2015年第16屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第46屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2014年11月15日
13:30~16:30
考試時間：三小時

＜＜注意事項＞＞

1、 本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
2、 填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、 計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
4、 可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

2015年第16屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第46屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為150分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格4分，共30格，合計120分)

一、 在赤道上空同步衛星，其繞地球的週期恰好與地球自轉週期相同，地球上的人會覺得該衛星懸在空中不動；而另一種全球衛星定位系統衛星(GPS)繞行地球的週期是12小時。已知同步衛星的軌道半徑為地球半徑的6.6倍，則GPS衛星地軌道半徑為地球半徑的___(1)___倍。

二、 一小球質量為m，以一質量可忽略不計且長為ℓ的細線，懸掛於天花板下。現以一質量為M的木棒($M \gg m$)在水平的方向，以v的速度撞擊小球。假設木棒和小球之間是彈性碰撞，則在撞擊後瞬間，球的速度為___(2)___。若細線要維持不斷，則細線最少要能承受的張力等於___(3)___。

三、 質量m的直角木塊，其水平面的斜角為θ，且暫時鎖定在光滑的水平桌面上。木塊m用水平細繩經過桌緣輕滑輪與另一質量M的方塊相連($M > m$)，如圖1所示。今一小方塊靜置在直角木塊粗糙斜面的頂端(除了直角木塊的斜面外，所有接觸面皆無摩擦力)，在移除鎖定裝置後，桌面上的直角木塊m開始滑動。若開始滑動時小方塊與m斜面之間的作用力消失，則此時直角木塊m加速度大小等於___(4)___，若此時θ恰為最小值，則$\tan\theta$等於___(5)___。(設重力加速度為g)

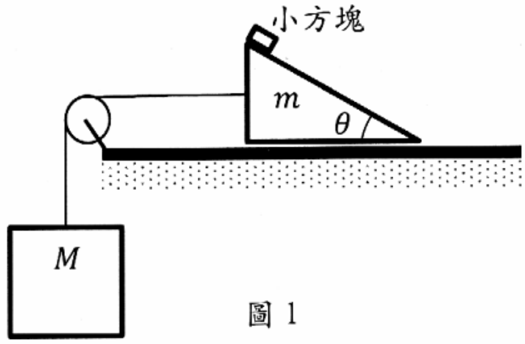


圖1

四、 某甲用力往地面丟擲質量M之橡膠球，當橡膠球反彈的瞬間為時間零點(即t=0.00 s)，該橡膠球反彈後之動量量值($|\boldsymbol{p}|$)與時間t關係如圖2所示，求反彈後該橡膠球達到最高點時所需時間等於___(6)___s。該橡膠球質量M =___(7)___kg (設重力加速度量值為9.80 m/s^2)。

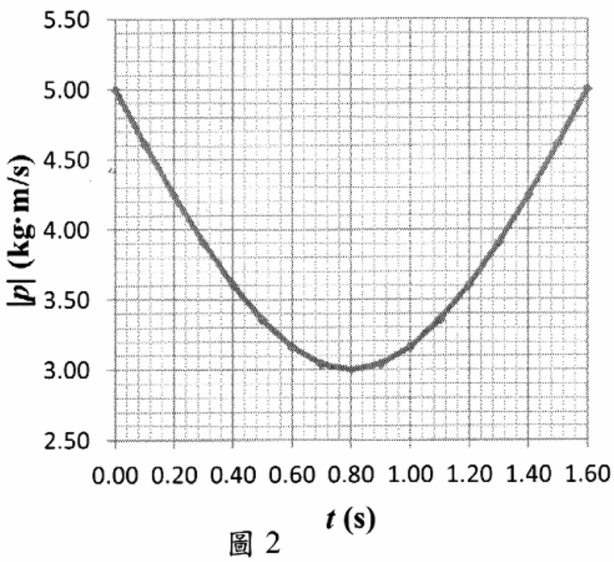


圖 2

五、 一內有金屬塊 W 之小木桶，整體浮在一裝有水之容器水面上，如圖 3 所示。今將金屬塊 W 由木桶內取出置入容器之水中，金屬塊在沈入底部後，試問容器內的水面高度 h 之變化是上升、下降亦或是不變？___(8)___。

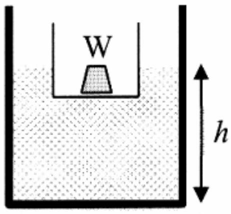


圖 3

六、 一端開口、另一端是平口封閉的圓柱型玻璃細管，其質量為m、半徑為r(細管本身玻璃的體積可忽略不計)。將玻璃細管開口端倒插入密度為ρ的液體，且置於以活塞封住的密閉容器中。當處於靜止平衡時(如圖 4 所示)，液面上方的氣體壓力為P，玻璃細管內空氣柱的長度為l_i，則玻璃細管內空氣柱的氣體壓力等於___(9)___。若施力以等溫的方式將活塞下壓，細管會逐漸沒入液體中，當細管平口處恰與水面齊平時，此時液面上方的氣體壓力等於___(10)___。(設重力加速度為g，本題不考慮液體表面張力效應，且容器的體積遠大於細管。)

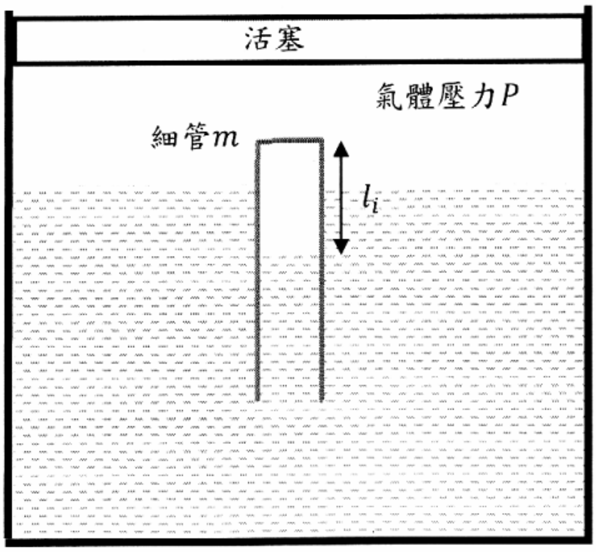


圖 4

七、 一固定於船尾的水下噴射推進器(如圖 5)，透過直徑D為 0.60 m 的螺旋槳，沿水平方向由出口向後排出的穩定水流，出口直徑d為 0.50 m，出口水流相對於推進器的平均速度$\vec{v}_j$等於 8.0 m/s。若此船水平等速前進的速度$\vec{v}_f$是 4.0 m/s，則在一維穩流近似條件下，水進入推進器的體積流率Q為__(11)__ m^3/s，而推進器產生的推力F為__(12)__ N。(水的密度ρ為1.0×10^3 kg/m^3)

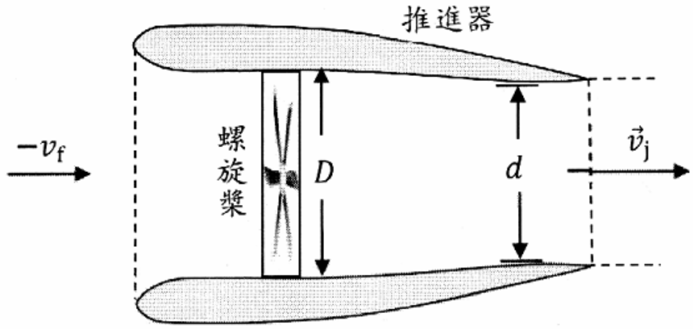


圖 5

八、 有一實心金屬正立方塊，已知在某一瞬間，其三邊與直角坐標系x、y、z軸重合如圖 6 所示， A 點的速度為 $(v, -3v, 0)$，B 點的速度為 $(v, 0,0)$，C 點的速度為 $(-2v, 0,0)$，試問金屬塊幾何中心 O 點之速率為__(13)__。

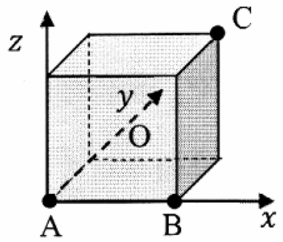


圖 6

九、 圖 7 所示為一平放在水平地面上之均勻細棒，某生以一細繩綁著細棒底端以垂直細棒方向施力F，將細棒緩慢地拉起，發現當夾角$\theta = 30°$時，細棒另一端 O 點開始滑動，試問細棒與地面間之最大靜摩擦係數為__(14)__。

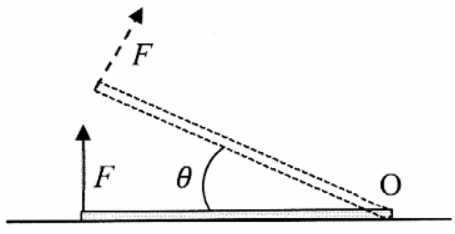


圖 7

十、 一拋物線軌道用不會變形的鋼絲所製成，並固定於鉛直面上。在此鉛直面上，拋物線軌道滿足：$y = cx^2$，c 是一個常數。一個質量為m的小鐵環，套在拋物線軌道上，將鐵環移至距最低點的水平距離 x_0 處(如圖 8 所示)，自靜止釋放。假設鐵環與軌道間的摩擦可以忽略，因為 x_0 很小，故$cx_0 \ll 1$。在接下來的運動過程，鐵環第一次回到出發點所需要的時間是__(15)__。當鐵環到達拋物軌道最低點時，軌道對鐵環的施力F為 $F = mg +$__(16)__。

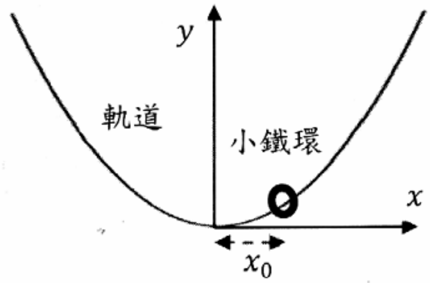


圖 8

【提示】：微分公式 $\frac{dx^n}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$。

十一、　一物體質量為M，掛於一質量可忽略不計的細線一端，將細線繞於一水平固定不動、半徑為R的圓柱上，繞了$n+\frac{1}{2}$圈，細線的另一端懸掛一質量為m的物體。若線與圓柱的靜摩擦係數為μ，則兩物體質量的比值$\frac{m}{M}$在某一範圍內時細線不會滑動；即當$e^{-(2n+1)\pi\mu}<\frac{m}{M}<$ ___(17)___，在此範圍內細線不會滑動。

【提示】：積分公式 $\int\frac{dx}{x}=\ln x$

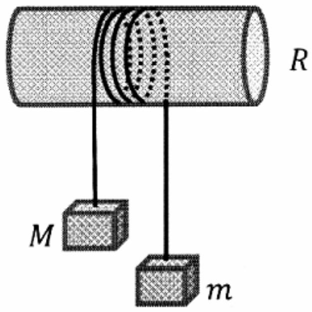


圖 9

十二、　已知半徑為R、質量為M的均勻圓盤，如圖 10 所示，繞圓盤質量中心 C 點的轉動慣量為$I_C=\frac{1}{2}MR^2$，而在距離圓心d之 D 點為轉軸的轉動慣量為$I_D=I_C+Md^2$，此轉動慣量的關係式稱之為平行軸定理。當圓盤以 D 點鉛直懸吊，其小角度振盪的週期為：$2\pi\sqrt{\frac{I_D}{Mgd}}$，其中$g$為重力加速度。當此圓盤被裁去$\frac{1}{2}$而形成一個半圓，如圖 11 所示，已知 C_1 為質量中心，且其和 C 之間的距離為$\frac{4}{3\pi}R$，則繞 C_1 點的轉動慣量I_{C1}等於___(18)___。沿著 C 和 C_1 連線上的某一點，以小角度振盪的週期T為$2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{1}{2}Mgx}}$，其中 I 為該點轉動慣量，且x為與 C_1 的距離，則當T為最小值時，$x=$___(19)___。(以I_{C1}、M、R和g表示之。)

【提示】：微分公式 $dx^n=nx^{n-1}dx$。

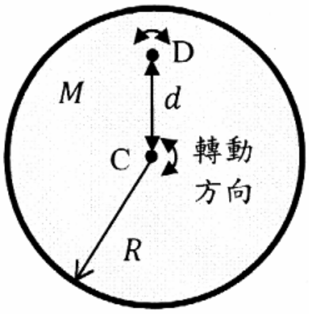


圖 10

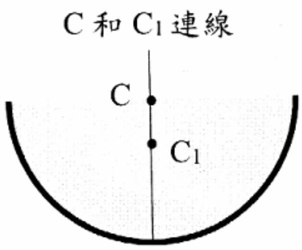


圖 11：半圓盤

十三、　光滑水平面上置一質量為m的薄木板，其上再靜置一邊長為L、質量為M的均質立方體木塊，如圖 12 所示。所有過程中，木板m和木塊M間無滑動。方塊相對於通過質心的水平軸轉動時，其轉動慣量為$\frac{1}{6}ML^2$(此轉動軸與木塊的四邊平行。)

(a) 設重力加速度為g，若一固定大小的水平方向施力F推木板m時，方塊M相對於木板靜止不動，則方塊所受合力等於___(20)___。

(b) 另一種情況，若施力F足夠大，使得方塊M以木板接觸的邊為轉軸而發生旋轉，則當該方塊剛開始旋轉瞬間，方塊M相對於旋轉軸為支點的角加速率等於___(21)___。

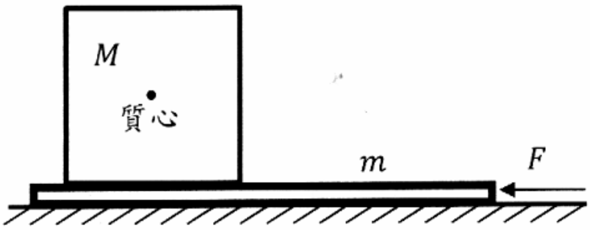


圖 12

十四、　在一個鉛直的唧筒中，有質量均為m的上下兩個活塞。活塞的面積為A，且厚度可以忽略不計，活塞與唧筒之間的摩擦力可視為零。唧筒外部為真空，唧筒內上下兩部分均含有溫度為T的理想氣體，如圖 13 所示。起始時，兩活塞均處於平衡狀態。已知上下活塞間相距ℓ，且下活塞與唧筒底面的距離也是ℓ，則上半部內的氣體莫耳數與下半部內的氣體莫耳數之比為___(22)___。現在將上活塞的位置固定住，將下活塞從原來平衡點的位置向上移一小段距離$z_0(z_0 \ll \ell)$，在$t = 0$時，自靜止釋放。**假設儀器設置可以讓唧筒內氣體溫度維持不變**，且氣體的總質量可以忽略不計，下活塞與其平衡點的位移$z(t)$隨時間變化之函數為___(23)___。

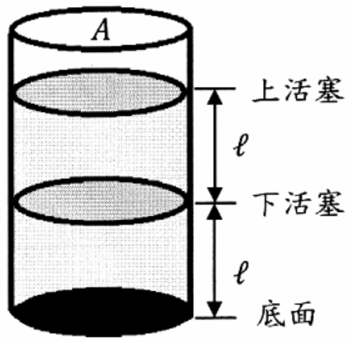


圖 13

【提示】：近似公式：當$x \ll 1$時，$(1 \pm x)^{-1} \cong 1 \mp x$。

十五、　一長度L、截面積A之密閉容器，其除左側器壁外，其餘器壁均完全絕熱，如圖 14 中陰影所示。容器以一活塞分隔成左、右兩部分，左半部充滿 1 莫耳的單原子理想氣體，右半部為真空，且活塞以一力常數為k之理想彈簧連接於容器右端器壁上。若該彈簧之自然長度恰等於L，並假設活塞與器壁間無摩擦力，且容器器壁、活塞和彈簧的熱容均可忽略，則該氣體的比熱等於___(24)___（以氣體常數 R 以及可能相關的參數表示。）。

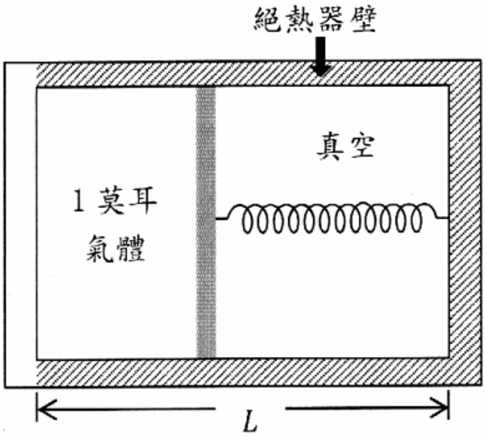


圖 14

【提示】：微分公式 $dx^n = nx^{n-1}dx$，

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df。$$

十六、　某生欲研究鐵皮屋之遮陽效果，在一室溫（即空氣溫度）為33°C之正午，以一金屬板遮陽，當溫度達穩定時，發現接受陽光照射的一面（A 面）溫度可達87°C，而未

被太陽照設之金屬面(B 面)溫度亦達到69°C，若忽略金屬板的熱幅射以及空氣的對流，僅考慮金屬板和其與空氣間的熱傳導效應(但忽略板邊緣的效應)，在同樣的陽光照射情形下，欲將 B 面的溫度降到50°C以下，則金屬板的厚度至少應為原先厚度的 ___(25)___ 倍(取最接近的整數)。

十七、 歷史上，秦始皇為了防禦北方匈奴的侵襲，曾徵集大批的民工，建造萬里長城。這條長城西起甘肅，東至遼東，順著地形蜿蜒曲折，全長約 5000 km，全部工程費時 9 年完成。大多數地段是建在山嶺上，隨著山勢的高低而起伏。為了估算築城所需的人力，將長城模型化如下述：

(a) 長城建築在平均高度為 200 m 的山嶺上，這個高度是從城牆所在地的山腳下的平地算起。城牆的平均高度為 8.0m，平均寬度為 6.0m，築城所需的磚石砂土，其平均密度為 $2.2 g/cm^3$，皆採自山腳下的平地。

(b) 一個人每天搬運磚石砂土所做的有效功為 2.5×10^5 J。

根據(a)和(b)所述的長城模型和數據，估計當時為了建造長城所徵集的勞工總人數約為 ___(26)___ 人。

十八、 液體具有黏滯性，通常以黏滯係數η表示液體黏稠的程度。在某一平整表面上塗布一層厚度均勻為z的液體，再平放一面積為A之小平板於平整表面上。當施一外力 F 於小平板，且平行於平整表面時(如圖 15 所示)，小平板相對於平整表面的移動速度v與施力F、液體黏滯係數η、厚度z和接觸面積A的關係式為

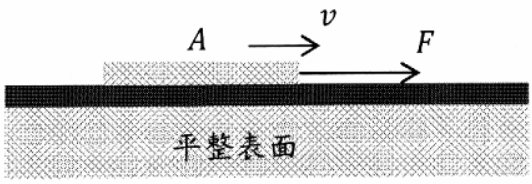


圖 15

$$F=\eta\frac{A}{z}v$$

今於兩鉛直架設之載玻片間塗布一層厚度均勻z之洗碗精，如圖 16 所示。開始時，兩載玻片上下左右對齊，將左邊的載玻片固定住，使右邊的載玻片由靜止開始向下滑動，且下滑過程中的洗碗精厚度維持不變。實驗中得到右邊的載玻片完全滑離左邊的載玻片時，其所需要的時間為17.00秒。則兩載玻片之間所塗布洗碗精的厚度$z=$ ___(27)___ μm(以微米為單位)；(b) 右邊的載玻片由靜止下滑至載玻片長度的一半時，所需要的時間$t_{\frac{1}{2}}=$ ___(28)___ 秒。

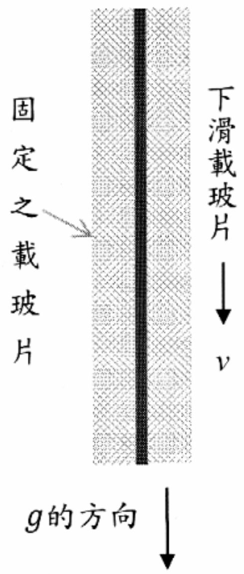


圖 16

備註：相關數值

1. 載玻片之長度為7.60×10^{-2}m，寬度為2.60×10^{-2}m，厚度為0.80×10^{-3}m；且載玻片之密度為$2.50\times10^{3}\ kg/m^3$。

2. 洗碗精的黏滯係數為0.83 kg/m·s。

3. 重力加速度量值為$g = 9.80\mathrm{m/s^2}$。

【提示】：積分公式$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，當$n \neq -1$。

十九、 太空站的結構俯視圖，如圖 17 所示，內外環之間有三個連接的管道。管道是介於內圓環(R_1)和外圓環(R_2)之間，即管道是在$R_1 < R < R_2$之間，其中R是管道中某點和太空站中心的距離。管道的長度為$R_2 - R_1$，截面為長方形，高度為h。在R處的弧線長度為$R\theta$，θ為連接管道左右兩壁與中心軸所形成的夾角。若太空站內空氣溫度恆為定值T，空氣可視為由單一種分子組成的理想氣體，每個分子質量為m。已知太空站繞中心軸以角速率ω自轉，空氣被帶動一起轉動並達到平衡。若在管道R處的空氣壓力為P，在$R + \Delta R$處的壓力為$P + \Delta P$，已知$\frac{\Delta P}{P} = C \times R\Delta R$，則係數$C$等於___(29)___。(設$k_B$為波茲曼常數)

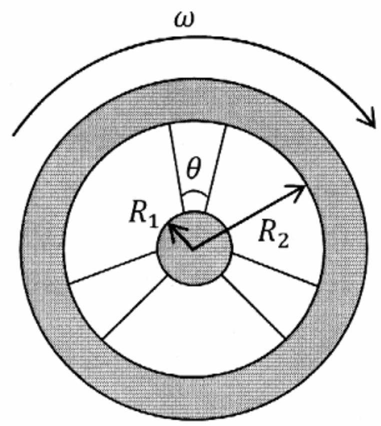


圖 17：太空站俯視圖

若通道中空氣壓力$P(R)$與R的關係形式為$P(R) = P_1 e^{f(R)}$，其中P_1為空氣在R_1處的壓力，則函數$f(R)$等於___(30)___。

【提示】：微分公式 $de^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot df(x)$

積分公式$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，當$n \neq -1$。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、 受力加速運動的方塊與圓柱體

考慮在一水平桌面放置一個方塊，質量為 M，和一半徑為 r、質量為 m 的圓柱體，如下圖 18 所示。方塊M與桌面間的動摩擦係數為 $\mu_k = 0.3$，方塊M與圓柱體m材質接近，且之間的接觸面亦有摩擦，其動摩擦係數為 $\nu_k = 0.3$。從方塊左方向右施一力 F，使方塊與圓柱體一起向右加速移動。已知圓柱體以純滾動形式加速，即圓柱體與地面間並無滑動，則

(a)系統的加速度為何？(5 分)

(b)地面對圓柱體所施的摩擦力為何？(5 分)

(c)方塊與圓柱體間的作用力為何？(5 分)

【提示】：圓柱m之轉動慣量等於$\frac{1}{2}mr^2$。

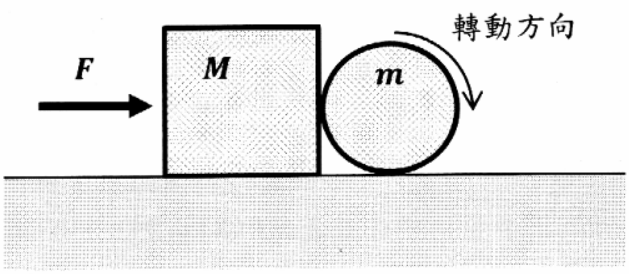


圖 18

二、 大氣的溫度T和壓力P隨離地面的高度h的增加而遞減。設在地面處（$h = 0$）的大氣溫度和壓力分別為T_0和P_0，大氣溫度和離地高度之間的函數關係式為

$$T = T_0 - ah \tag{1}$$

式中$a = 6.50 \times 10^{-3} Km^{-1}$；而大氣壓力和離地高度之間的函數關係式為

$$P = P_0\left(1 - \frac{a}{T_0}h\right)^{5.23} \tag{2}$$

注意：T和T_0皆為絕對溫度。大氣成分除了氧氣和氮氣之外，還有水蒸氣、二氧化碳等氣體。大氣壓力為這些氣體成分分壓的和。假設大氣內各氣體成分的組成比例維持不變，和離地的高度無關。在0~ 50℃的溫度範圍內，水蒸氣的飽和蒸氣壓$P_s(T)$，可以下式表之：

$$P_s(T) = P_s(T_0)e^{5210\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)} \tag{3}$$

其中$P_s(T_0)$為地面水蒸氣的飽和蒸氣壓。

(a) 今在地面處測得大氣壓力為一大氣壓（$= 1.01 \times 10^5\ Pa$），氣溫為26.0℃，空氣中的相對濕度為70%，已知在該溫度的飽和蒸氣壓等於$3.36 \times 10^3\ Pa$，則

地面上空氣中的水蒸氣壓為何？(3 分)

(b) 根據以上的資料，估算天空中雲層下緣的大氣溫度，即大氣中的水蒸氣開始凝結時所在高度的溫度為多少℃？(8 分)

(c) 依據(b)的結果，估算天空中雲層下緣的離地高度，即大氣中的水蒸氣開始凝結時所在的高度為多少公尺？(4 分)

【註】：相對濕度的定義：相對濕度 $= \frac{\text{空氣中的水蒸氣壓}}{\text{當時氣溫的飽和蒸汽壓}} \times 100\%$。

2015 年第 16 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 46 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、填充題

一、(1) 4.2

解：

設地球半徑為R，同步衛星繞地球的週期為T，則 GPS 衛星繞行的週期為$\frac{T}{2}$，若 GPS 衛星繞行地球的半徑為r，則依據克卜勒第三定律得

$$\frac{(6.6R)^3}{r^3}=\frac{T^2}{\left(\frac{T}{2}\right)^2}\ , \tag{1}$$

上式整理後得$r^3=\frac{(6.6R)^3}{4}$，因此 GPS 衛星繞行的半徑為

$$\frac{6.6}{\sqrt[3]{4}}R=4.2R \tag{2}$$

二、(2) $2v$

(3) $4\frac{mv^2}{\ell}+mg$

解：

(2) 因是彈性碰撞，且$M\gg m$，故撞擊後瞬間，球的速度為$2v$。

(3) 碰撞之後，球作圓週運動，故細線上張力為

$$\frac{m(2v)^2}{\ell}+mg=4\frac{mv^2}{\ell}+mg \tag{1}$$

三、(4) $Mg=(M+m)a$

(5) $\tan\theta=(M+m)/M$

解：

(4) 開始滑動時小方塊與m斜面之間的作用力消失，此時直角木塊m僅受到Mg的拉力，M和m以相同的加速度a移動，故

$$Mg=(M+m)a \tag{1}$$

所以系統M和m的加速度等於$Mg/(M+m)$，表示直角木塊m的加速度也等於$Mg/(M+m)$。

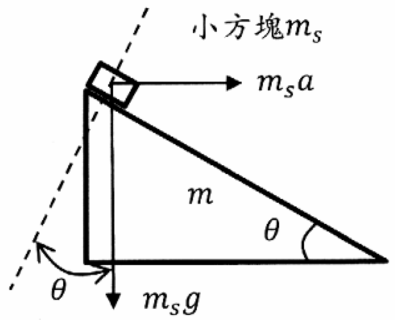
(5)參考右圖，設小方塊的質量為m_s，當m和m_s兩者間沒有作用力，表示m移動的足夠快，而使得m_s以自由落體方式下降。當兩者之間恰沒有作用力時，自開始滑動到t的時間內，若直角木塊m水平移動了S的距離，則小方塊以自由落體方式下降了$S\times\tan\theta$的高度。由(4)的結果知$S\times\tan\theta=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Mg}{M+m}\cdot t^2\right)\times\tan\theta$，而由自由落體的公式得到小方塊下降的高度為$\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$，因此

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Mg}{M+m}\cdot t^2\right)\times\tan\theta=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \qquad (2)$$

由上式得$\tan\theta=\frac{M+m}{M}$。

另解：

在固定於直角木塊的加速度座標系中，當直角木塊m剛開始移動時，小方塊m_s相對於直角木塊m的加速度為$a=Mg/(M+m)$，方向向右，如右圖所示。當沿斜面法線方向的合力(含假想力)恰為零時，m和m_s之間沒有作用力，其條件為：



$$m_s g\cos\theta=m_s g\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=m_s a\sin\theta \qquad (3)$$

故得解為$\tan\theta=\frac{g}{a}=\frac{M+m}{M}$。

四、(6) <u>0.80</u>

(7) <u>0.51</u>

解：

(6) 動量$|\boldsymbol{p}|$值最小時，橡膠球高度最高，故直接由$|\boldsymbol{p}|$-t圖得知，反彈至最高點所需時間為0.80 s。

(7) 由$|\boldsymbol{p}|$-t圖對稱的特性得知：該橡膠球反彈後，僅受到重力，不受任何阻力。由$t=0.00$ s的數據知道反彈瞬間動量量值為5.00 kg.m/s。最高點之動量量值為3.00 kg.m/s，此為過程中水平動量的量值。因為水平不受任何阻力，反彈至最高點的鉛直方向速度分量為零，因此在反彈瞬間($t=0.00$ s)動量的鉛直分量量值為4.00 kg.m/s。由$|\boldsymbol{p}|$-t圖知：已知最高點的鉛直速度為$V_f=0$，反彈瞬間鉛直初速度為V_i，由速度的公式$V_f=V_i-gt=0$，得知反彈瞬間之鉛直方向速度V_i的量值為$9.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times0.80\ \mathrm{s}=7.84\ \mathrm{m/s}$。設球的質量為$M$，由動量定義$p=Mv$，將最高點的動量$p=4.00$ kg.m/s代入前式，則$4.00\ \mathrm{kg}.\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=M\times7.84\ \mathrm{m/s}$，得$M=0.51$ kg。

五、(8) 下降

解：

設木桶的重量為$W_{木}$，金屬塊的重量為$W_{金}$、密度為$\rho_{金}$，而水的密度為$\rho_{水}(<\rho_{金})$，。

當金屬塊在小木桶內時，所排開之水的體積為$\frac{W_{木}+W_{金}}{\rho_{水}g}$，當 W 擲入水後，所排開之水的體積為$\frac{W_{木}}{\rho_{水}g}+\frac{W_{金}}{\rho_{金}g}$，因金屬密度比水大，故 W 擲入水後，所排開之水的體積較小，故水面下降。

六、(9) $P+\frac{mg}{\pi r^2}$

(10) $\left(P+\frac{mg}{\pi r^2}\right)\frac{\rho\pi r^2 l_i}{m}-\frac{mg}{\pi r^2}$

解：

(9) 浮力等於mg，也等於所排開的液體重。假設液面與細管中液面距離為d_0，則所排開之液體重為$mg=\rho d_0\pi r^2 g$，因此得d_0為

$$d_0=\frac{m}{\rho\pi r^2} \tag{1}$$

計算p_i需要考慮活塞內氣體壓力(P)和深度為d_0液體重量所造成壓力$(\rho g d_0)$，即p_i等於兩者之和，故

$$p_i=P+\rho g d_0=P+\rho g\frac{m}{\rho\pi r^2}=P+\frac{mg}{\pi r^2} \tag{2}$$

另解：

因為細管內氣體受到液面上方氣體施力向下$(P\times\pi r^2)$，又同時受到液體的浮力向上(mg)，故$p_i\times\pi r^2=P\times\pi r^2+mg$，故$p_i=P+\frac{mg}{\pi r^2}$。

(10) 當細管平口端恰與水面齊平時，設細管內空氣柱的高度為l_1、壓力為p_1，活塞內氣體壓力為P_1，則

$$mg=\rho l_1\pi r^2 g \tag{3}$$

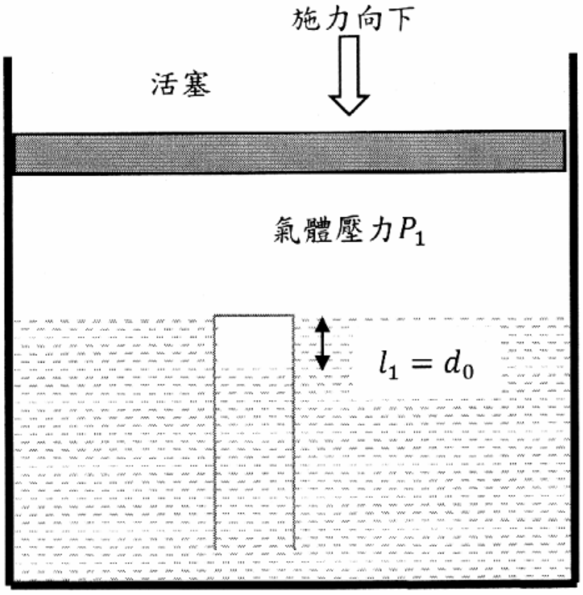
$$l_1=\frac{m}{\rho\pi r^2}=d_0 \tag{4}$$

因為波以耳定律，$p_1 d_0=p_i l_i$，故壓力p_1等於

$$p_1=\left(P+\frac{mg}{\pi r^2}\right)\frac{\rho\pi r^2 l_i}{m} \tag{5}$$

又$p_1 = P_1 + \rho g l_1$，即活塞內氣體壓力$P_1 = p_1 - \rho g l_1$，故

$$P_1 = \left(P + \frac{mg}{\pi r^2}\right)\frac{\rho \pi r^2 l_i}{m} - \frac{mg}{\pi r^2} \tag{6}$$



七、(11) 1.6

(12) 6.3×10^3

解：

(11) 由穩流的連續性方程式，進入推進器的水，其體積流率Q等於水由出口離開的體積流率：

$$Q = v_j \frac{\pi}{4} d^2 = 8.0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.50)^2 = 1.57 = 1.6 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \tag{1}$$

(12) 在Δt的時間內，由出口離開與經進口流入的水，其動量差為

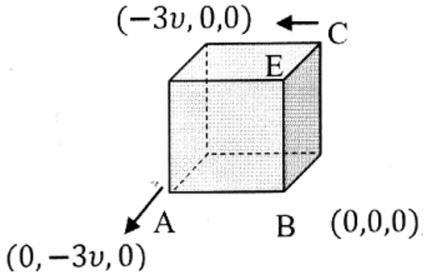
$$\Delta P = \rho(Q\Delta t)(v_j - v_f) \tag{2}$$

因動量差ΔP的時變率量值須等於推力F，故由(2)式可得

$$F = \left|\frac{\Delta P}{\Delta t}\right| = \rho Q(v_j - v_f) = 10^3 \cdot 1.57 \cdot (8.0 - 4.0) = 6.3 \times 10^3\ N \tag{3}$$

八、(13) $(\sqrt{10}/2)v$

解：

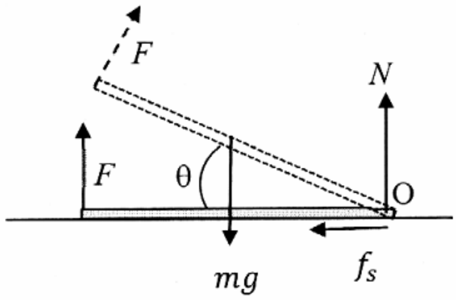


如右圖所示，在與B點(也可取C或A點)一起運動的座標系中，A點的速度為$(0, -3v, 0)$，即A點相對於B點的運動速度為$(0, -3v, 0)$。同理C點的速度為$(-3v, 0,0)$，因為金屬可視為剛體，故在此B點座標系中，金屬塊對BE軸轉動，故O點在此B點坐標系之速率為$(3\sqrt{2}/2)v$，

故 O 點的速度可寫為$(-3v/2,-3v/2,0)+(v,0,0)=(-v/2,-3v/2,0)$，其速率為$\sqrt{10}/2v$。

九、(14) $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}$

解：



如右圖所示，設細棒長l，質量為m，作用在細棒另一端 O 點之正向力為N，摩擦力為f_s，則由力平衡可得

$$F\sin\theta=f_s \qquad (1)$$

$$F\cos\theta+N=mg \qquad (2)$$

力矩平衡可得 $$Fl=mg\frac{l}{2}\cos\theta \qquad (3)$$

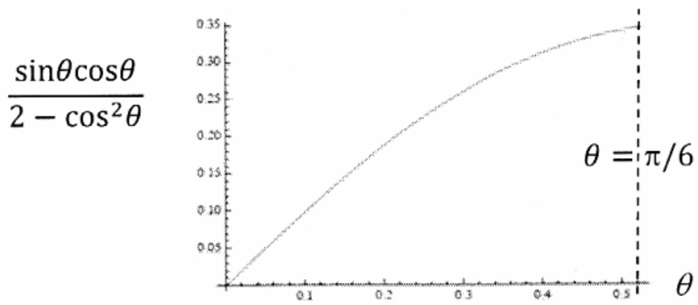
由(3)式可得$F=mg\cos\theta/2$，將F代入(1)式可得$f_s=\frac{mg}{2}\cos\theta\sin\theta$。

將F代入(2)式可得$N=mg-\frac{mg}{2}\cos^2\theta$，因為靜摩擦力$f_s\le\mu_s N$，其中$\mu_s$為最大靜摩擦係數，故可得

$$\frac{mg}{2}\cos\theta\sin\theta\le\mu_s\left(mg-\frac{mg}{2}\cos^2\theta\right)\mu_s \qquad (4)$$

故$\mu_s\ge\frac{\sin\theta\cos\theta}{2-\cos^2\theta}$，等號成立開始滑動時，但$\frac{\sin\theta\cos\theta}{2-\cos^2\theta}$在達到滑動值前必需是遞增函數（檢查如下圖），故

$$\mu_s=\left.\frac{\sin\theta\cos\theta}{2-\cos^2\theta}\right|_{\theta=\pi/6}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{5} \qquad (5)$$



十、(15) $\underline{2\pi\sqrt{\dfrac{1}{2gc}}}$

(16) $4mgc^2x_0^2$

解：

(15) 設在軌道的最低點之位能為 0，故當鐵環下滑垂直至高度為 y 、距最低點的水平距離為 x 時，鐵環的位能為$U = mgy$，軌道方程式為$y = cx^2$，因此又位能可以寫成：

$$U = mgcx^2 \tag{1}$$

則此簡諧運動的等效彈力常數為$k = 2mgc$。

鐵環的動能可以寫成

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4c^2x^2) \sim \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2}$$

由能量守恆得總能量等於$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgcx^2$，將其微分後得：$0 = m\ddot{x}^2 + 2mgcx$，

故簡諧運動的周期為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2gc}} \tag{3}$$

即當時間為$2\pi\sqrt{\frac{1}{2gc}}$時，鐵環又回到初始點。

(16) 當鐵環到達拋物軌道最低點時，沿 x方向沒有加速度（$\ddot{x} = -2gcx$），故加速度為y軸方向：

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\dot{y} = \frac{d}{dt}(2cx\dot{x}) = 2c\dot{x}^2 + 2cx\ddot{x} \tag{4}$$

在最低點鐵環的受力等於

$$F - mg = m\ddot{y} = 2mc\dot{x}_1^2 \tag{5}$$

其中$\dot{x}_1$為在最低點鐵環的速率，此速率是由起點的位置決定，由能量守恆定律知

$\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(2mgc)x_0^2$，故

$$\dot{x}_1^2 = 2gcx_0^2 \tag{6}$$

代入(23)式得

$$F - mg = 2mc\dot{x}_1^2 = 4mgc^2x_0^2 \tag{7}$$

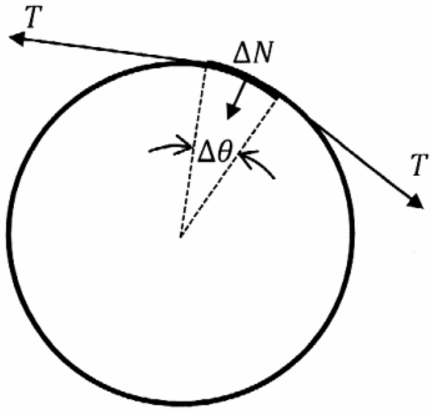
另解

F等於鐵環的重量，再加上鐵環在該點所受到的向心力。由向心力公式知$F - mg = m\frac{\dot{x}_1^2}{r_1}$，其中$r_1$為最低點的等效半徑，且$r_1 = \frac{1}{2c}$，故$m\frac{\dot{x}_1^2}{r_1} = m\frac{2gcx_0^2}{1/2c} = 4mgc^2x_0^2$。

十一、 (17) $e^{(2n+1)\pi\mu}$

解：

如右圖，在很小的角度$\Delta\theta$範圍內，考慮細線繞圓柱的線段，此線段兩端的張力約略相等，因為兩者的差值為其間的摩擦力Δf，但在$\Delta\theta \to 0$的條件下，$\Delta f \to 0$。設其為T，由可知，此$R\Delta\theta$線段作用在圓柱上的合力ΔN，即是$R\Delta\theta$線段作用在圓柱上的正向力ΔN。由圖中可以得到$\frac{\Delta N/2}{T} = \frac{\Delta\theta}{2}$，即$\Delta N = T\Delta\theta$。另外，$R\Delta\theta$線段兩端的張力差即是此正向力作用所得到的摩擦力$\Delta f = \Delta N \cdot \mu = T\mu\Delta\theta$，也就是說，線在環繞圓柱的角度為$\theta$處和在$\theta + \Delta\theta$處的張力差為$T\mu\Delta\theta$，故$T\mu\Delta\theta = T(\theta + \Delta\theta) - T(\theta)$，即



$$T\mu = \frac{T(\theta + \Delta\theta) - T(\theta)}{\Delta\theta} \tag{1}$$

當$\Delta\theta \to 0$，上式改寫為$T\mu = \frac{dT}{d\theta}$，即

$$\mu d\theta = \frac{dT}{T} \tag{2}$$

兩邊積分$\int_0^{(2n+1)\pi} \mu d\theta = \int_{T_m}^{T_M} \frac{dT}{T}$，其中$T_M$是懸吊$M$端的細線張力，而$T_m$是$m$端細線的張力，積分後可得：$\ln\frac{T_M}{T_m} = \mu(2+1)\pi$，或$T_M = T_m e^{\mu(2n+1)\pi}$，即

$$\frac{T_m}{T_M} = e^{-\mu(2n+1)\pi} \tag{3}$$

當線在環繞圓柱的角度為θ處和在$\theta + \Delta\theta$處的張力差為$-T\mu\Delta\theta$，也會得到一樣的結果，此時$T_M = T_m e^{-\mu(2n+1)\pi}$，即

$$\frac{T_m}{T_M} = e^{\mu(2n+1)\pi} \tag{4}$$

因為$\frac{T_m}{T_M} = \frac{mg}{Mg} = \frac{m}{M}$，所以細線不滑動的條件為

$$e^{-\mu(2n+1)\pi} < \frac{m}{M} < e^{+\mu(2n+1)\pi} \tag{5}$$

十二、 (18) $\underline{\frac{9\pi^2 - 32}{36\pi^2} MR^2}$

(19) $\sqrt{\dfrac{2I_{C1}}{M}}$

解：

(18) 因為轉動慣量的定義是：$\int r^2dm$，其中質量dm與轉軸相距為r，因此繞半圓盤 C 點的轉動慣量為$\frac{1}{4}MR^2$，且依據平行軸定理得到其與I_{C1}的關係式為

$$\frac{1}{4}MR^2 = I_{C1} + \frac{1}{2}M\left(\frac{4}{3\pi}R\right)^2 \tag{1}$$

故得

$$I_{C1} = MR^2\left(\frac{1}{4} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = \frac{9\pi^2 - 32}{36\pi^2}MR^2 \tag{2}$$

(19) 由平行軸定理知，該點的振盪週期為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{1}{2}Mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{C1} + \frac{1}{2}Mx^2}{\frac{1}{2}Mgx}} \tag{3}$$

經平方整理後可得

$$\frac{1}{8\pi^2}MgT^2 = \frac{I_{C1}}{x} + \frac{1}{2}Mx \tag{4}$$

T的最小值，也就是$\frac{1}{8\pi^2}MgT^2$的最小值，故將上式對微分後令其等於零，即可求得x最小值x_{min}，故

$$0 = -\frac{I_{C1}}{x_{min}^2} + \frac{1}{2}M \tag{5}$$

得x_{min}等於$\sqrt{\frac{I_{C1}}{\frac{1}{2}M}} = \sqrt{\frac{2I_{C1}}{M}}$。

十三、 (20) $M\dfrac{F}{M+m}$

(21) $\dfrac{3}{4}\dfrac{F-(M+m)g}{(M+m)L}$

解：

(20) 因為木塊M與薄木板m間沒有相對移動，可視為一體，故推力F造成的系統加速度a為

$$a = \frac{F}{M+m} \tag{1}$$

依據牛頓第三運動定律，木塊受到一個反向的慣性力$f = Ma$，故木塊質心所受的合力大小即為

$$f = M\frac{F}{M+m} \tag{2}$$

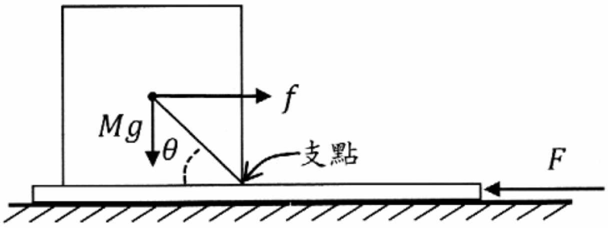
(21) 設木塊質心至支點連線與水平的45度夾角為$\theta = \frac{\pi}{4}$，故$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，如圖所示，則總力矩$\tau(\theta)$為

$$\tau(\theta) = f\frac{L}{\sqrt{2}}\sin\theta - Mg\frac{L}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{2}L(f - Mg) \tag{3}$$

初始時故(3)式等於$I\alpha$，其中α為角加速度，I為轉動慣量，且等於

$$I = \frac{1}{6}ML^2 + M\frac{1}{2}L^2 = \frac{2}{3}ML^2 \tag{4}$$

由(3)和(4)式得



$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}L(f - Mg)}{\frac{2}{3}ML^2} = \frac{3}{4}\frac{\left(\frac{MF}{(M+m)} - Mg\right)}{ML} = \frac{3}{4}\frac{F - (M+m)g}{(M+m)L} \tag{5}$$

十四、 (22) <u>1/2</u>

(23) <u>$z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{\ell}}t\right)$</u>

解：

(22) 靜止的上活塞所受向下重力mg與氣體壓力P_{up}所造成向上的力$P_{up}A$，其兩者合力為零，$P_{up}A - mg = 0$，故

$$P_{up} = \frac{mg}{A} \tag{1}$$

下活塞所受之合力也為零，包括向下的重力mg，上方氣體壓力P_{up}所造成向下的力$P_{up}A$，及下方氣體壓力P_{down}所造成的向上的力$P_{down}A$，即$P_{down}A - P_{up}A - mg = 0$，將(1)式代入得

$$P_{down} = \frac{2mg}{A} \tag{2}$$

唧筒內的氣體溫度T相同，上下兩氣室的體積也相同，依照理想氣體方程式，$PV = nRT$，得知$\frac{P}{n}$等於一個定值。因此上方氣體的莫耳數n_{up}和下方氣體莫耳數

n_{down}的比值等於

$$\frac{n_{up}}{n_{down}}=\frac{P_{up}}{P_{down}}=\frac{\frac{mg}{A}}{\frac{2mg}{A}}=\frac{1}{2} \tag{3}$$

(23) 下活塞的運動方程式為：$m\ddot{z}=\Delta P_{down}A-\Delta P_{up}A$，其中$\Delta P_{down}$為下氣室的壓力隨$z(t)$的變化，因為氣體保持等溫，故$\Delta P_{down}=\frac{n_{down}RT}{A(\ell+z)}-\frac{n_{down}RT}{A\ell}=n_{down}RT\left[\frac{1}{A(\ell+z)}-\frac{1}{A\ell}\right]$，即

$$\Delta P_{down}A=2mg\ell\left[\frac{1}{(\ell+z)}-\frac{1}{\ell}\right] \tag{4}$$

同理，ΔP_{up}為上氣室的壓力隨$z(t)$的變化，故$\Delta P_{up}=\frac{n_{up}RT}{A(\ell-z)}-\frac{n_{up}RT}{A\ell}=n_{up}RT\left[\frac{1}{A(\ell-z)}-\frac{1}{A\ell}\right]$，即

$$\Delta P_{up}A=mg\ell\left[\frac{1}{(\ell-z)}-\frac{1}{\ell}\right] \tag{5}$$

因為$z_0\ll\ell$，故$\frac{1}{(\ell+z)}=\frac{1}{\ell}\left(1+\frac{z}{\ell}\right)^{-1}\approx\frac{1}{\ell}\left(1-\frac{z}{\ell}\right)$，而$\frac{1}{(\ell-z)}=\frac{1}{\ell}\left(1-\frac{z}{\ell}\right)^{-1}\approx\frac{1}{\ell}\left(1+\frac{z}{\ell}\right)$，故(4)和(5)式可以近似為

$$\Delta P_{down}A=2mg\left(-\frac{z}{\ell}\right) \tag{4'}$$

和

$$\Delta P_{up}A=mg\left(\frac{z}{\ell}\right) \tag{5'}$$

將上兩式代入下活塞的運動方程式，得$m\ddot{z}=2mg\left(-\frac{z}{\ell}\right)-mg\left(\frac{z}{\ell}\right)=-m\frac{3g}{\ell}z$，即

$$m\ddot{z}=-\frac{3mg}{\ell}z \tag{6}$$

(6)式是一個簡諧振盪的標準形式，$k=\frac{3mg}{\ell}$，故週期為$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{3mg}{\ell}}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}}$，振動角頻率$\omega$為$\frac{2\pi}{T}=2\pi\sqrt{\frac{3g}{\ell}}$，所以$z(t)=z_0\cos\left(\sqrt{\frac{3g}{\ell}}t\right)$。

十五、 (24) <u>2R</u>

解：

(24) 流體的熱力學第一定律公式為$dQ = dU + PdV$；其中U為系統內能、Q為加入系統之熱能、P和V則分別為系統之壓力和體積。對單原子理想氣體而言，一莫耳理想氣體的內能$U(=\frac{3}{2}RT)$是僅與系統溫度T有關，故此系統所遵循的第一定律可以改寫為：

$$dQ = dU + PdV = \frac{3}{2}RdT + PdV \qquad (1)$$

假設此時活塞所在位置距容器左端x處，則氣體體積$V = Ax$，故$dV = Adx$，而此時彈簧施予活塞之力為$F = kx$，故壓力$P = kx/A$，所以$dP = kdx/A$，可以發現$PdV = VdP$，因為

$$PdV = \frac{kx}{A} \cdot Adx = kxdx = Ax \cdot \frac{kdx}{A} = VdP \qquad (2)$$

由 1 莫耳理想氣體方程式$PV = RT$，知$d(PV) = PdV + VdP = RdT$，故$PdV = \frac{1}{2}RdT$，代入(42)得

$$dQ = \frac{3}{2}RdT + \frac{1}{2}RdT \qquad (3)$$

因此$\frac{dQ}{dT} = 2R$，也就是氣體的比熱為$2R$。

十六、 (25) __7__

解：

設金屬板單位時間吸收太陽之熱量是$\dot{q_s}$，為一個定值。若 A 面之溫度為T_A(K)，B 面之溫度為T_B(K)，因空氣溫度為306 K，則因熱傳導單位時間由 A 與 B 面流出到空氣的熱量各為

$$\dot{q_A} = \alpha(T_A - 306) \text{ 與 } \dot{q_B} = \alpha(T_B - 306) \qquad (1)$$

其中α為一常數，由能量守恆可知 $\dot{q_s} = \dot{q_A} + \dot{q_B} = \alpha(T_A + T_B - 612)$，且是一個定值，故

$$T_A + T_B = \text{常數} = 702 \qquad (2)$$

另外因熱傳導單位時間由 A 面流到 B 面之熱量為$\dot{q_{AB}} = \frac{k}{d}(T_A - T_B)$，其中$k$為一常數，$d$為金屬板厚度，故 B 面的熱平衡表示$\frac{k}{d}(T_A - T_B) = \alpha(T_B - 306)$，因此若$d_0$為原先金屬板厚度，金屬板厚度為原先的 n 倍，則

$$\frac{k}{d_0}(360 - 342) = \alpha(342 - 306) \qquad (3)$$

$$\frac{k}{nd_0}(T_A - T_B) = \alpha(T_B - 306) \qquad (4)$$

由將$T_A = 702 - T_B$代入，由(3)/(4)可得$T_B = \frac{1404+306n}{n+4} \leq 323$，故$n \geq \frac{112}{17} = 6.58$，故得$n = 7$。

十七、 (26) 1,300,000

解：

長城所需的磚石砂土總質量M為

$$M = \rho(W \times H \times L) = 2200 \times (6.0 \times 8.0 \times 5000 \times 10^3) = 5.28 \times 10^{11}\ \mathrm{kg} \quad (1)$$

將磚石砂土從山腳下的平地運至山頂而增加的重力位能V_1為

$$V_1 = Mgh = 5.28 \times 10^{11} \times 9.8 \times 200 = 1.03 \times 10^{15}\ \mathrm{J} \quad (2)$$

將已運至山頂上的磚石砂土，築成城牆所增加的重力位能為

$$V_2 = Mg\frac{1}{2}H = 5.28 \times 10^{11} \times 9.8 \times \frac{1}{2} \times 8 = 2.07 \times 10^{13}\ \mathrm{J} \quad (3)$$

將兩者相加，故築城所需增加的總位能V為

$$V = V_1 + V_2 = 1.05 \times 10^{15}\ \mathrm{J} \quad (4)$$

築城費時 9 年，每一勞工每日所做的有效功為2.5×10^5 J，故築城所需的總人數N為

$$N = \frac{1.05 \times 10^{15}}{2.5 \times 10^5 \times 9 \times 365} = 1.3 \times 10^6\ 人 \quad (5)$$

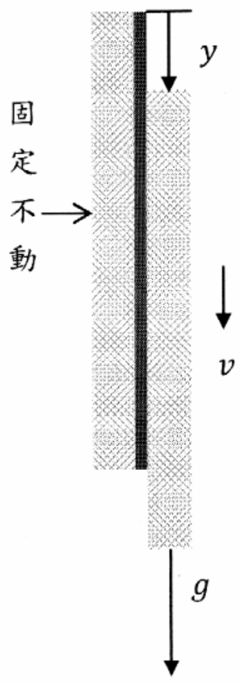
估計當時為了建造長城所徵集的勞工人數約為 130 萬人。

十八、 (27) 94.66 μm

(28) 12.75 s

解：

令載玻片尺寸為$LxWxT$(長 × 寬 × 厚)，密度為ρ，滑動後示意如圖所示。



由基本定義$F = \frac{\eta v A}{z}$，得

$$F = Mg = LWT\rho g = \frac{\eta \cdot \frac{dy}{dt} \cdot W(L-y)}{z} \quad (1)$$

其中y是下滑的高度，故速度$v = \frac{dy}{dt}$。(1)式可經整理後得

$$dt = \frac{\eta}{LT\rho g z}(L-y)dy \quad (2)$$

由(2)式知，時間t為下滑距離y的函數。(2)式積分後得

$$t(y) = \frac{\eta}{LT\rho g z}\left(Ly - \frac{1}{2}y^2\right) \quad (3)$$

(27) 已知右邊載玻片由靜止到完全滑離固定之載玻片時，$y = L$，而所需時間為 17.00 s，將其代入(3)式得

$$17.00 = \frac{\eta}{LT\rho gz}\left(L \cdot L - \frac{1}{2}L^2\right) = \frac{\eta L}{2T\rho gz} \qquad (4)$$

將載玻片之$L = 7.60 \times 10^{-2}\mathrm{m}$，$T = 0.80 \times 10^{-3}\mathrm{m}$；$\rho = 2.50 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，和洗碗精之$\eta = 0.83\ \mathrm{kg/m{\cdot}s}$，以及$g = 9.80\mathrm{m/s^2}$代入(4)式，得$z = 94.66 \times 10^{-6}\mathrm{m} = 94.66\ \mu\mathrm{m}$（大約是人類頭髮粗細）。

(28) 當$y = \frac{1}{2}L$時，由(3)式得 $t_{\frac{1}{2}} = \frac{3\eta L}{8T\rho gz}$，且(25)的結果$z = 94.66 \times 10^{-6}\mathrm{m}$代入，

得$t_{\frac{1}{2}} = 12.75\ \mathrm{s}$。

十九、 (29) $\underline{\dfrac{m\omega^2}{k_B T}}$

(30) $\underline{\dfrac{m\omega^2}{2k_B T}(R^2 - R_1^2)}$

解：

(29) 因為管道中為理想氣體，故$PV = Nk_BT$，設n為管道中單位體積內的分子數量，得$P = nk_BT$。因為旋轉的關係，P與n皆隨R改變，由力學平衡知在ΔR範圍內所產生的向心力為$mn(R\theta h \cdot \Delta R)R\omega^2$，即

$$P + \Delta P = P + \frac{mn(R\theta h \cdot \Delta R)R\omega^2}{R\theta h} = P + mnR\omega^2 \cdot \Delta R \qquad (1)$$

因此$\Delta P = mnR\omega^2 \cdot \Delta R$，故

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{mnR\omega^2 \cdot \Delta R}{nk_BT} = \left(\frac{m\omega^2}{k_BT}\right)R \cdot \Delta R \qquad (2)$$

由(2)式得$C = \left(\frac{m\omega^2}{k_BT}\right)$。

(30) 利用$P(R) = P_1 e^{f(R)}$的形式，得

$$\frac{dP}{P} = \frac{P_1 e^{f(R)} df(R)}{P_1 e^{f(R)}} = df(R) = C \cdot RdR \qquad (3)$$

由上式得$df(R) = C \cdot RdR$，由R_1到R積分

$$\int_{R_1}^{R} df(R) = \int_{R_1}^{R} C \cdot RdR$$

得$f(R) - f(R_1) = \frac{1}{2}C(R^2 - R_1^2)$，因為$f(R_1) = 0$，所以

$$f(R) = \frac{1}{2}C(R^2 - R_1^2) = \frac{m\omega^2}{2k_BT}(R^2 - R_1^2)$$

貳、計算題

一、 解：

如下圖所示，依據牛頓第三運動定律，方塊施作用力於圓柱體，而方塊受到圓柱體的反作用力。設此力大小為T，其方向是垂直於方塊M與圓柱體m接觸面，因此T的方向與桌面平行。方塊與圓柱體之間的接觸面發生動摩擦，其動摩擦力f_k等於：

$$f_k = T\nu_k \tag{1}$$

方塊也會與地面的接觸面發生動摩擦，其動摩擦力f'_k等於：

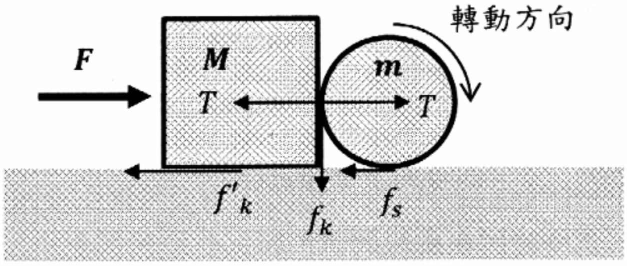
$$f'_k = (Mg - T\nu_k)\cdot\mu_k \tag{2}$$

設加速度為a，則方塊所受的外力合等於Ma，即$F - f'_k - T = Ma$，將(2)式代入，得方塊質心的運度方程式為$F - Mg\mu_k - T(1 - \nu_k\cdot\mu_k) = Ma$，將$\nu_k = 0.3$和$\mu_k = 0.3$代入，得

$$F - 0.3Mg - 0.91T = Ma \tag{3}$$

同理圓柱體質心的運度方程式可以寫成：

$$T - f_s = ma \tag{4}$$



又因為圓柱體是純滾動的運動，因此$a = r\alpha$，其中α為角加速度。圓柱體因為受到兩個摩擦力作用而有純滾動的運動，設圓柱體與桌面的靜摩擦力為f_s，則圓柱體旋轉的運動方程式為$f_s\cdot r - f_k\cdot r = I\alpha$，其中$I(=\frac{1}{2}mr^2)$為圓柱體的轉動慣量，將(1)式代入，得：

$$f_s\cdot r - T\nu_k\cdot r = \frac{1}{2}mr^2\alpha = \frac{1}{2}mra \tag{5}$$

將$\nu_k = 0.3$代入，因此

$$f_s - 0.3T = \frac{1}{2}ma \tag{6}$$

利用(4)式解得$T = f_s + ma$，並代入(3)式和(6)式得，可以得：

$$F - 0.3Mg - 0.91f_s = (M + 0.91m)a \tag{3'}$$

$$0.7f_s = 0.8ma \tag{6'}$$

由 (3')和(6')兩式整理可得

$$a = \frac{F - 0.3Mg}{M + 1.95m} \tag{7}$$

$$f_s = \frac{8}{7} m \left(\frac{F - 0.3Mg}{M + 1.95m} \right) \tag{8}$$

代入(4)式得

$$T = \frac{15}{7} m \left(\frac{F - 0.3Mg}{M + 1.95m} \right) \tag{9}$$

二、 解：

由$T = T_0 - ah$關係式可得

$$h = \frac{T_0 - T}{a} \tag{1}$$

將(1)式代入壓力P與高度h關係式，可得

$$P = P_0 \left[1 - \frac{a}{T_0} \times \frac{T_0 - T}{a} \right]^{5.23} = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.23} \tag{2}$$

(a) 由於假設大氣內各氣體成分的組成比例維持不變，且和離地面的高度無關，因此當地面的氣溫為26°C，相對濕度為70%時，空氣中的水蒸氣分壓為$3.36 \times 10^3 \times 70\% = 2.35 \times 10^3$ Pa，

(b) 在離地高度為h處(及溫度為T位置)的水蒸氣分壓P_{vapor}為

$$P_{vapor} = 2.35 \times 10^3 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.23} \tag{3}$$

(3)式中的P_{vapor}等於飽和蒸氣壓$P_s(T) = P_s(T_0) e^{5210\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$時，可求得空氣中水蒸氣開始凝結時所在處的氣溫，即

$$P_{vapor} = 2.35 \times 10^3 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.23} = P_s(T_0) e^{5210\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} \tag{4}$$

已知$T_0 = 273 + 26 = 299\text{K}$，$P_s(T_0) = 3.36 \times 10^3$ Pa，將之代入(4)式，得

$$\frac{2.35}{3.36} \left(\frac{T}{299} \right)^{5.23} = 0.7 \left(\frac{T}{299} \right)^{5.23} = e^{5210\left(\frac{1}{299} - \frac{1}{T}\right)} \tag{5}$$

(5)式取自然對數後，得

$$\ln T = 9.10 - \frac{996.18}{T} \tag{6}$$

利用數值代入之近似解法，可得$T \cong 291$ K，或18 °C。

(c) 利用(1)式，將$T \cong 291$ K代入，可計算該處的離地高度h為

$$h = \frac{T_0 - T}{a} = \frac{26.0 - 18.0}{6.50 \times 10^{-3}} = 1230 \text{ 公尺}$$

故天空中雲層下緣的離地高度為 1230 m，在該處的大氣溫度為 18.0 °C。