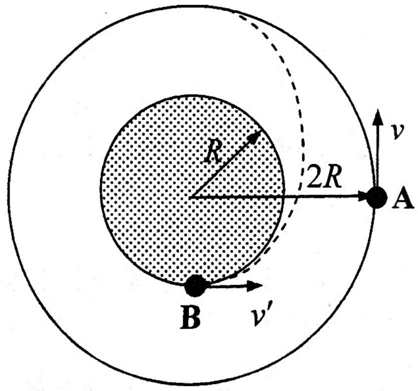


圖 6

十二、 某人騎腳踏車經過泥地，車輪邊緣以切線速率 v 在泥地裡打轉。已知車輪的半徑為 R，P 點為輪緣上的任一點，其離水平地面的高度為 $R+h$，式中 h 為 P 點距離通過輪中心的水平面的鉛直高度，如圖 7 所示，則在該點所噴濺出的泥巴，離地面的最大高度為 ___(17)___（以 R、v、h、和重力加速度 g 表示之)。若 $v^2 > gR$，考慮輪緣上各點所噴濺出的泥巴，則可達的離地面高度的最大值為 ___(18)___（以 R、v、和重力加速度 g 表示之)。

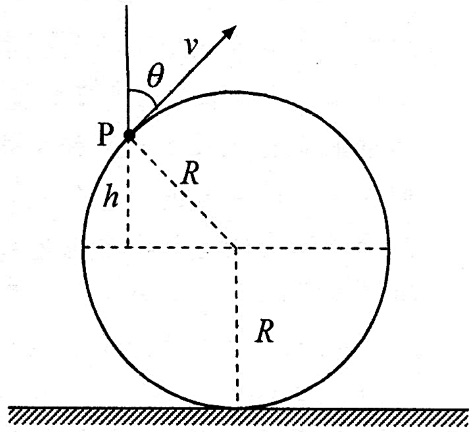


圖 7

十三、

(a)設肥皂泡膜和空氣之間的表面張力為γ，球形泡膜的半徑為R，其內外的氣體壓力差為Δp，已知Δp正比於γ，即$\Delta p = k\gamma$，則此k值為__(19)__。

(b)依據帕穩定律(Poiseuille's Law)，當流體從毛細管的一端流到另一端時，兩端的壓力差Δp和流體體積的流率之間的關係式，可以寫為$\Delta p = -\alpha \dfrac{dV}{dt}$，式中$\dfrac{dV}{dt}$為流體體積的流率，即每單位時間內所通過的流體體積，而α與毛細管的長度和直徑，以及流體的黏滯性相關。若以此毛細管與半徑為R_0的球形肥皂泡膜連接時，則泡膜內的空氣經由毛細管流出，而使泡膜縮小。當泡膜的半徑由起始的R_0縮小至$\dfrac{R_0}{2}$時，所經歷的時間為__(20)__。

十四、　如圖 8 所示，一長度為L，質量為m的均勻木棒，其一端固定於 O 點，但木棒可在鉛直面上，繞通過此點的轉軸（垂直於木棒），自由擺動。木棒和轉軸之間的摩擦可忽略不計。起始時，將木棒置放在水平位置上，然後自靜止開始釋放。當木棒擺至鉛直位置時，突然鬆開 O 點，使木棒自由落下，試問當木棒的質心落下的鉛直高度為H時，木棒繞其質心總共轉了多少圈？__(21)__圈(以已知量表示之)。

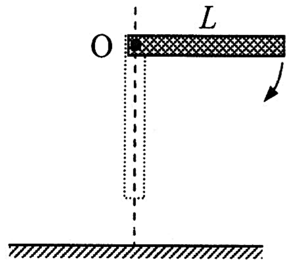


圖 8

[註]：木棒繞通過其端點的轉軸(垂直於棒身)的轉動慣量為$\dfrac{1}{3}mL^2$；又木棒繞通過其質心的轉軸(垂直於棒身)的轉動慣量為$\dfrac{1}{12}mL^2$。

十五、　如圖 9 所示，一質量為m的小鋼彈，以速度v向左方射入一截面為正方形的長木柱內，木柱的質量為M（$M >> m$），木柱的高度和寬度分別為h和a（$h >> a$）、木柱底面和地板之間的靜摩擦係數為μ。假設鋼彈在木柱內穿入的深度為d（$d < a$），且穿入的時間極短，又鋼彈在穿入的過程中受到定力的作用，回答下列問題：

(a)若鋼彈的入射速率v小於某一特定值v_1時，則鋼彈射入後，木柱不會向左平移，求v_1=__(22)__(以已知量表示之)。

(b)在質點射入後，木柱並未向左方平移的前提下，若v小於某一特定值v_2，則質點射入後木柱不會翻倒，求v_2=__(23)__(以已知量表示之)。

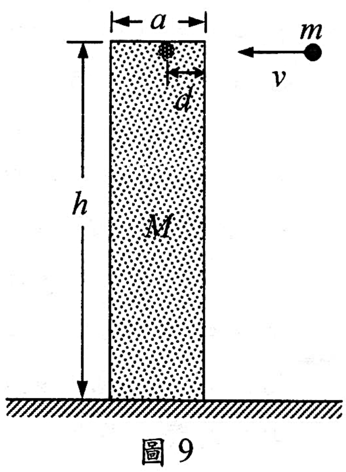


圖 9

[註]：木柱繞其底面邊線轉動的轉動慣量為$I = \dfrac{1}{3}M(h^2 + a^2) \approx \dfrac{1}{3}Mh^2$。

十六、 假設水和冰皆不能被壓縮，已知下述各項數據：水和冰的比熱分別為 $4.2\times10^3\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ 和 $2.1\times10^3\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$；水和冰的密度分別為 $1.0\times10^3\ \mathrm{kgm^{-3}}$ 和 $0.92\times10^3\ \mathrm{kgm^{-3}}$；冰的熔化熱為 $L=3.3\times10^5\ \mathrm{Jkg^{-1}}$；又若欲使冰的熔點降低 $1.0°\mathrm{C}$，則壓力需增加 $14\times10^6\ \mathrm{Pa}$。現有一附加活塞的密閉汽缸，內裝有質量各為 500 g 的水和冰的混合物，汽缸的內壁和活塞皆絕熱，且活塞的質量可不計，活塞和器壁之間的摩擦也可忽略。今在活塞的上方施加壓力，從 $P_0=1.0\times10^5\ \mathrm{Pa}$ 增加到 $P_1=2.0\times10^6\ \mathrm{Pa}$，在此過程中，冰被熔化__(24)__kg，又外力所做的功為__(25)__J。

十七、 一半徑為 r_0 的均勻星球，覆蓋有一層大氣。若此層大氣的氣體分子滿足理想氣體方程式，其平均分子量（即莫耳質量）為 μ，且氣體壓力 p 與密度 ρ 的關係式為 $\dfrac{p}{p_0}=\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^n$，式中 p_0 和 ρ_0 分別為在此星球表面的大氣壓力和密度，而常數 $n>1$。假設理想氣體常數為 R，在此星球表面的重力加速度為 g。若與星球中心的距離為 r 處的大氣，其絕度溫度為 $T(r)$，則在此星球表面處（即 $r=r_0$）的溫度梯度 $\dfrac{dT(r)}{dr}$ 為__(26)__（以 μ、n、R、g 表示之）；此星球上大氣層的厚度（即大氣壓力由 p_0 降至零的徑向距離）為__(27)__（以 n、r_0、p_0、ρ_0 表示之）。

十八、 圖 10 所示為一鉛直豎立的均勻長螺旋鐵絲，其螺旋半徑為 R，螺距為 $d\,(d<<R)$。螺旋鐵絲上穿有一質量為 m 的小滑珠，可自由滑動，小滑珠的自旋運動可忽略。

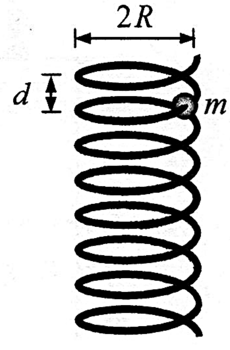


圖 10

(a) 設 ϕ 為鐵絲和水平面之間的夾角，試求螺旋鐵絲的斜率 $\tan\phi=$__(28)__(以 g、d、和 R 表示之，g 為重力加速度)。

(b) 滑珠與鐵絲之間的摩擦力可忽略，同時螺旋鐵絲可繞其中心對稱軸旋轉，θ 代表轉動的角度，當螺旋鐵絲以等角加速 $\alpha=d^2\theta/dt^2$ 轉動時，滑珠恰能維持在一等高的位置上，試求此時螺旋鐵絲的角加速度 $\alpha=$__(29)__(以 g、d、和 R 表示之)。

(c) 設滑珠與鐵絲之間的動摩擦係數為 μ_k，同時螺旋鐵絲保持固定，滑珠在螺旋鐵絲上自靜止開始釋放，因受重力的作用而下滑，試求滑珠在此長螺旋鐵絲上運動的終端速率 $v=$__(30)__(以 g，d，R，μ_k 表示之)。

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、 雙斜面上兩相聯空心圓筒的運動

如圖 11 所示，在斜角皆為30°的兩個長斜面上，有兩個半徑均為r的空心圓筒滾輪，

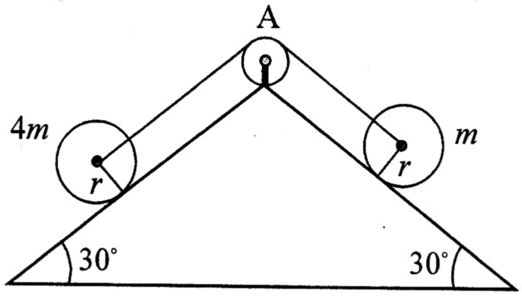


圖 11

質量分別為 $4m$ 與 m；繞中心轉軸的轉動慣量分別為$4mr^2$與mr^2。兩輪的中心轉軸以一條質輕且不可伸縮的細繩，繞過一個固定於斜面頂端 A 的無摩擦、半徑為$r/2$的輕滑輪後，彼此連接，使兩圓筒皆可自由繞軸轉動。假設兩輪皆沿斜面的最陡方向運動，且斜面能提供足夠的摩擦力使兩輪不致滑動，則兩輪沿斜面運動的加速度為何？又繩子的張力為何？（答案以重力加速度 g 與質量 m 表示之）

二、 考慮一個不會變形的長方體容器，以一可沿水平方向移動的分隔牆分成 A 和 B 兩室，如圖 12 所示，分隔牆的截面積為 A。除了 B 室右方的牆可以導熱外，其他器壁和分隔牆都是絕熱材料，容器內充滿氦氣(單原子氣體)。本題中的氦氣可視為理想氣體。

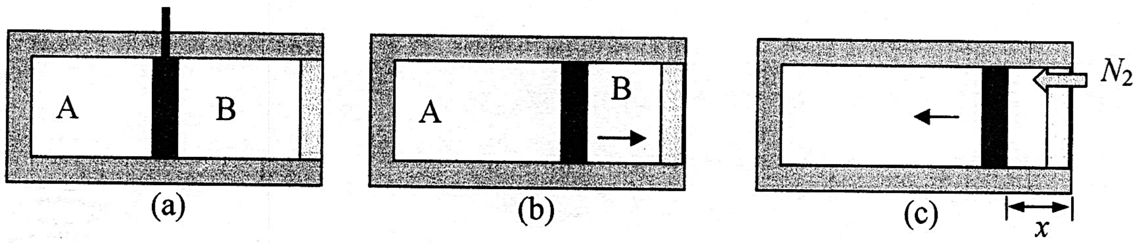


圖 12

(1) 先將分隔牆固定於中央，A 和 B 兩氣室的體積相等皆為V_0，壓力皆為P_0，此時將 B 室的氦氣抽除，使 B 室幾乎成為真空(如圖(a)所示)。再將分隔牆的固定栓打開，使分隔牆可以無摩擦地自由在水平方向移動。因 B 室為真空，分隔牆會向右移動(如圖(b)所示)，假設分隔牆移動夠慢，使過程中 A 室內的氣體一直處於平衡狀態，當分隔牆撞擊 B 室右方的牆時，分隔牆的動能是多少？(答案以V_0 、P_0表示之)

(2) 承上題，此時開始在 B 室中慢慢注入氮氣(如圖(c)所示)。過程中 A 室和 B 室內的氣體一直分別維持熱平衡狀態，而分隔牆移動極慢，可以忽略它移動時的動能。B 室內的氣體透過右方導熱牆，一直保持為定溫 T。在過程中，分隔牆由極右邊向左方移動的距離設為 x，寫下注入 B 室的氮氣莫耳數 n 和 x 之間的

關係式。當分隔牆到達容器中央時，假設分隔牆移動的速率為 v，計算此時 B 室內氦氣莫耳數的瞬時變化率 $\dfrac{dn}{dt}$（即單位時間注入的莫耳數）。(答案以 V_0、P_0、T、v、R、和 A 表示之)

2011 年第 12 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 42 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

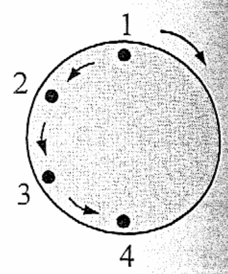
壹、填充題

一、(1) 2

(2) 逆時針

解：

頻閃儀每隔 1/12 秒閃光一次，可看到紅點，在該段時間內，紅點轉過的角度為 $\frac{1}{12}\times 10\times 360 = 300^\circ$。右圖所示為頻閃儀自第一次開始，和其後按順序閃光時所見紅點的位置。由圖上可看出在連續兩次閃光的時間間隔中，紅點轉過的角度為 60 度，故紅點的轉動視頻率為 $(60/360)/(1/12) = 2\ \text{Hz}$，其轉動方向為逆時針方向。



二、(3) 735

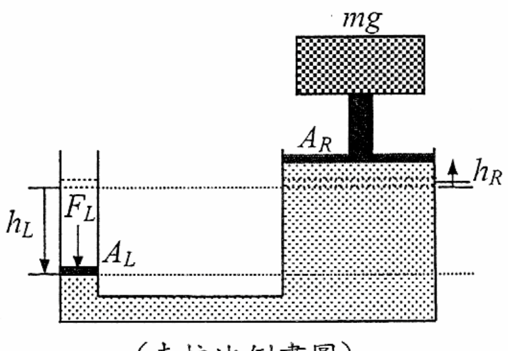
(4) 1.78×10^3

解：

(a)當兩活塞的位置等高時，兩活塞所受的靜液壓力相等，即 $P_L = P_R = \frac{mg}{A_R}$。因此施加在左槽內活塞上的力為

$$F = P_L A_L = \left(\frac{mg}{A_R}\right)\times A_L = \frac{(1200\times 9.8)}{\pi(0.200)^2}\times \pi(0.0500)^2 = 735\text{N}$$

(b)參考下圖所示，當左槽內的活塞受力下降時，右槽內的活塞上升。由於槽內的油不可壓縮，故左槽內減少的油體積等於右槽內增加的油體積，即



(未按比例畫圖)

$$V = A_L h_L = A_R h_R$$

因此當重物上升 $h_R = 1.00$ m 時，小活塞下降的距離為

$$h_L = \frac{A_R h_R}{A_L} = \frac{\pi\left(0.200\right)^2 \times 1.00}{\pi\left(0.0500\right)^2} = 16.0\ \mathrm{m}$$

此時施加在左槽內活塞上的力應為

$$F_L = P_L A_L = \left[\frac{mg}{A_R} + \rho g\left(h_L + h_R\right)\right] \times A_L$$

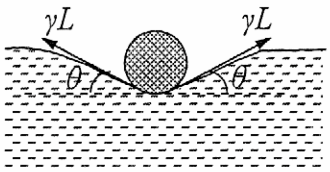
$$= \left[\frac{1200 \times 9.8}{\pi\left(0.200\right)^2} + 800 \times 9.8 \times \left(16.0 + 1.00\right)\right] \times \pi\left(0.0500\right)^2$$

$$= 1.78 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

三、(5) $\underline{4\gamma(L_1 + L_2 + L_3)}$

(6) $\underline{\frac{1}{3}}$

解：



水黽的某一隻腳和水面接觸的側面圖如右圖所示，圖中的 θ 為接觸角。水黽因表面張力的作用，所獲來自該隻腳的向上支撐力為

$$F_1 = 2\gamma L \sin\theta$$

上式的最大值等於 $2\gamma L$。合計三對腳的向上支撐力，水黽所獲向上支撐力的最大值為

$$F_S = 2(2\gamma L_1 + 2\gamma L_2 + 2\gamma L_3) = 4\gamma(L_1 + L_2 + L_3)$$

若就尺度比例而言，水黽所獲的支撐力 F_S 正比於線性長度的一次方，即 $F_S \propto L$；而其體重 W 則正比於線性長度的立方，即 $W \propto L^3$，因此可得 $F_S \propto W^{1/3}$，即 $n = \frac{1}{3}$。

四、(7) $\underline{\sqrt{\frac{m_{AI}\, m_{BG}}{m_{BI}\, m_{AG}}}}$

解：

單擺運動所需的力矩來自於擺錘的重力作用，其運動方程式為

$$m_A L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m_{AG} g L \sin\theta$$

若做小角度的單擺運動，則 $\sin\theta \approx \theta$。上式可簡化為

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left(\frac{m_{AG}g}{m_{AI}L}\right)\theta \approx 0$$

上式為標準的簡諧運動方程式，故質點 A 的角頻率為$\omega_A=\sqrt{\dfrac{m_{AG}g}{m_{AI}L}}$，其週期為

$$T_A=\frac{2\pi}{\omega_A}=2\pi\sqrt{\frac{m_{AI}L}{m_{AG}g}}$$

同理，質點 B 做單擺運動的週期為

$$T_B=2\pi\sqrt{\frac{m_{BI}L}{m_{BG}g}}$$

兩週期的比值為$\dfrac{T_A}{T_B}=\sqrt{\dfrac{m_{AI}\,m_{BG}}{m_{BI}\,m_{AG}}}$。

五、(8) 2.9

解：

電熱器在 2 分鐘內所提供的熱能為$700\times2\times60\,\text{J}$，該能量使瓶內的水從 90°C升溫至 95°C，但其中有一部分的能量 Q_1 散逸至週圍環境而造成熱損失。設瓶內的水量為 m，根據能量守恆定律，可得

$$700\times2\times60=m\times4.2\times10^3\times(95-90)+Q_1$$

電熱器關閉一分鐘後，瓶內的水溫下降 1°C，其減少的熱量 Q_2 散失至週圍環境，故

$$Q_2=m\times4.2\times10^3\times(95-94)$$

由於題中的水溫變化不大，故散失至周圍環境的熱量約和時間成正比，故

$$Q_1\approx2Q_2$$

利用以上三式，可得瓶內的水量為

$$m\approx\frac{700\times2\times60}{4.2\times10^3\times[95-90+2\times(95-94)]}=\frac{700\times2\times60}{4.2\times10^3\times7}=2.9\,\text{kg}$$

六、(9) 1.3

解：

在單位時間內由厚度為Δx、表面積為 A 的薄冰層，傳導到空氣的熱量為

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\kappa A\frac{\Delta T}{\Delta x}=2.2\times A\times\frac{10-0}{0.02}$$

此熱量等於在單位時間內，冰層下方的水結冰所釋放的熱量，設薄冰層的厚度增加率為 v，以 ρ 和 L 分別表示水的密度和水結成冰的潛熱，則

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=(\rho_{冰}Av)L=(920Av)\times 3.3\times 10^{5}$$

由上兩式可得

$$(\rho_{冰}Av)L=\kappa A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow\quad v=\frac{\kappa(\Delta T/\Delta x)}{\rho_{冰}L}=\frac{2.2\times\left((10-0)/0.02\right)}{920\times 3.3\times 10^{5}}=3.6\times 10^{-6}\ \text{m/s}=1.3\ \text{cm/hr}$$

七、(10) $\underline{\frac{5}{2}R\Delta T}$

(11) $\underline{\frac{5}{2}R\Delta T}$

(12) $\underline{1+\frac{mg}{P_0A}}$

解：

(a) 由於汽缸水平置放，其內的氣體在加熱過程中，所受外界的壓力等於 P_0，固定為一大氣壓，因此為等壓加熱過程。1 莫耳單原子理想氣體的等壓熱容為 $C_P=\frac{3}{2}R+R=\frac{5}{2}R$，故升溫 ΔT 所需輸入的熱量為 $\Delta Q=C_P\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T$。

(b) 汽缸雖然改為鉛直置放，但其內的氣體在加熱過程中，所受外界的壓力等於 $P_0+\frac{mg}{A}$，仍為一定值，因此為等壓加熱過程，故升溫 ΔT 所需輸入的熱量仍為 $\Delta Q=C_P\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T$。

(c) 依據熱學第一定律 $\Delta U=\Delta Q-W$，汽缸內的 1 莫耳單原子氣體，因其溫度升高 ΔT 而增加的內能為 $\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T$。在上述(a)和(b)的兩種情況中，利用電熱線加熱而輸入的熱量皆等於 $\frac{5}{2}R\Delta T$，因此氣體對外所做的功相等，皆為 $W=\Delta Q-\Delta U=\frac{5}{2}R\Delta T-\frac{3}{2}R\Delta T=R\Delta T$，故

$$P_0Ax=\left(P_0+\frac{mg}{A}\right)Ay \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{y}=\frac{P_0+\dfrac{mg}{A}}{P_0}=1+\frac{mg}{P_0A}$$

八、(13) $\underline{\dfrac{A^2v^2}{a^2g}}$

解：

設水柱從槍口端射出的初速為 v'，根據流體的連續方程式，可得

$$Av=av' \quad\Rightarrow\quad v'=\frac{A}{a}v$$

若水槍以仰角45°，則可得最大射程。在此情況下，沿水平和鉛直方向的初速度分量分別為

$$v'_x=v'\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}v' \text{，} v'_y=v'\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}v'$$

設水質點在空中飛行的全程時間為 T，則

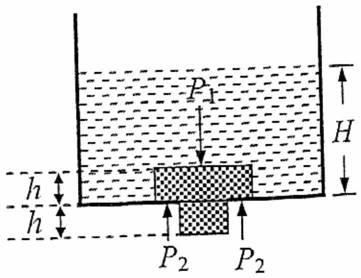
$$v'_y=g\left(\frac{T}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad T=\frac{2v'_y}{g}=\frac{\sqrt{2}v'}{g}$$

水柱噴出的最大射程為

$$R=v'_xT=\frac{\sqrt{2}v'}{2}\times\frac{\sqrt{2}v'}{g}=\frac{v'^2}{g}=\frac{A^2v^2}{a^2g}$$

九、(14) $\underline{\ 0\ }$

解：



如右圖所示，雖然塞子的上半部所排開的液體體積為 $\pi(2r)^2h=4\pi r^2h$ ，但所受的液體浮力不等於 $\rho_0(4\pi r^2h)g$。這是因為該塞子塞住圓洞的部分並不與液體相通，因而不受液體壓力。設 P_1 為塞子上方所受的液體壓力，P_2 為塞子和容器底面接觸處的液體壓力，則塞子所受的液體浮力為

$$F=P_2\left(\pi(2r)^2-\pi r^2\right)-P_1\pi(2r)^2$$

因為 $P_1=\rho_0g(H-h)=\rho_0g\left(H-\dfrac{H}{4}\right)=\dfrac{3}{4}\rho_0gH$ ，$P_2=\rho_0gH$ ，代入上式，可得

$$F=\rho_0gH\left(3\pi r^2\right)-\frac{3}{4}\rho_0gH\times4\pi r^2=0$$

十、(15) $\underline{\sqrt{\dfrac{GM}{2r}-v^2}}$

解：

設起始時行星環繞恆星的速率為 V，整個系統(包括恆星、行星、和隕石)的力學能為

$$E_1=\left[\frac{1}{2}mV^2+\left(-\frac{GMm}{r}\right)\right]+\left(\frac{1}{2}mv^2+0\right) \tag{1}$$

由於行星以圓軌道環繞恆星轉動，故

$$\frac{mV^2}{r}=\frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV^2=\frac{GMm}{2r} \tag{2}$$

利用(2)式，(1)式可改寫為

$$E_1=-\frac{GMm}{2r}+\frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

設在最後狀態時，該行星和隕石環繞恆星轉動的速率分別為 V' 和 v'，又該行星和隕石的圓形軌道半徑分別為 R 和 $2r$，則整個系統的力學能為

$$E_2=\left[\frac{1}{2}mV'^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}mv'^2+\left(-\frac{GMm}{2r}\right)\right] \tag{4}$$

題設行星和隕石皆以正圓軌道環繞恆星轉動，因此仿照(2)式，可得

$$\frac{1}{2}mV'^2=\frac{GMm}{2R}\ ,\ \frac{1}{2}mv'^2=\frac{GMm}{2(2r)} \tag{5}$$

將(5)式代入(4)式，可得

$$E_2=-\frac{GMm}{2R}-\frac{GMm}{2(2r)} \tag{6}$$

由(3)和(6)兩式，以及力學能守恆定律，可得

$$-\frac{GMm}{2r}+\frac{1}{2}mv^2=-\frac{GMm}{2R}-\frac{GMm}{4r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{GMm}{2R}=\frac{GMm}{4r}-\frac{1}{2}mv^2 \tag{7}$$

利用(5)和(7)兩式，可得

$$\frac{1}{2}mV'^2=\frac{GMm}{4r}-\frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad V'=\sqrt{\frac{GM}{2r}-v^2}$$

十一、 (16) $\underline{\sqrt{\frac{8}{3}}v}$

解：

火箭 B 發射後的運動軌跡，為一以行星為焦點的橢圓軌道。因為火箭 B 是在行星表面上沿水平方向射出，其初速度方向垂直於火箭和行星中心的連線，因此火箭的發射位置為該橢圓軌道的〝近日點〞。若火箭 B 和衛星 A 的會合點恰位於此橢圓軌道的〝遠日點〞，則在此狀況下，火箭的發射初速 v' 即為所欲求的最小值。

設火箭在會合點的速率為v''，則由角動量守恆定律可得

$$Rv' = 2Rv'' \quad \Rightarrow \quad v' = 2v'' \tag{1}$$

又由力學能守恆定律可得

$$\frac{1}{2}m_B v'^2 - \frac{GMm_B}{R} = \frac{1}{2}m_B v''^2 - \frac{GMm_B}{2R} \tag{2}$$

由(1)和(2)兩式可解得

$$v''^2 = \frac{GM}{3R} \tag{3}$$

另一方面，就衛星 A 而言，該衛星環繞行星做半徑為 $2R$ 的圓周運動，故

$$\frac{m_A v^2}{2R} = \frac{GMm_A}{(2R)^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{2R} \tag{4}$$

由(1)、(3)、和(4)三式可解得

$$v' = \sqrt{\frac{8}{3}}v$$

[註]：若火箭在行星表面上沿鉛直方向發射，則火箭的初速僅需$\sqrt{2}v$，即可到達衛星 A 的軌道，與衛星 A 會合。但在此狀況下，火箭在會合點的速率為零。

十二、 (17) $\underline{R + h + \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)}$

(18) $\underline{R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}}$

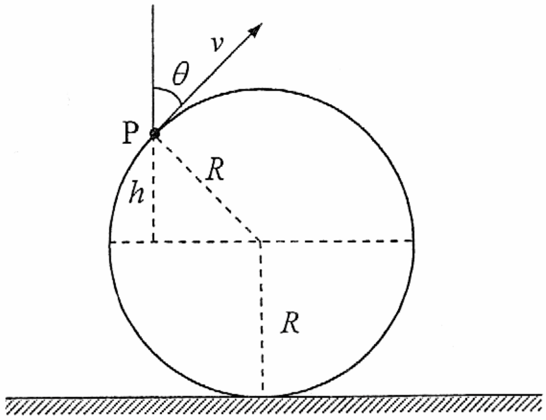
解：

(a)在 P 點處所噴出泥巴，沿鉛直方向的速度分量為$v_y = v\cos\theta$，自該點算起，噴出的泥巴能到達的鉛直高度為

$$h_0 = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \sin^2\theta\right) = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right) \tag{1}$$

故從 P 點處噴出的泥巴，離地面的最大高度為

$$H = R + h + h_0 = R + h + \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right) \tag{2}$$



(b)若考慮輪緣上各點所噴濺出的泥巴，則(2)式中的 h 值為變數。(2)式可改寫為

$$\begin{aligned} H &= R+\frac{v^2}{2g}+h-\frac{v^2}{2gR^2}h^2 \\ &= R+\frac{v^2}{2g}+\frac{v^2}{2gR^2}\left[\left(\frac{2gR^2}{v^2}\right)h-h^2\right] \\ &= R+\frac{v^2}{2g}+\frac{gR^2}{2v^2}-\frac{v^2}{2gR^2}\left(h-\frac{gR^2}{v^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

注意式中 $h \le R$，由於題設 $v^2 > gR \Rightarrow \frac{gR^2}{v^2} < R$，故當 $h=\frac{gR^2}{v^2}$ 時，H 為最大值，即

$$H_{\max} = R+\frac{v^2}{2g}+\frac{gR^2}{2v^2}$$

【註】：若 $v^2 < gR$，則 $\frac{gR^2}{v^2} > R$。在此情況下，當 h 為最大值時，即 $h=R$，(3)式中等號右邊第四項括號內的差值為最小，故 H 可得最大值：

$$H_{\max} = R+R+\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{R^2}{R^2}\right)=2R$$

即泥巴濺離地面的高度，不會超過車輪輪緣上的最高點。

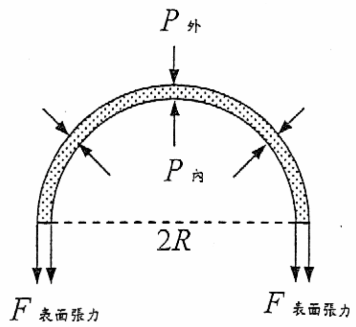
十三、 (19) $\underline{\frac{4}{R}}$

(20) $\underline{\frac{15\alpha\pi R_0^4}{64\gamma}}$

解：

(a)參看右圖所示球形肥皂泡膜的上半部的受力情形。

由靜力平衡的條件可得



$$P_{外}\times\pi R^2+F_{表面張力}=P_{內}\times\pi R^2$$

注意肥皂泡膜有兩層，故 $F_{表面張力}=2\times\gamma\times(2\pi R)$，

代入上式，得

$$(P_{內}-P_{外})\times\pi R^2=2\times\gamma\times(2\pi R)$$

$$\Rightarrow\quad \Delta P=P_{內}-P_{外}=\left(\frac{4}{R}\right)\gamma\quad\Rightarrow\quad k=\frac{4}{R}$$

(b)當毛細管與肥皂泡膜連接時，利用(a)所得的泡膜內外的氣體壓力差，可得

$$\Delta p=\frac{4\gamma}{R}=-\alpha\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{4\gamma}{R}=-\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=-\alpha\times4\pi R^2\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad dt=-\frac{\alpha\pi}{\gamma}R^3dR$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^t dt=-\frac{\alpha\pi}{\gamma}\int_{R_0}^{R_0/2}R^3dR\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{\alpha\pi}{4\gamma}\left[\left(\frac{R_0}{2}\right)^4-R_0^4\right]=\frac{15\alpha\pi R_0^4}{64\gamma}$$

十四、 (21) $\underline{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3H}{2L}}}$

解：

木棒自水平位置往下擺動時，其重力位能轉變為木棒的轉動動能。設木棒繞通過O點的轉軸的轉動慣量為 I，其轉動角速度為 ω，則當木棒擺至鉛直位置時，由力學能守恆定律可得

$$mg\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2\quad\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

當木棒的質心落下的鉛直高度為 H 時，所經歷的時間為

$$H=\frac{1}{2}gt^2\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

木棒繞其質心轉動一圈的時間為 $\frac{2\pi}{\omega}$，因此在 $\sqrt{\frac{2H}{g}}$ 的時間內，木棒繞其質心所轉

過的總圈數為

$$N=\frac{\sqrt{2H/g}}{2\pi/\omega}=\frac{1}{2\pi}\times\sqrt{\frac{3g}{L}}\times\sqrt{\frac{2H}{g}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3H}{2L}}$$

十五、 (22) $\underline{\sqrt{\dfrac{2\mu Mgd}{m}}}$

(23) $\underline{\dfrac{Ma}{m}\sqrt{\dfrac{g}{6h}}}$

解：

(a)由於鋼彈穿入木柱的時間的極短，因此兩者碰撞前後的動量守恆。設碰撞後木柱系統(包括鋼彈和木柱)質心的速度為 V，則

$$(m+M)V=mv \quad\Rightarrow\quad V=\left(\frac{m}{m+M}\right)v \tag{1}$$

鋼彈在穿入木柱的過程中，所損失的能量為

$$\begin{aligned}\Delta K&=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m+M)V^2\\&=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2\\&=\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M}{m+M}\right)\approx\frac{1}{2}mv^2\end{aligned} \tag{2}$$

設鋼彈在穿入木柱的過程中，所受的阻力為 F。上述的鋼彈動能損失等於克服阻力所做的功，即

$$Fd\approx\frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad F\approx\frac{mv^2}{2d} \tag{3}$$

根據牛頓第三定律，木柱所受向左的推力，其量值等於鋼彈所受向右的阻力 F 。此力必須大於木柱底面和地板之間的最大靜摩擦力，才能使木柱向左方平移，即其條件為

$$F>\mu Mg \quad\Rightarrow\quad \frac{mv^2}{2d}>\mu Mg \quad\Rightarrow\quad v>\sqrt{\frac{2\mu Mgd}{m}} \tag{4}$$

故本小題所求的特定速度 $v_1=\sqrt{\dfrac{2\mu Mgd}{m}}$

(b)同樣由於鋼彈穿入木柱的時間的極短，因此兩者碰撞前後的角動量守恆，故鋼彈射入木柱後，木柱所獲得的角動量為

$$L=I\omega=mvh \tag{5}$$

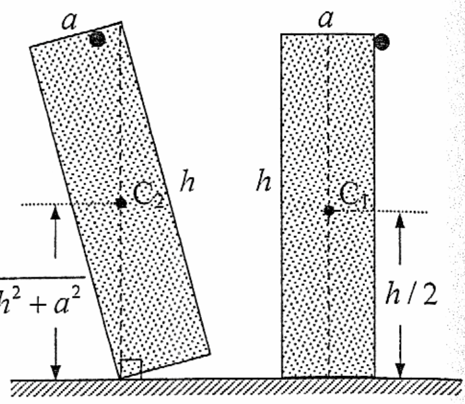
式中 I 為木柱繞其底面邊線轉動的轉動慣量，可計算如下：

$$I=\iiint\rho(x^2+z^2)dxdydz=\frac{1}{3}M(h^2+a^2)\approx\frac{1}{3}Mh^2 \tag{6}$$

木柱的轉動動能為

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{(I\omega)^2}{2I}=\frac{(mvh)^2}{2I}\approx\frac{(mvh)^2}{2(Mh^2/3)}=\frac{3m^2v^2}{2M} \qquad (7)$$

參看右圖，當鋼彈射入木柱後，木柱的質心由原先的位置 C_1 升高。若木柱的質心超越其底面邊線的正上方時，即超過位置 C_2，則木柱將會傾倒。當木柱的質心位置由 C_1 升高至 C_2 時，所增加的重力位能為 $Mg\left(\frac{1}{2}\sqrt{h^2+a^2}-\frac{1}{2}h\right)$。因此若木柱所獲得的轉動動能 K 大於上述的重力位能時，則木柱將會傾倒，即其條件為



$$\frac{3m^2v^2}{2M}\geq Mg\left(\frac{1}{2}\sqrt{h^2+a^2}-\frac{1}{2}h\right)\approx\frac{Mga^2}{4h} \quad\Rightarrow\quad v\geq\frac{Ma}{m}\sqrt{\frac{g}{6h}}$$

故本小題所求的特定速度 $v_2=\frac{Ma}{m}\sqrt{\frac{g}{6h}}$。

十六、 (24) $\underline{1.3\times10^{-3}}$

(25) $\underline{0.12}$

解：

因為壓力的增加量為 $\Delta P=P_1-P_0=1.9\times10^6\,Pa$，故冰的熔點下降

$$\Delta T=\frac{\Delta P}{14\times10^6}=\frac{1.9\times10^6}{14\times10^6}\text{K}=0.14\,\text{K}$$

設被熔化的冰的質量為 Δm，則

$$(\Delta m)L=C_{水}m_{水}\Delta T+C_{冰}m_{冰}\Delta T$$

題設 $m_{水}=m_{冰}=0.5\text{kg}$

$$\Rightarrow\quad \Delta m=\frac{0.5\Delta T}{L}(C_{水}+C_{冰})=\frac{0.5\times0.14}{3.3\times10^5}\times(4.2+2.1)\times10^3=1.3\times10^{-3}\,\text{kg}$$

設質量為 Δm 的冰變為同質量的水時，其減少的體積為 ΔV，則

$$\Delta V=\frac{\Delta m}{\rho_{冰}}-\frac{\Delta m}{\rho_{水}}=\Delta m\left(\frac{\rho_{水}-\rho_{冰}}{\rho_{冰}\rho_{水}}\right)=\Delta m\left(\frac{\rho_{水}-0.92\rho_{水}}{\rho_{水}\times0.92\rho_{水}}\right)=\Delta m\left(\frac{0.08}{0.92}\right)\frac{1}{\rho_{水}}$$

$$=1.3\times10^{-3}\times\frac{0.08}{0.92}\times\frac{1}{1.0\times10^3}=1.1\times10^{-7}\,\text{m}^3$$

外力做正功，其值為

$$W=\int_{P_0}^{P_1} PdV=\overline{P}\Delta V=\frac{1}{2}(P_0+P_1)\Delta V=\frac{1}{2}\times(1.0\times10^5+2.0\times10^6)\times1.1\times10^{-7}$$
$$=0.12\,\mathrm{J}$$

十七、 (26) $\underline{-(1-1/n)\dfrac{\mu g}{R}}$

(27) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\dfrac{\rho_0 g}{p_0}-\dfrac{1}{r_0}}$

解：

理想氣體方程式

$$p=\frac{\rho}{\mu}RT \tag{1}$$

可改寫成

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho_0}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{RT}{\mu} \tag{2}$$

而由所給 $p-\rho$ 關係式可得

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n} \tag{3}$$

將(3)式代入(2)式，可得

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/n}=\frac{\rho_0}{p_0}\frac{RT}{\mu} \tag{4}$$

上式的微分式為

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/n}=(1-1/n)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/n}d\left(\frac{p}{p_0}\right)=\frac{\rho_0}{p_0}\frac{R}{\mu}dT \tag{5}$$

設萬有引力常數為 G，星球質量為 M，利用(3)式，則星球上由 r 到 $r+dr$ 的大氣可處於靜力平衡的條件，可寫為

$$p\times4\pi r^2=(p+dp)\times4\pi r^2+G\frac{M(\rho\times4\pi r^2dr)}{r^2}$$

$$\Rightarrow\quad -dp=\rho\frac{GM}{r^2}dr=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n}\frac{GM}{r^2}dr \tag{6}$$

或

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right)=-\frac{\rho_0}{p_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n}\frac{GM}{r^2}dr \tag{7}$$

將(5)式除以(7)式，即得

$$\left(1-1/n\right)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/n}=-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/n}\frac{R}{\mu}\frac{r^2}{GM}\frac{dT}{dr} \tag{8}$$

當$r=r_0$時，$GM/r_0^2=g$，故由上式可知

$$-\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_0}=\left(1-1/n\right)\frac{\mu g}{R} \tag{9}$$

由(6)式得

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/n}d\left(\frac{p}{p_0}\right)=\frac{\rho_0}{p_0}d\left(\frac{GM}{r}\right) \tag{10}$$

上式經積分後，可得

$$\frac{1}{1-1/n}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/n}=\frac{\rho_0}{p_0}\left(\frac{GM}{r}\right)+\text{const} \tag{11}$$

但因在星球表面時，$r=r_0$，$p=p_0$，即

$$\text{const}=\frac{1}{1-1/n}-\frac{\rho_0}{p_0}\left(\frac{GM}{r_0}\right) \tag{12}$$

將(12)式代回(11)式，可得

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/n}=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{\rho_0}{p_0}GM\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right) \tag{13}$$

設大氣層的厚度為h，則因在$r=r_0+h$處的大氣壓力$p=0$，故得

$$1=\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{\rho_0}{p_0}GM\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0+h}\right) \tag{14}$$

亦即

$$\frac{n}{n-1}\frac{p_0}{\rho_0}=GM\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0+h}\right)=\frac{GM}{r_0^2}\frac{r_0h}{r_0+h}=g\frac{r_0h}{r_0+h} \tag{15}$$

解之可得大氣層的厚度為

$$h=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{p_0}{\rho_0 g}}{1-\left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{p_0}{\rho_0 g}\frac{1}{r_0}}=\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{\rho_0 g}{p_0}-\frac{1}{r_0}} \tag{16}$$

十八、 (28) $\underline{\dfrac{d}{2\pi R}}$

(29) $\underline{\dfrac{gd}{2\pi R^2}}$

(30) $\underline{\sqrt{gR}\left[\dfrac{d^2}{\mu_k^2}-(2\pi R)^2\right]^{1/4}\dfrac{\left[(2\pi R)^2+d^2\right]^{1/4}}{2\pi R}}$

解：

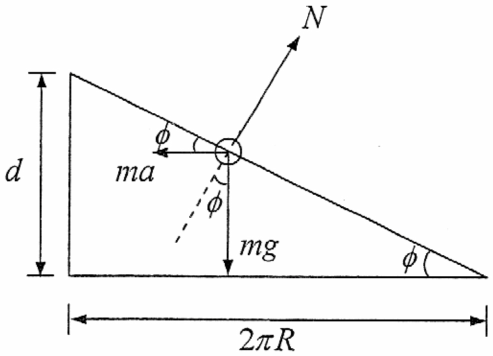
(a)螺線上的任一小段皆可視為與斜面(斜角為ϕ)相當，故$\tan\phi=\dfrac{d}{2\pi R}$。

(b)參看右圖，設取螺旋鐵絲為參考系，圖中所示為小滑珠的受力情形，N為鐵絲作用於滑珠的正向力；mg為重力；ma為假想力，則滑珠沿斜面方向的靜力平衡條件為

$$mg\sin\phi=ma\cos\phi$$

因為$a=R\alpha$，故得

$$\alpha=\frac{g\tan\phi}{R}=\frac{gd}{2\pi R^2}$$

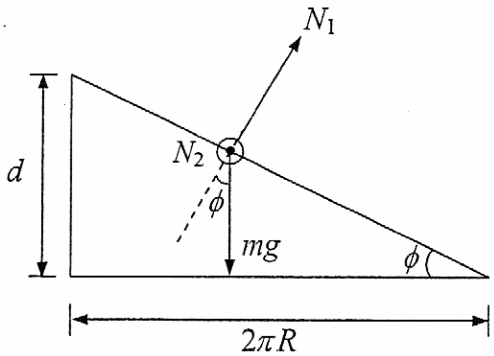


(c)在右圖所示的力圖中，滑珠和螺旋鐵絲之間的作用力為N_1（垂直於斜面）和N_2（與紙面垂直）。

$$N_1=mg\cos\phi$$

$$N_2=\frac{m(v\cos\phi)^2}{R}$$

$$=\frac{m\left[v\times\left(2\pi R/\sqrt{(2\pi R)^2+d^2}\right)\right]^2}{R}$$



沿斜面方向的靜力平衡條件為

$$mg\sin\phi=\mu_k\sqrt{N_1^2+N_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad g^2 \sin^2 \phi = \mu_k^2 \left(g^2 \cos^2 \phi + \frac{v^4}{R^2} \frac{(2\pi R)^4}{\left((2\pi R)^2 + d^2\right)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{gR} \left[\frac{\sin^2 \phi}{\mu_k^2} - \cos^2 \phi \right]^{1/4} \frac{\left[(2\pi R)^2 + d^2 \right]^{1/2}}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{gR} \left[\frac{d^2}{\mu_k^2} - (2\pi R)^2 \right]^{1/4} \frac{\left[(2\pi R)^2 + d^2 \right]^{1/4}}{2\pi R}$$

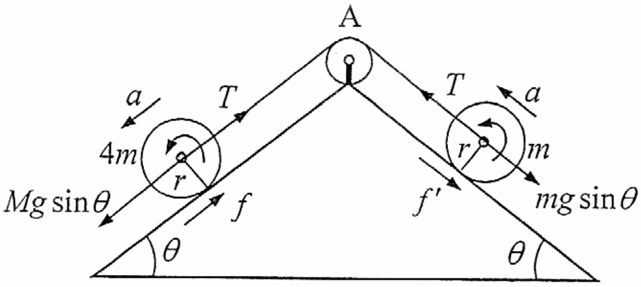
貳、計算題

一、解：

【解法１】：利用力圖的分析求解

參看下圖，設$4m=M$，以θ代表斜面的傾角，以I與I'分別代表左、右邊滾筒繞中心轉軸的轉動慣量，即

$$I=Mr^2=4mr^2 \text{，} I'=mr^2 \tag{1}$$



設繩上張力為T，以a代表滾筒移動的加速度，並以f與f'分別代表斜坡對左、右滾筒的靜摩擦力，則由兩滾筒質心的移動運動方程式得

$$Mg\sin\theta-f-T=Ma \tag{2a}$$

$$T-mg\sin\theta-f'=ma \tag{2b}$$

若以α代表角加速度，則由純滾動的條件得$r\alpha=a$，故可由兩滾筒相對於質心的純滾動運動方程式得

$$I\alpha=I\frac{a}{r}=fr \tag{3a}$$

$$I'\alpha=I'\frac{a}{r}=f'r \tag{3b}$$

將(2a)與(2b)兩式相加以消去T，可得

$$(M-m)g\sin\theta-(f+f')=(m+M)a \tag{4}$$

將(3a)與(3b)兩式的結果代入上式

$$(M-m)g\sin\theta=(m+M)a+(I'+I)\frac{a}{r^2}=2(m+M)a \tag{5}$$

因$\sin\theta=\sin30^\circ=1/2$，故由上式可解得加速度為

$$a=\frac{(M-m)}{2(m+M)}g\sin\theta=\frac{3m}{10m}g\frac{1}{2}=\frac{3}{20}g \tag{6}$$

由(2a)式可得張力為

$$T=Mg\sin\theta-f-Ma \tag{7}$$

將(3a)和(6)兩式代入上式，可得

$$T = Mg\sin\theta - \left(\frac{I}{r^2} + M\right)a = Mg\frac{1}{2} - 2M\frac{3}{20}g = \frac{5-3}{10}Mg = \frac{4}{5}mg \qquad (8)$$

【解法 2】：利用力學能守恆定律求解

由於題設圓筒在斜面上的運動為純滾動，靜摩擦力對圓筒所做的功，完全轉變為圓筒的轉動動能。設 s 代表兩圓筒沿斜面方向的平移距離，利用力學能守恆定律，兩圓筒在斜面上運動時所減少的重力位能，轉變為平移和轉動的動能，即

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I'\omega'^2 = Mgs\sin\theta - mgs\sin\theta$$

式中 $\omega = \omega' = \dfrac{v}{r}$ 。

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(4m)v^2 + \frac{1}{2}(4mr^2)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = (4m - m)gs\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 5mv^2 = \frac{3}{2}mgs$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2\left(\frac{3}{20}g\right)s$$

比較等加速度運動公式 $v^2 = 2as$ ，可知圓筒沿斜面方向的平移加速度為 $a = \dfrac{3}{20}g$ 。

就大圓筒的受力情形而言，其平移和轉動的運動方程式分別為

$$Mg\sin\theta - f - T = Ma$$

$$rf = I\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{4mr^2}{r} \times \frac{a}{r} = 4ma$$

$$\Rightarrow \quad (4m)g \times \frac{1}{2} - 4m \times \frac{3}{20}g - T = (4m) \times \frac{3}{20}g$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{4}{5}mg$$

二、 解：

(1) A 室中的氦氣在固定栓打開後，進入一個絕熱膨脹的過程，因此其體積與壓力之間的關係式為

$$PV^{\frac{5}{3}} = P_0V_0^{\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{P_0V_0^{1.6}}{V^{1.6}} \qquad (1)$$

因為 B 室是真空，在此過程中氣體所作的功，轉變為分隔牆的動能，即

$$\begin{aligned} K &= \int_{V_0}^{2V_0} PdV = \int_{V_0}^{2V_0} \left(\frac{P_0V_0^{5/3}}{V^{5/3}}\right)dV = \frac{3}{2}\cdot(P_0V_0^{5/3})\cdot\left(V_0^{-2/3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) \\ &= \frac{3}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)\cdot P_0V_0 \approx 0.56P_0V_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

(2) 在 B 室注入氦氣後，分隔牆被推向左方，此時 A 室內的氦氣仍然進行絕熱過程，因此其體積和壓力之間的關係式仍為

$$P_A V_A^{\frac{5}{3}} = P_0 V_0^{\frac{5}{3}} \tag{3}$$

因分隔牆可以自由移動，兩室的壓力一直相等，即 $P_B = P_A$，且兩室的體積總和固定，因此 B 室的體積為

$$V_B = xA = 2V_0 - V_A \quad \Rightarrow \quad V_A = 2V_0 - V_B \tag{4}$$

將 P_A 和 V_A 代入(3)式，可得到

$$P_B \cdot \left(2V_0 - V_B\right)^{5/3} = P_0 V_0^{5/3} \tag{5}$$

由於 B 式內的氣體保持定溫，故 $P_B = \dfrac{nRT}{V_B}$，注意分子數不是定值！代入(5)式，可得 n 與 V_B 即 x 的關係式：

$$n = \frac{V_B}{RT \cdot \left(2V_0 - V_B\right)^{5/3}} P_0 V_0^{5/3} = \frac{xA}{\left(2V_0 - xA\right)^{5/3}} \cdot \frac{P_0 V_0^{5/3}}{RT} \tag{6}$$

莫耳數的瞬時變化率（氣體注入率）$\dfrac{dn}{dt}$，可寫為

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{P_0 V_0^{5/3}}{RT} \left[\frac{5xA^2}{3\left(2V_0 - xA\right)^{8/3}} + \frac{A}{\left(2V_0 - xA\right)^{5/3}} \right] \tag{7}$$

當分隔牆到達容器中央時，$xA = V_0$，此時 B 室內氦氣莫耳數的瞬時變化率為

$$\frac{dn}{dt} = v \cdot \frac{P_0 V_0^{5/3}}{RT} \left[\frac{5AV_0}{3\left(V_0\right)^{8/3}} + \frac{A}{\left(V_0\right)^{5/3}} \right] = v\left(\frac{8P_0 A}{3RT}\right)$$