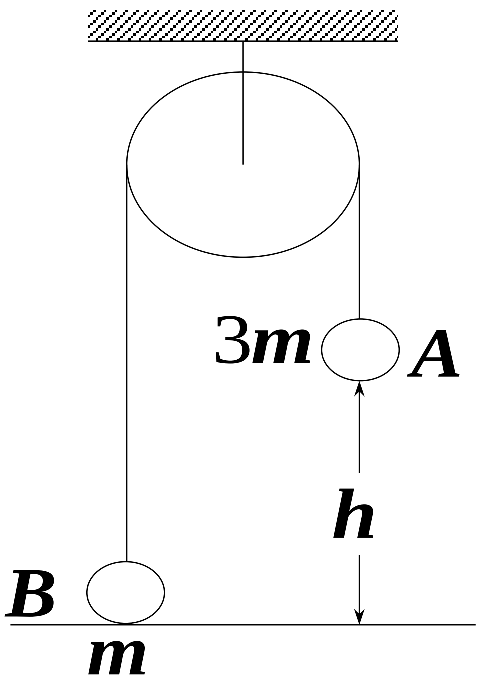
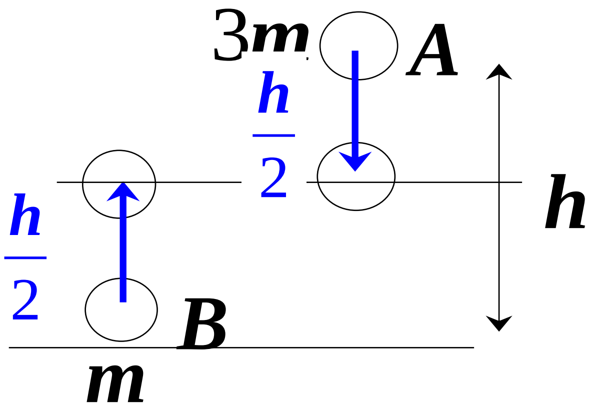
1. 質量為3*m*及*m*之*A*、*B*二球，各繫於一輕繩之兩端，此端跨過一無摩擦之滑輪，設*A*球距地面高*h*，而*B*球靜止於地面，重力加速度g，試問將*A*球釋放後，至兩球同高時，
(1)重力作功多少？(2)兩球與地球的位能損失若干？



[解析]

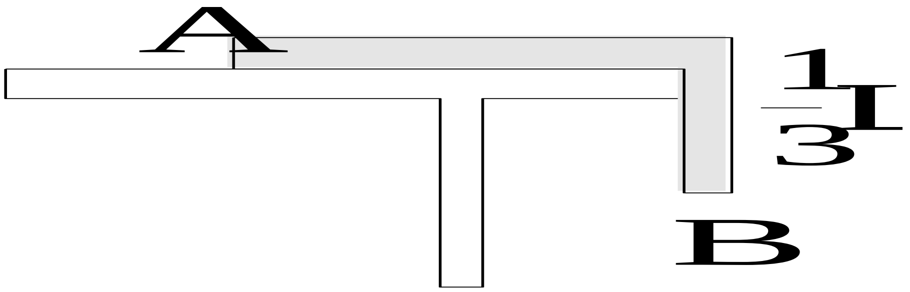


$$(1)W_g = W_g(A)+W_g(B)=+3mg\frac{h}{2}+\left(-mg\frac{h}{2}\right)=mgh$$

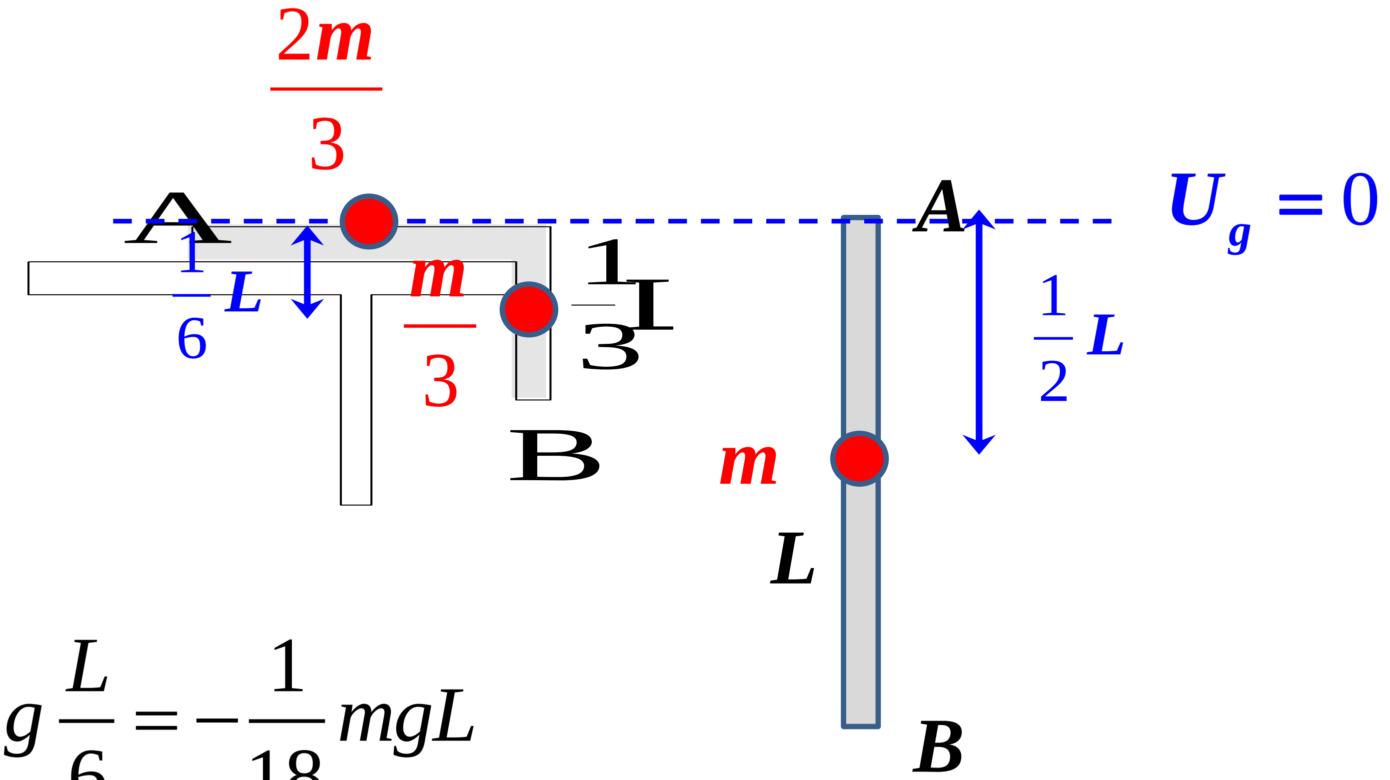
$$(2)\Delta U_g = \Delta U_g(A)+\Delta U_g(B)=-3mg\frac{h}{2}+mg\frac{h}{2}=-mgh$$

$$\boxed{W_g=-\Delta U_g}$$

*2.*質量m、長L之均勻繩索靜置於光滑水平桌面的邊緣，有 $\frac{L}{3}$ 長之繩下垂，當自由釋放後，繩恰離開桌面時，試問：以桌面為位能參考面寫出開始與最後的位能及位能差。（重力加速度g）



[解析]



$$U_g(1) = -\frac{m}{3} g \frac{L}{6} = -\frac{1}{18} mgL$$

$$U_g(2) = -mg\frac{L}{2} = -\frac{1}{2} mgL$$

$$\therefore \Delta U_g = U_g(2) - U_g(1) = -\frac{1}{2} mgL - \left(-\frac{1}{18} mgL\right) = -\frac{4}{9} mgL$$

1.功的定義 定力作功 $W_{\mathrm{F}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$

2.動能 $K = \dfrac{1}{2}mv^2$

3.功能定理 $W_{所有力} = \Delta K$

4.重力位能定義 $W_g = -\Delta U_g$

求作功的方法：

1.定力 $W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x}$

2.直線變力 $F-x$圖面積

3.功能定理 $W=\Delta K$

4.重力位能定義 $W_g=-\Delta U_g$

重力位能：

1.定義：$W_g = -\Delta U_g$

2.一般式(非均勻重力)：$U_g(r) = -\dfrac{GMm}{r}$

[以相距無窮遠為零位面]

3.非均勻重力作功 ：

$$W_g(r_1 \to r_2) = -\Delta U_g = -\left[\left(-\frac{GMm}{r_2}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right)\right]$$

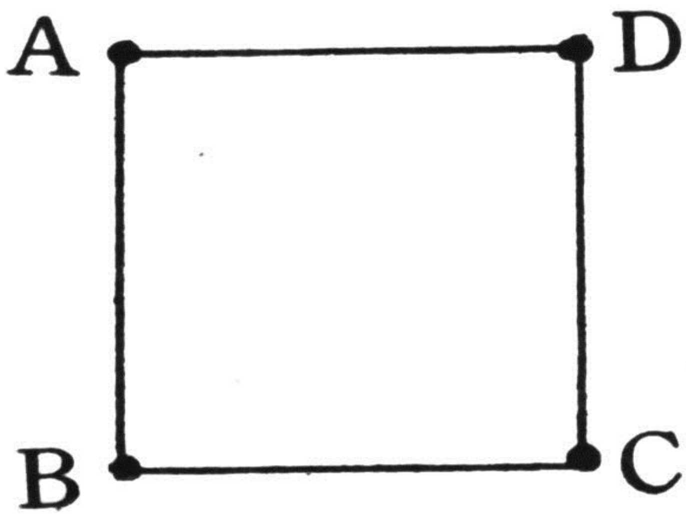
第69頁

1. 如圖所示，在邊長為*a*之正方形四頂點上置有質量均為 之四質點，求：

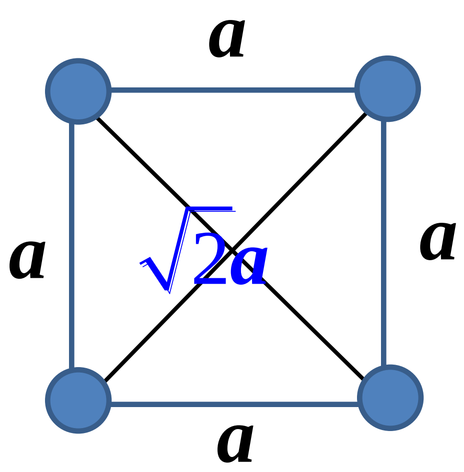
（1）系統之重力位能？

（2）欲將此系統拆散，分別推移四質點至無窮遠處至少需作功？

（3）欲將其中一質點移至無窮遠處至少需作功？



[解析]



(1)兩兩一對共有一個位能 有 $C_2^4=6$ 對

$$U_g(1)=4\times(-\frac{Gmm}{a})+2\times(-\frac{Gmm}{\sqrt{2}a})=-\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a}$$

(2)

最少作功 就是最少施力下所作的功

此時施力＝萬有引力 方向相反

$\therefore$最小施力時

施力作功$W_F = -$萬有引力作功 $W_g =$ 重力位能變化ΔU_g

相距無窮遠時總位能$U_g(2) = 0$

$$\therefore W_F = -W_g = \Delta U_g$$

$$= U_g(2) - U_g(1) = 0 - \left[-\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a}\right] = \frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a}$$

(2)[另解]

功能定理 $W_g + W_F = \Delta K \rightarrow W_F = \Delta K - W_g = \Delta K + \Delta U_g$

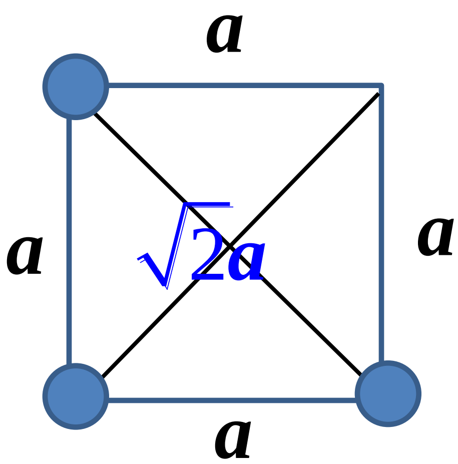
最少作功$(W_F$最小$)$時$\Delta K = 0$

此時 施力作功$W_F =$重力位能變化ΔU_g

相距無窮遠時總位能$U_g(2) = 0$

$\therefore W_F = -W_g = \Delta U_g$

$$= U_g(2) - U_g(1) = 0 - \left[-\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a} \right] = \frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a}$$



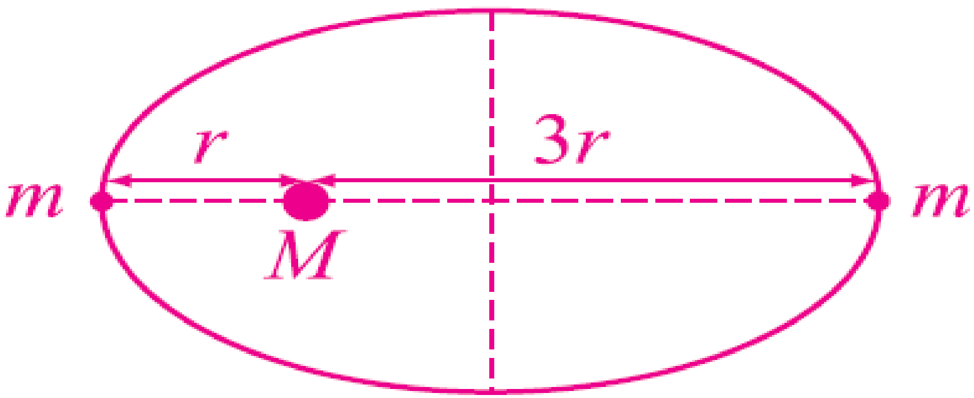
$\left(3\right)$兩兩一對共有一個位能 有 $C_2^3 = 3$ 對

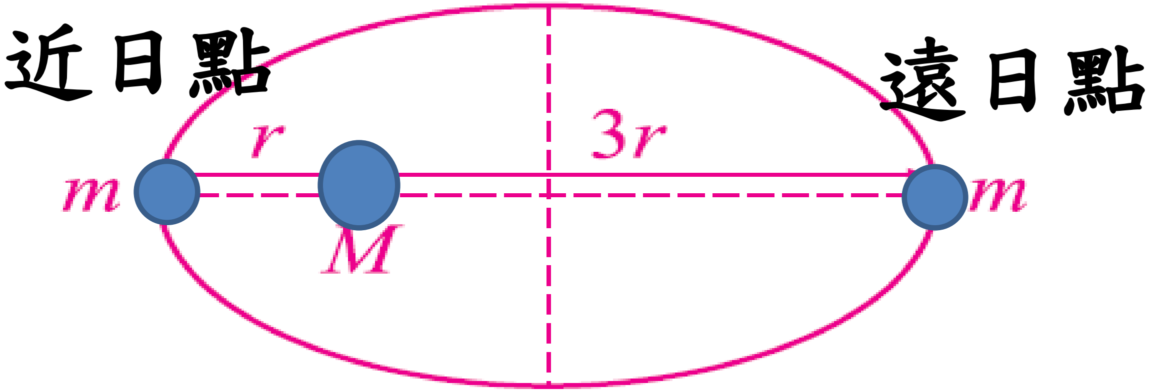
$$U_g\left(3\right) = 2\times\left(-\frac{Gmm}{a}\right) + 1\times\left(-\frac{Gmm}{\sqrt{2}a}\right) = -\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{2a}$$

$$\therefore W_F = -W_g = \Delta U_g$$

$$= U_g\left(3\right) - U_g\left(1\right) = -\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{2a} - \left[-\frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{a}\right] = \frac{\left(4+\sqrt{2}\right)Gm^2}{2a}$$

2. 一質量為 的行星在橢圓軌道上繞質量為 的太陽運動，設行星與太陽之最近距離為 r，而最遠之距離為3r ，則行星由近日點運動至遠日點時，太陽的萬有引力對其所作的功為何？



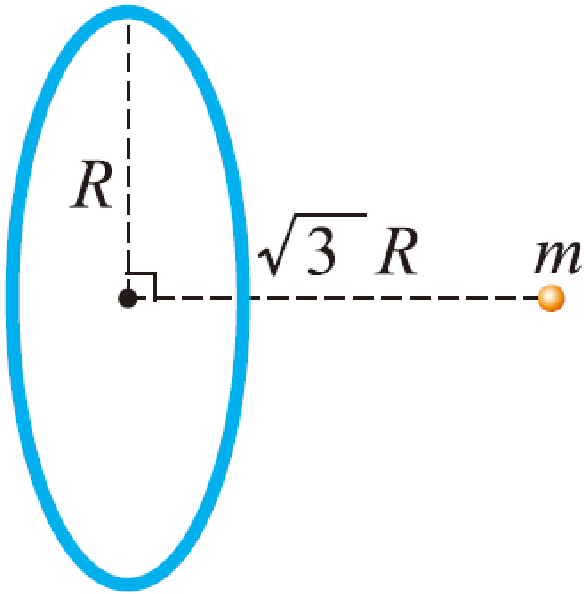


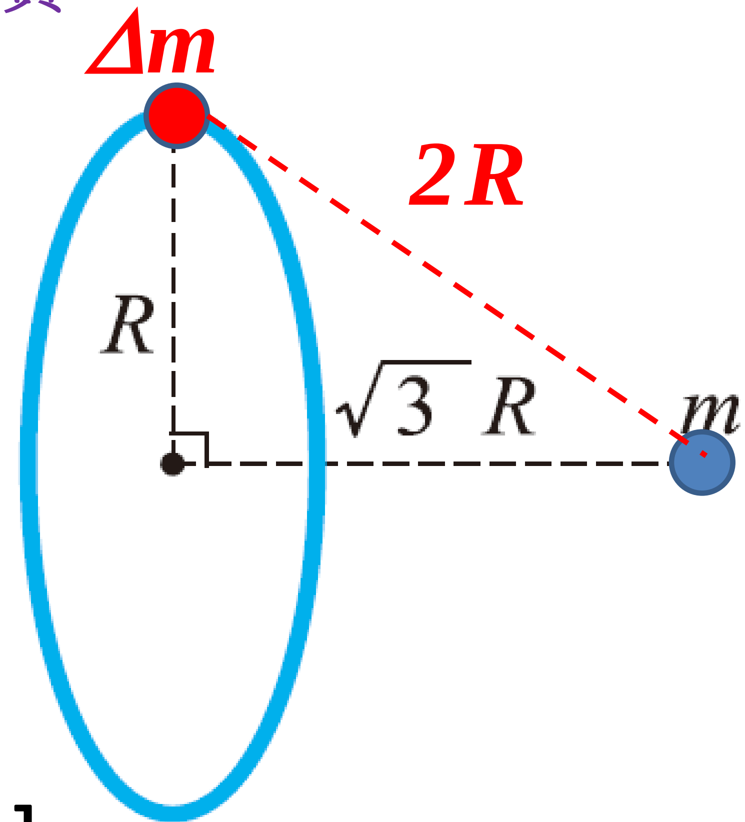
[解析]

$$W_g = -\Delta U_g = U_g(\text{遠日點}) - U_g(\text{近日點})$$

$$= -\frac{GMm}{3r} - \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{2GMm}{3r}$$

太陽系中的木星。土星、天王星外圍都有圓形的環存在，圓環由許多微小的物質所組成。假設在宇宙中有一個圓形環的半徑為R，其總質量為M，如圖所示。在該環的中心軸上，距離環中心 處有一質量為m的質點，圓環M與質點m系統的重力位能為何？（萬有引力常數G，只考慮環與質點共有的重力位能不考慮）





[解析]

$$U_g = \sum_i \left(-\frac{G\Delta M_i m}{2R} \right) = -\frac{G\left(\sum_i \Delta M_i\right)m}{2R} = -\frac{GMm}{2R}$$

彈力位能：

1.定義：$W_s = -\Delta U_s$

2.形變量x時的彈力位能$U_s(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$

[以原長為零位面]

3.彈力作功 ：

$$W_s(x_1 \to x_2) = -\Delta U_s = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

*1.*一物體連接於彈性常數為　200N/m的彈簧上，並可在光滑水平面上，離平衡點為0.60m的範圍內來回振動。求物體自0.60m移動至－0.20m處，彈力對物體作功為？

[解析]

彈力作功 W_s = 重力位能變化的負值 $-\Delta U_s$

$$\therefore W_s = -\Delta U_s(1 \to 2)$$

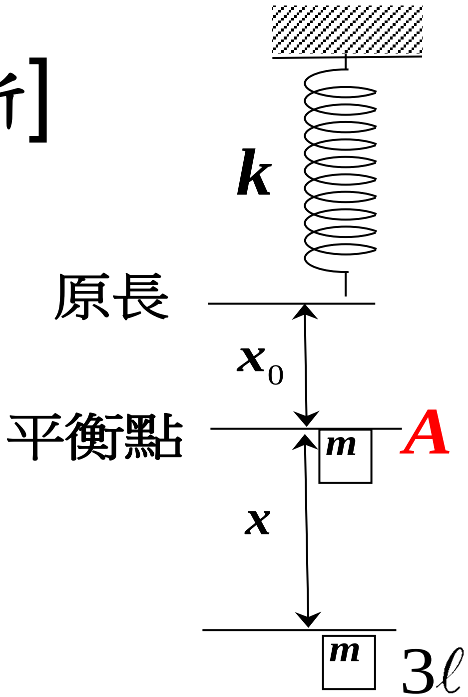
$$= -\left(U_s(2) - U_1(1)\right) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 200 \times \left((0.20)^2 - (0.10)^2\right) = 32[J]$$

第71頁

*2.*彈力常數k之彈簧鉛直懸掛，下端吊一質量為m的物體在平衡時，若施力使物體自平衡點向下拉x距離停止，則：
（A）重力位能變化？（B）彈力位能變化？（C）系統總位能變化？

[解析]



$$(\text{平衡點})\,kx_0 = mg \to x_0 = \frac{mg}{k}$$

$$(1)\,\Delta U_g(A \to B) = -mgx$$

$$(2)\,\Delta U_s(A \to B) = U_s(B) - U_s(A)$$

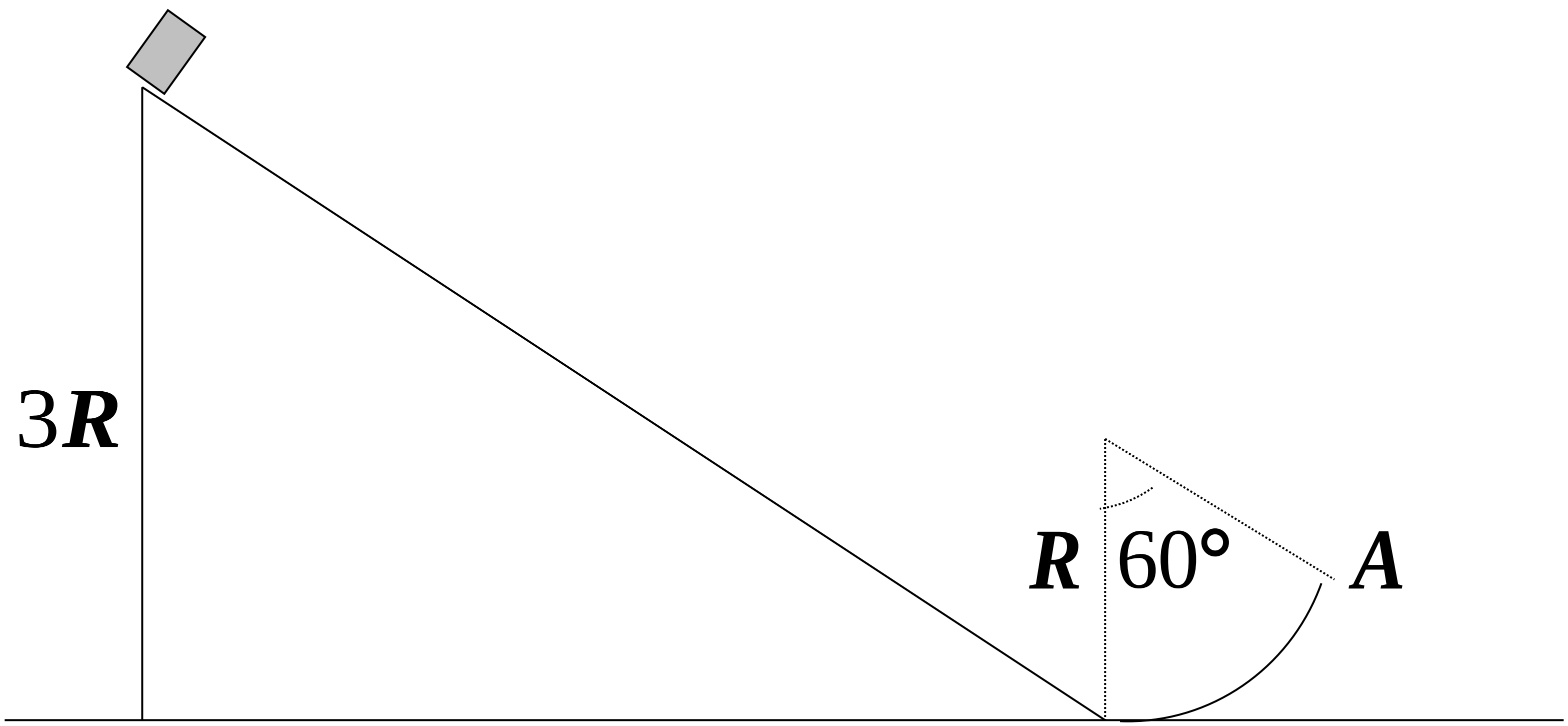
$$= \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0{}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + kxx_0$$

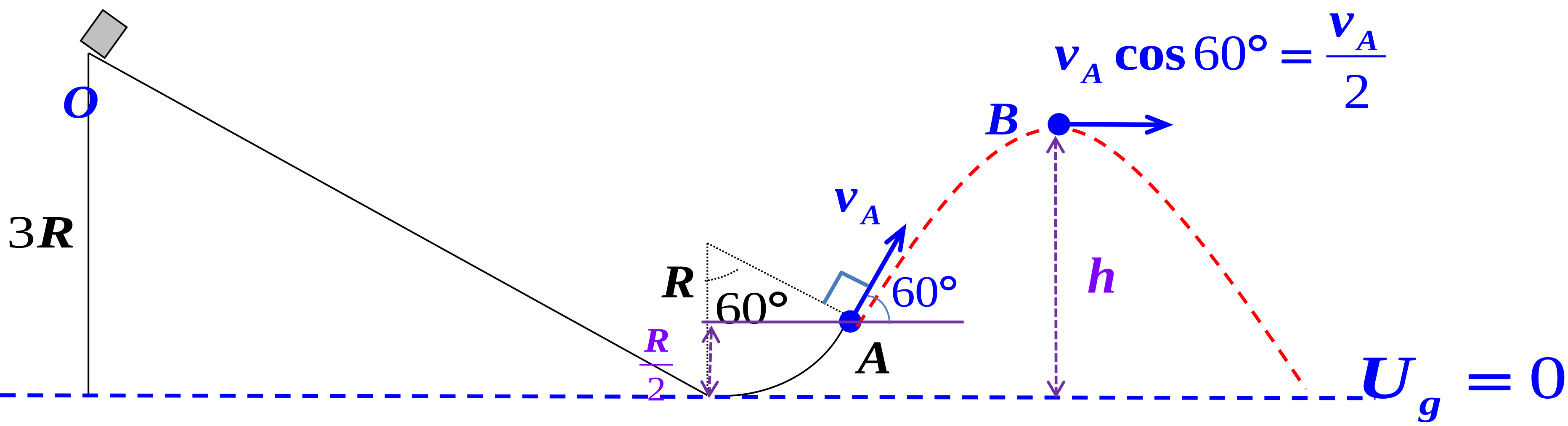
$$= \frac{1}{2}kx^2 + kx \times \frac{mg}{k} = \frac{1}{2}kx^2 + mgx$$

$$(3)\,\Delta U(A \to B) = \Delta U_g(A \to B) + \Delta U_s(A \to B)$$

$$= -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

*2.*質量為m之小物體自距地$3R$的高處沿光滑斜面自靜止下滑，經半徑R的光滑圓曲 面的A點射出，則此物所能達的最大高度距地面多高？





$$(O \to A)\text{力學能守恆}:\left[U_O + K_O = U_A + K_A\right]$$

$$mg3R + 0 = mg\frac{R}{2} + \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \therefore \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{5}{2}mgR$$

$$(O \to B)\text{力學能守恆}:\left[U_O + K_O = U_B + K_B\right]$$

$$mg3R + 0 = mgh + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_A}{2}\right)^2 = mgh + \frac{5}{8}mgR$$

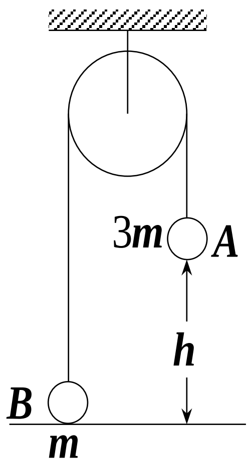
$$\therefore h = \frac{19}{8}R$$

第77頁

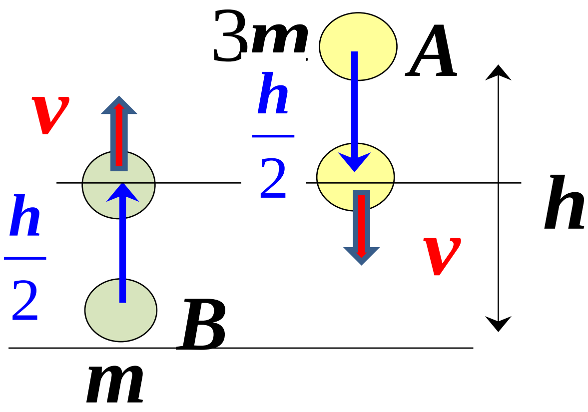
質量為$3m$及m之A、B二球，各繫於一輕繩之兩端，此端跨過一無摩擦之滑輪，設A球距地面高h，而B球靜止於地面，重力加速度g，將A球釋放後，試問：

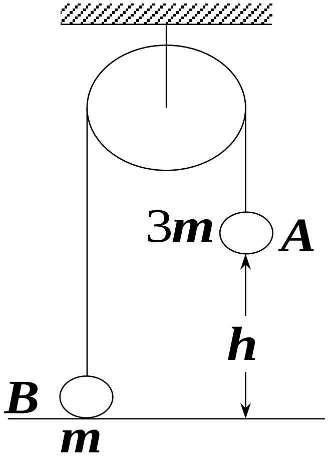
(1) 兩球同高時速度為何？

(2) A球著地後，B球能達到最大高度為何？



[解析]





$(1)(A+B)$力學能守恆：$[\Delta U+\Delta K=0]$

$$\Delta U_g(A)+\Delta U_g(B)+\Delta K(A)+\Delta K(B)=0$$

$$-3mg\frac{h}{2}+mg\frac{h}{2}+\frac{1}{2}3mv^2+\frac{1}{2}mv^2=0$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{1}{2}gh}$$

[解析]

(2)

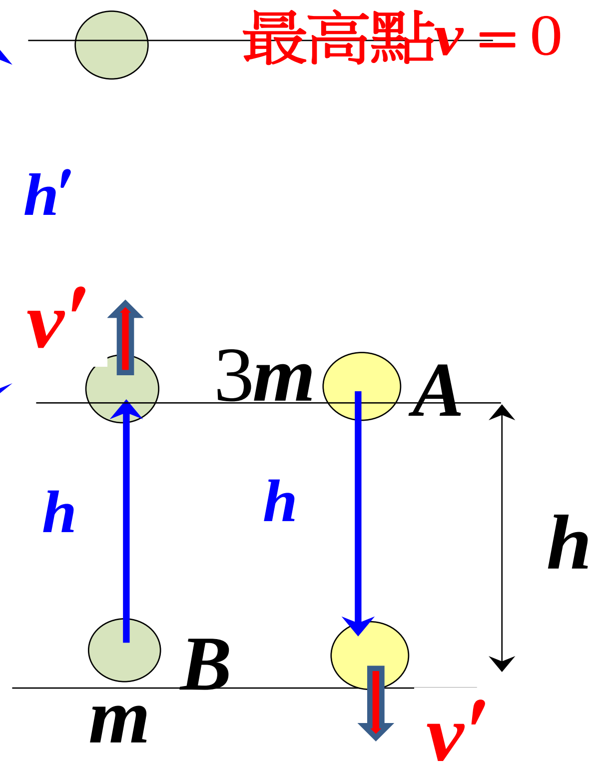
$(A+B)$力學能守恆:

$[\Delta U+\Delta K=0]$

$$\Delta U_g(A)+\Delta U_g(B)+\Delta K(A)+\Delta K(B)=0$$

$$-3mgh+mgh+\frac{1}{2}3mv'^2+\frac{1}{2}mv'^2=0$$

$$\therefore v'=\sqrt{gh}$$

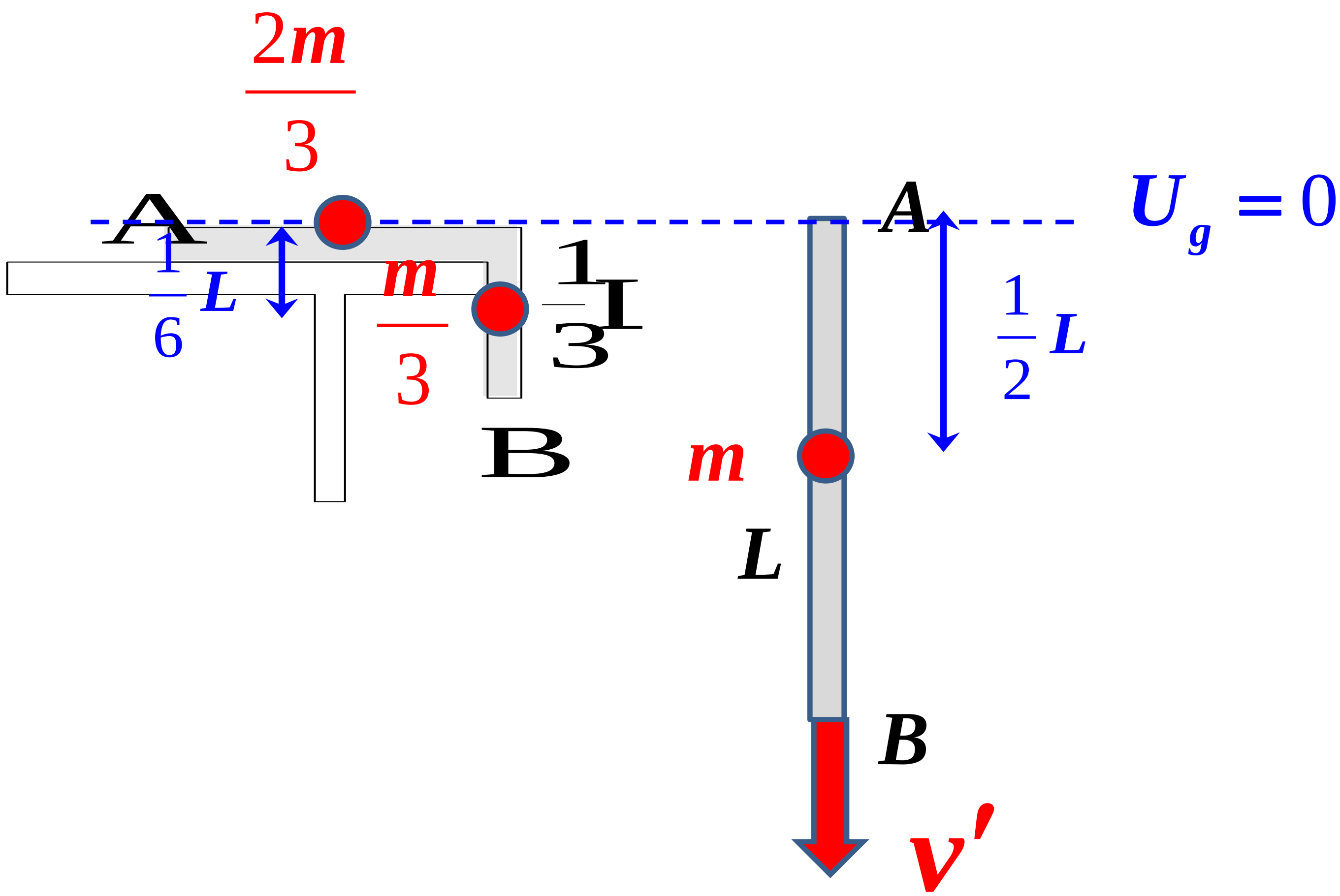


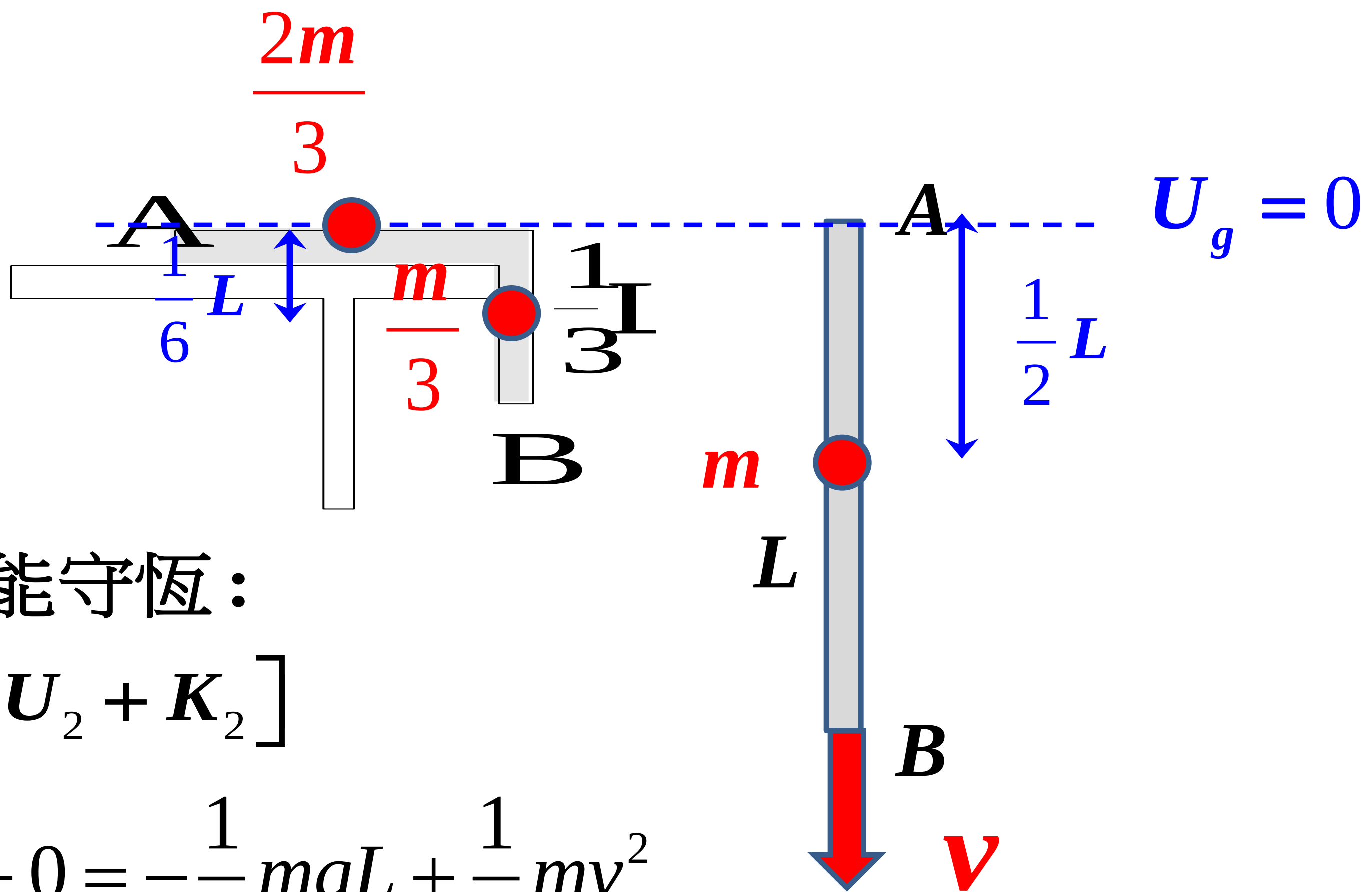
B力學能守恆:$[\Delta U+\Delta K=0]$

$$mgh'+\left(0-\frac{1}{2}mv'^2\right)=0\ \therefore h'=\frac{h}{2}$$

(1) 長L之均勻繩索靜置於光滑水平桌面的邊緣，有L/3 長之繩下垂，當自由釋放後， 繩恰離開桌面時，試問繩恰離開桌面時的速率為？（重力加速度g）

[解析]





全繩力學能守恆：

$$\left[U_1 + K_1 = U_2 + K_2\right]$$

$$-\frac{1}{18}mgL + 0 = -\frac{1}{2}mgL + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{8}{9}gL}$$

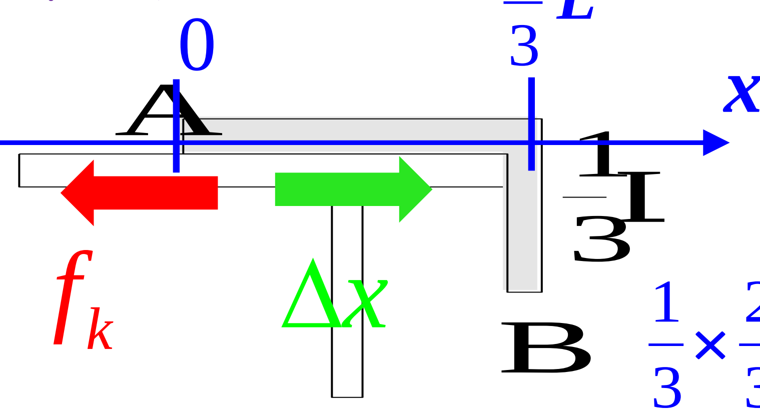
(2) 長L之均勻繩索靜置於動摩擦係數1/3的水平桌面邊緣，有L/3 長之繩下垂，當自由釋放後， 繩恰離開桌面時，試問繩恰離開桌面時的速率為？（重力加速度g）

[解析]

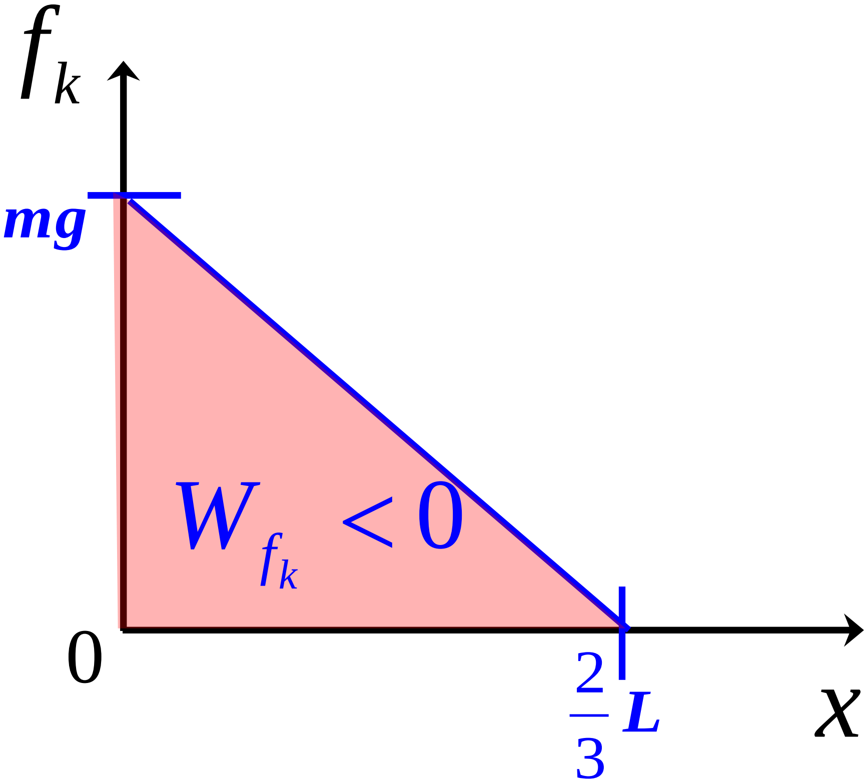
$\because$ 有摩擦力作功 $\therefore$ 不可用力學能守恆

所以使用 功能定理：$\left[\mathbf{W}_{\text{所有力}}=\Delta K\right]$ 求解

$$W_g+W_{f_k}=\Delta K\rightarrow-\Delta U_g+W_{f_k}=\Delta K$$



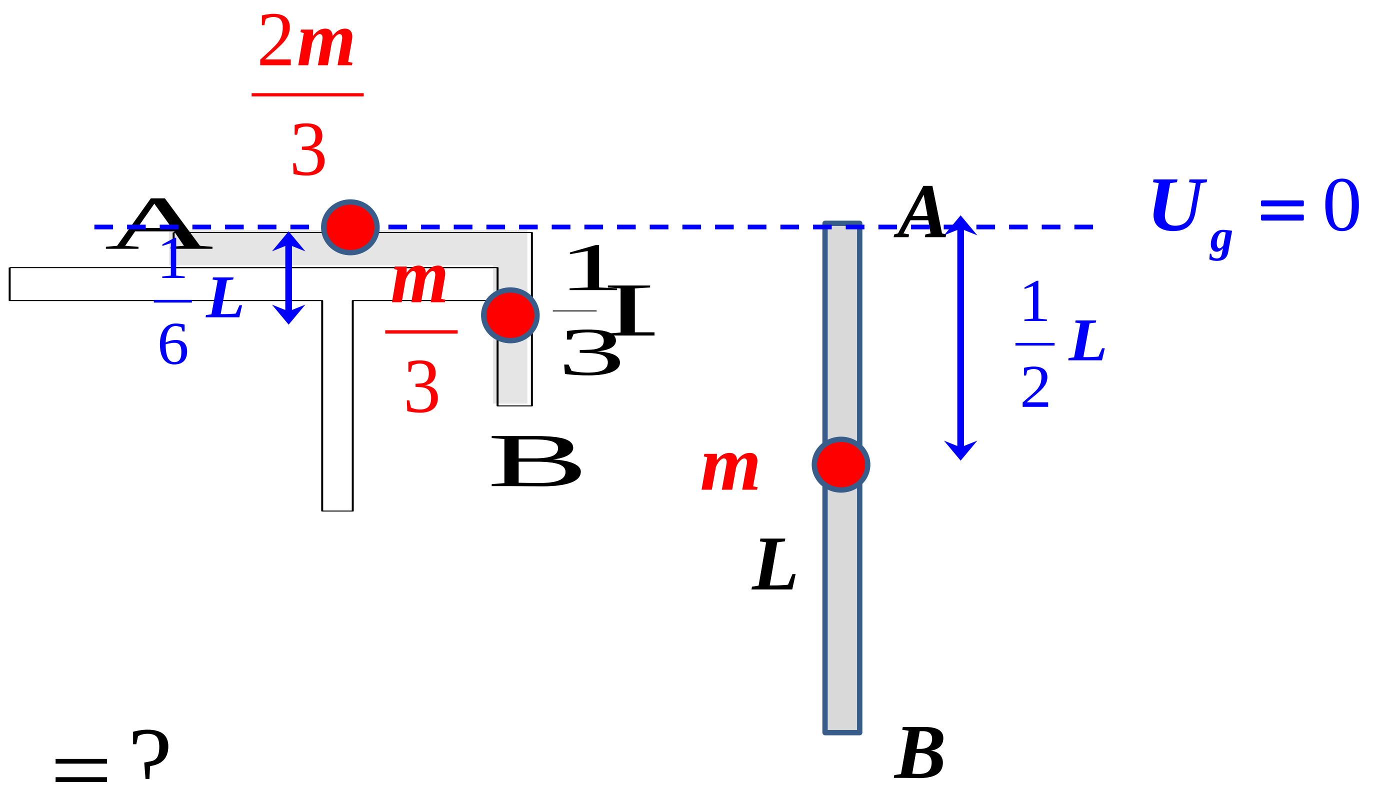
$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}mg=\frac{2}{9}mg$$



求 $W_{f_k}=?$

直線變力作功

$$\therefore W_{f_k}=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}mg\times\frac{2}{3}L=-\frac{2}{27}mgL$$



求$\Delta U_g = ?$

$$\Delta U_g = -\frac{1}{2}mgL - \left(-\frac{1}{18}mgL\right) = -\frac{4}{9}mgL$$

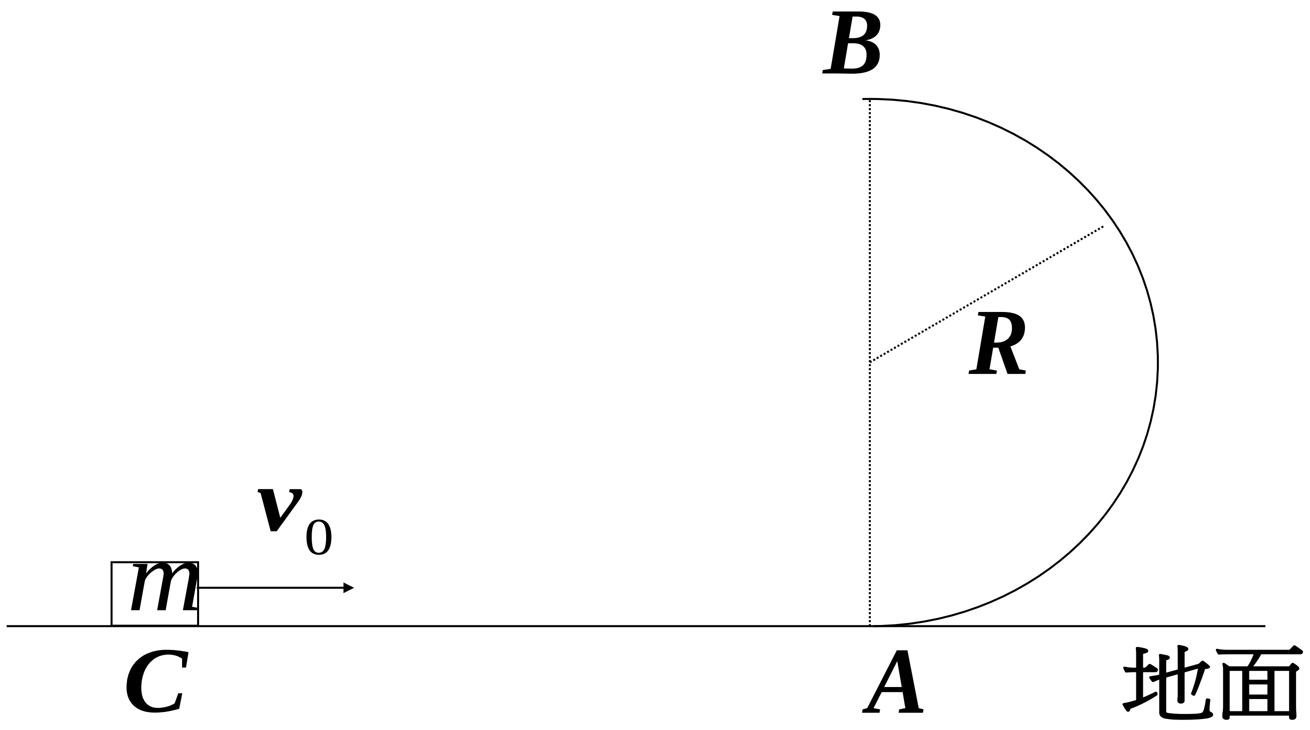
功能定理：$\left[\mathbf{W}_{\text{所有力}} = \Delta \boldsymbol{K}\right]$

$$W_g + W_{f_k} = \Delta K \rightarrow -\Delta U_g + W_{f_k} = \Delta K$$

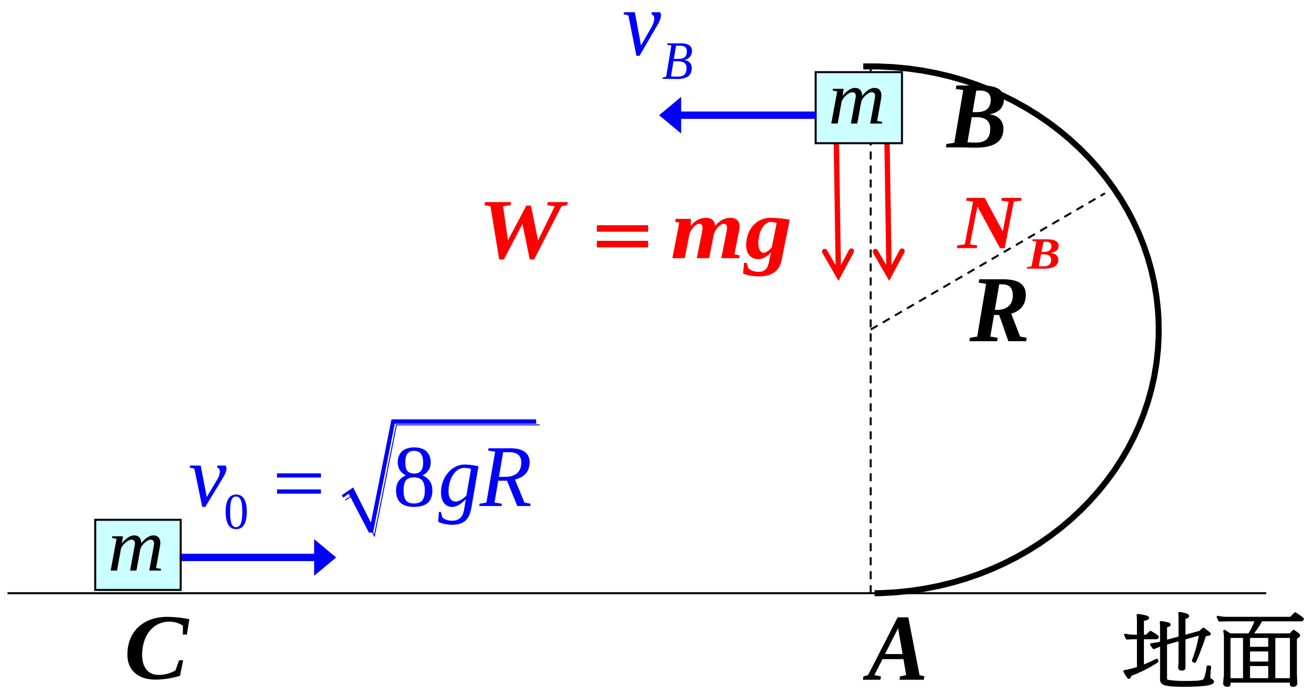
$$\therefore -\left(-\frac{4}{9}mgL\right) + \left(-\frac{2}{27}mgL\right) = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\rightarrow v' = \sqrt{\frac{20}{27}gL}$$

*1.*圖所示，均為光滑面，質量m之物體以$v_0 = \sqrt{8gR}$向右滑行，圓軌道的半徑為R、 重力加速度g，求：(a)抵*B*點時軌道對物體之正向力為何？(b)物體最後落於*AC*面上之點與*A*之距離為何？



(a)

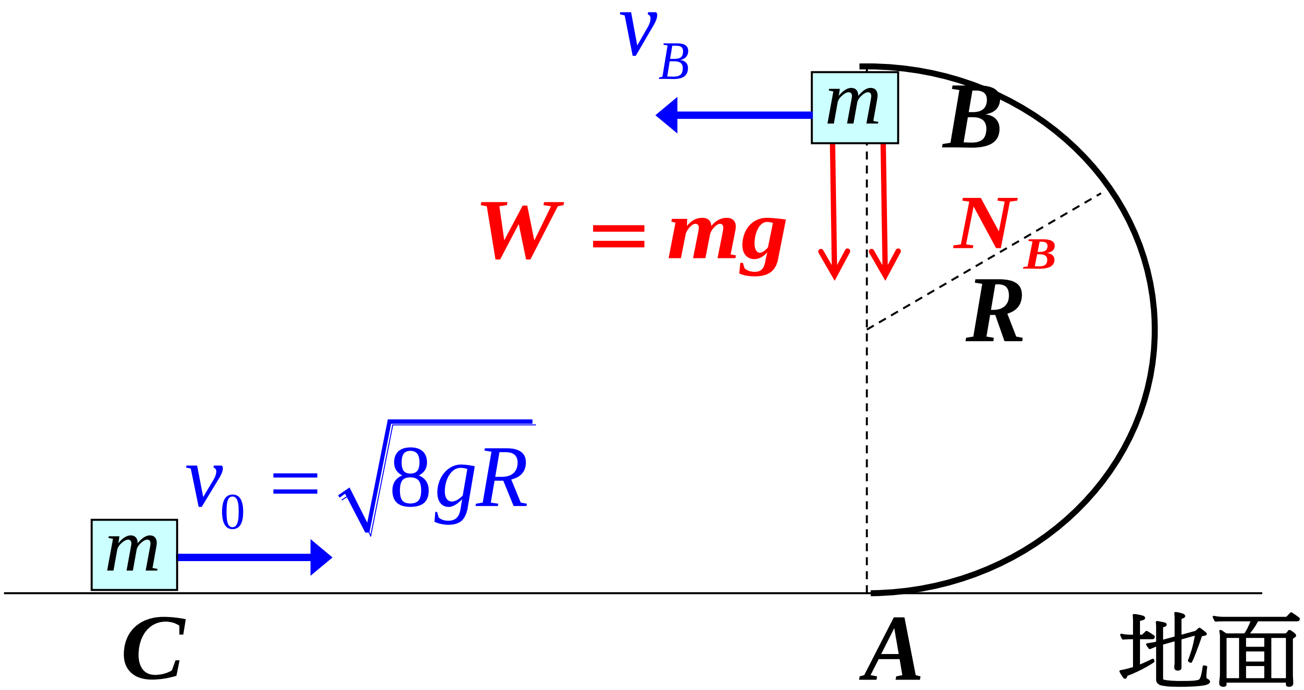


$$力學能守恆:\left[U_C + K_C = U_B + K_B\right]$$

$$0 + \frac{1}{2}m\left(\sqrt{8gR}\right)^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

$$\therefore v_B = \sqrt{4gR}$$

(a)

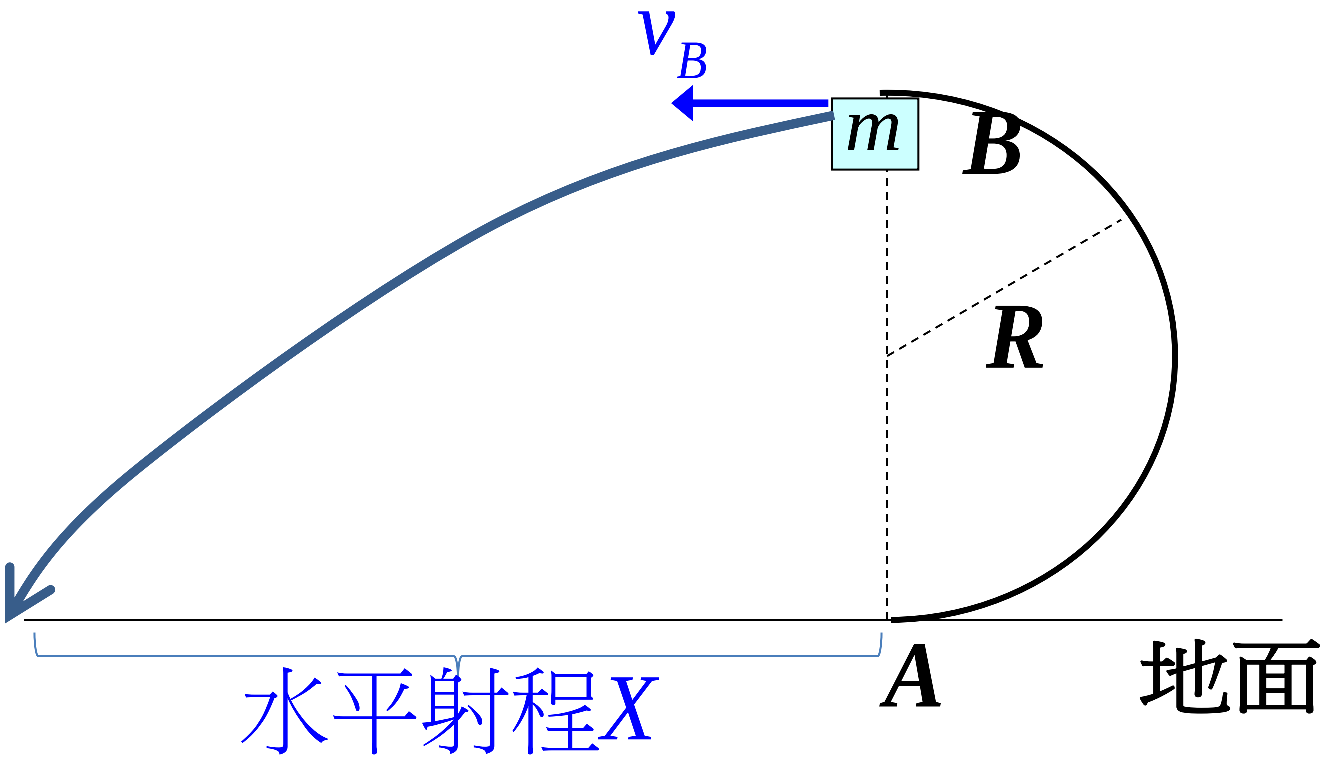


沿半徑方向$\left[F = ma_C\right]$

$$N_B + mg = m\frac{v_B^2}{R} = 4mg$$

$$\therefore N_B = 3mg$$

(b)



看鉛直方向著地歷時 $t=\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

看水平方向射程 $x=v_B t=\sqrt{4gR}\times\sqrt{\dfrac{2R}{g}}=2\sqrt{2}R$

一質量為m的質點，在一無摩擦，半徑為R的鉛直圓形軌道上運動，如圖所示。已知在最高點的速率為$v_0 = \sqrt{\frac{4}{5}gR}$，$g$為重力加速度，則下列敘述何者為正確？

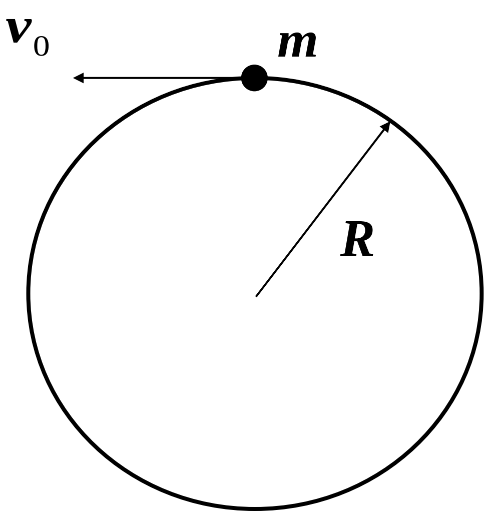
(A)此質點之最大速率為 $\sqrt{6}\boldsymbol{v}_0$ 。

(B)在最高點處，軌道對質點作用力的量值為 $\frac{4}{5}mg$ 。

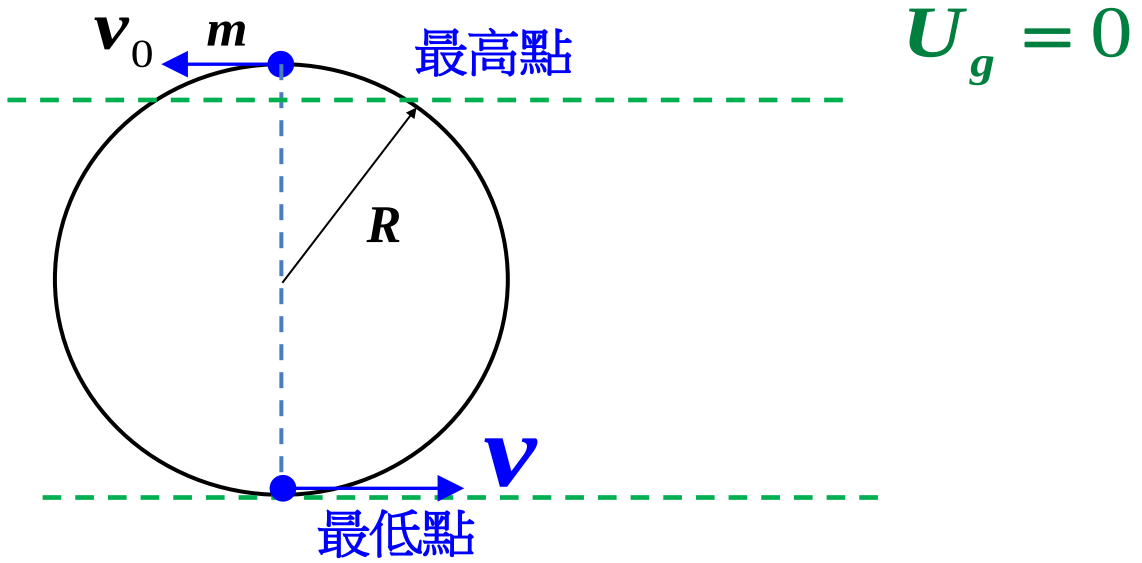
(C)在任一直徑的兩端點上，質點動能之和不變。

(D)此圓周運動之週期大於 $\frac{2\pi R}{v_0}$

(E)在運動過程中，質點對圓心之角動量守恆。



(A)

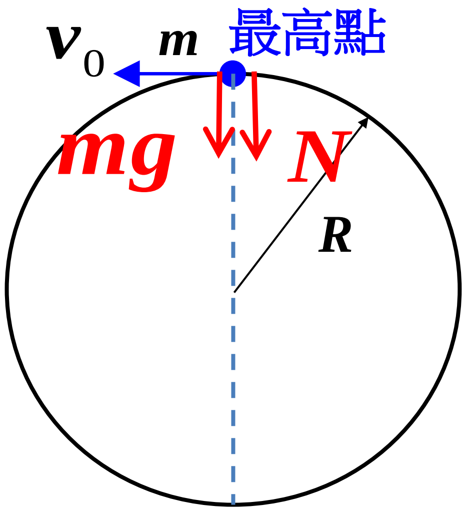


最大速率在最低點時

力學能守恆：最高 $\rightarrow$ 最低$\left[U_1 + K_1 = U_2 + K_2\right]$

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{4}{5}gR}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg2R \quad \therefore v = \sqrt{\frac{24}{5}gR} = \sqrt{6}v_0$$

(B)

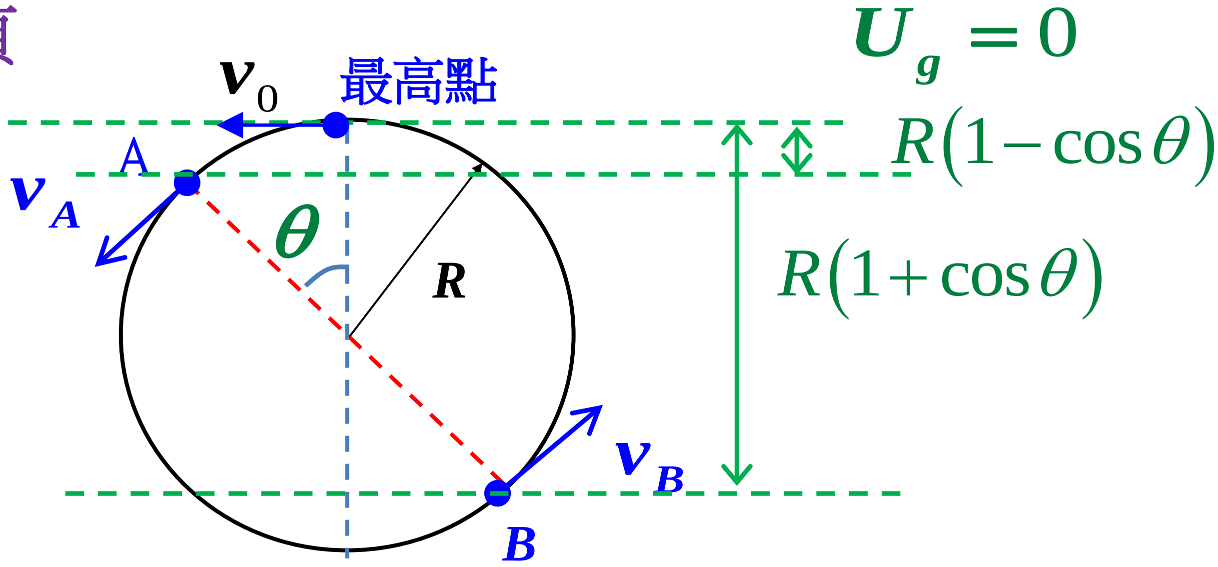


沿半徑方向$\left[F = ma_C\right]$

$$N + mg = m\frac{v_0^2}{R} = \frac{4}{5}mg \quad \therefore N = -\frac{1}{5}mg$$

$\rightarrow$ 量值$\frac{1}{5}mg$ 方向遠離圓心(向上)

(C)



力學能守恆：$\left[U_1 + K_1 = U_2 + K_2\right]$

最高點 $\rightarrow$ **A**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 - mgR\left(1\text{-}\cos\theta\right) \quad \therefore \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR\left(1\text{-}\cos\theta\right)$$

最高點 $\rightarrow$ ***B***

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR\left(1+\cos\theta\right) \quad \therefore \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR\left(1+\cos\theta\right)$$

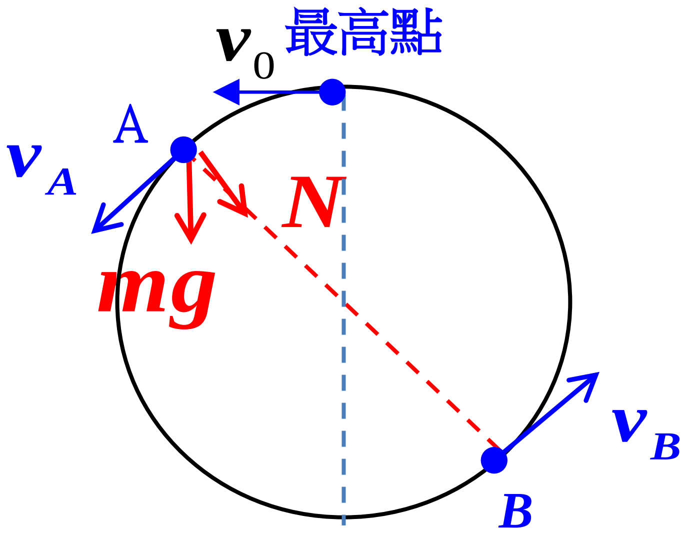
$$\therefore \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = mv_0^2 + 2mgR = \text{定值}$$

(D)

$\because$ 除最高點外速率均大於$\boldsymbol{v}_0$

$\therefore$ 週期小於$\dfrac{2\pi \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{v}_0}$

(E)



轉動牛二：$\left[\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{合力}} = \dfrac{\Delta \overrightarrow{\boldsymbol{L}}}{\Delta \boldsymbol{t}}\right]$

$\because \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{N}}} = 0$但$\overrightarrow{\boldsymbol{\tau}_{g}}$不一定為零

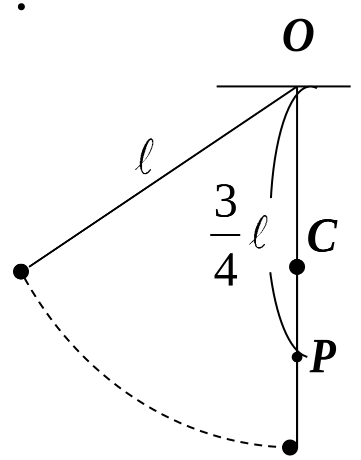
$\therefore$ 角動量不守恆

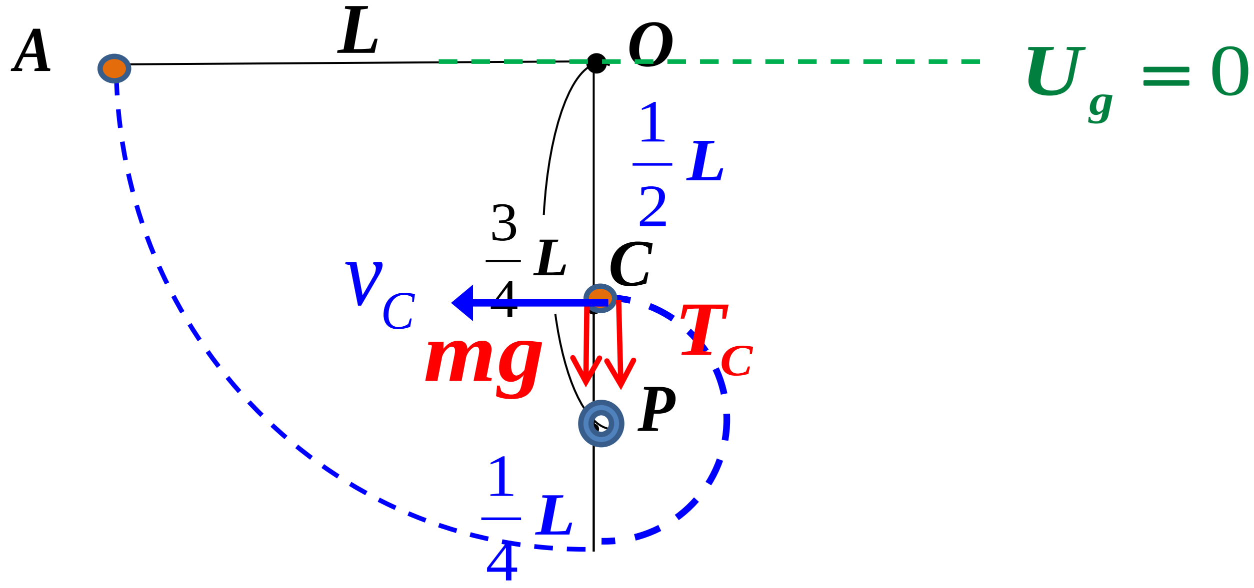
擺繩質量可忽略之單擺，如圖所示，其擺錘質量m，擺長L ，若在懸掛點O的正下方距離$\frac{3}{4}L$處的P有一光滑水平細棒，則：

（1）使擺繩水平拉直，再將擺球靜止釋放，繩碰到細棒後，擺球繞細棒作鉛直面圓周運動，當球上升至最高點C之瞬間，繩之張力為若干？

（2）若單擺不是由水平狀態釋放，釋放時之擺角為θ ，若恰可使球繞棒作完整圓周運動，則$\cos\theta$ = ？

（3）若單擺由水平位置靜止釋放，欲恰使擺球可繞細棒完成一整圈的運動，則細棒應在懸掛點下方多遠？





（1）

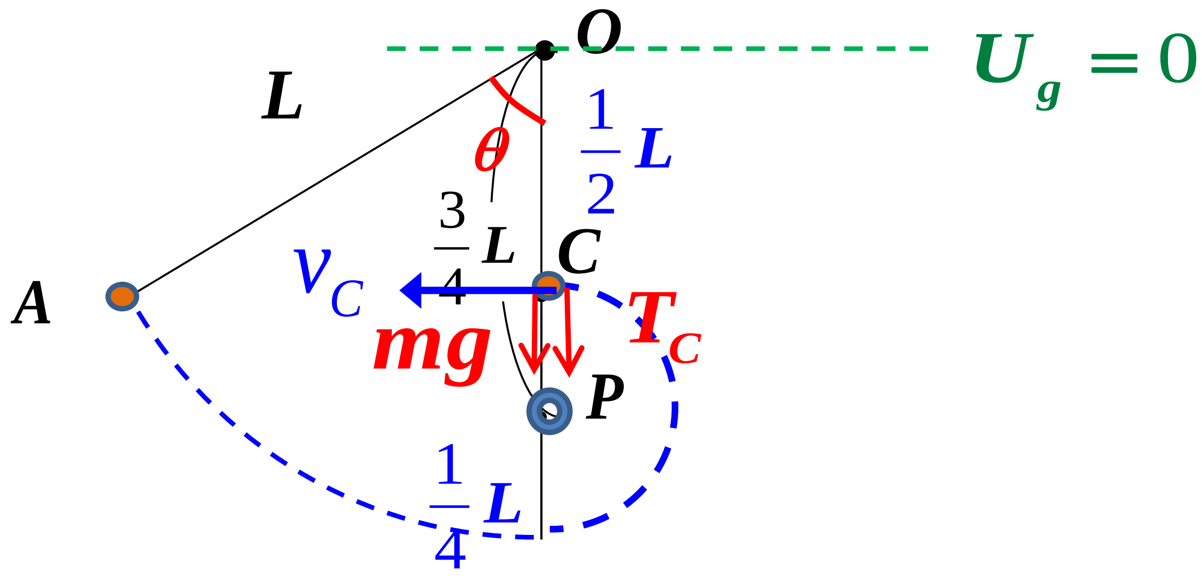
力學能守恆：$A \rightarrow C\left[U_A + K_A = U_C + K_C\right]$

$$0+0=\frac{1}{2}mv_C^{\,2}-mg\frac{L}{2} \quad \therefore v_C^{\,2}=gL$$

沿半徑方向$\left[F = ma_C\right]$

$$T_C + mg = m\frac{v_C^2}{\frac{L}{4}} = 4mg \quad \therefore T_C = 3mg$$

（2）

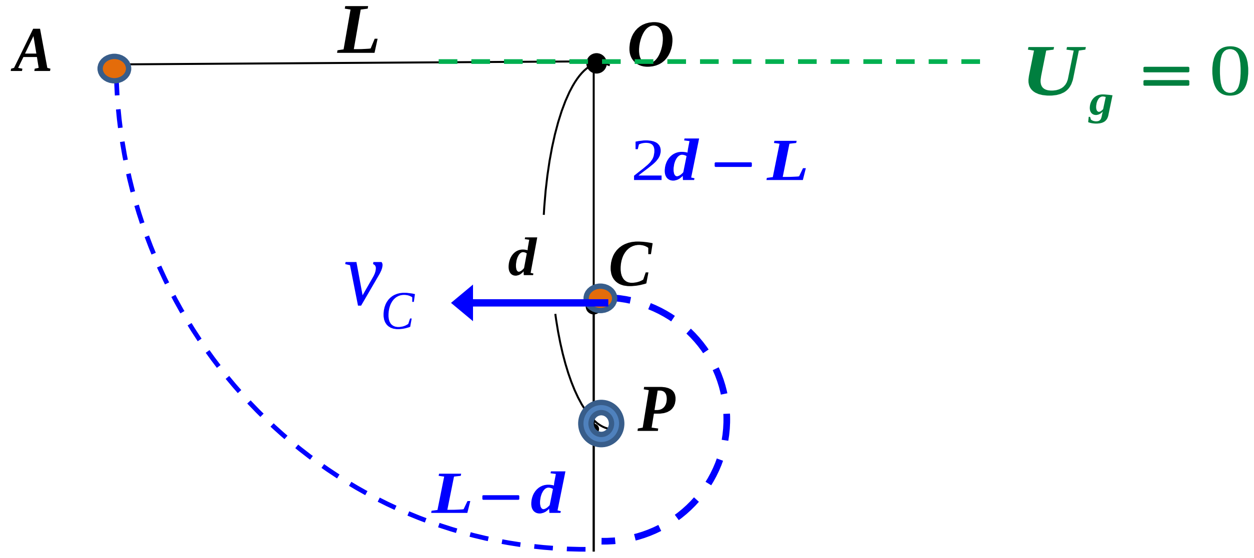


$$C\text{點臨界速率}v_C = \sqrt{gR} = \sqrt{g\frac{L}{4}}$$

$$\text{力學能守恆}:A \to C\left[U_A + K_A = U_C + K_C\right]$$

$$0 - mgL\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{g\frac{L}{4}}\right)^2 - mg\frac{L}{2} \quad \therefore \cos\theta = \frac{3}{8}$$

（3）



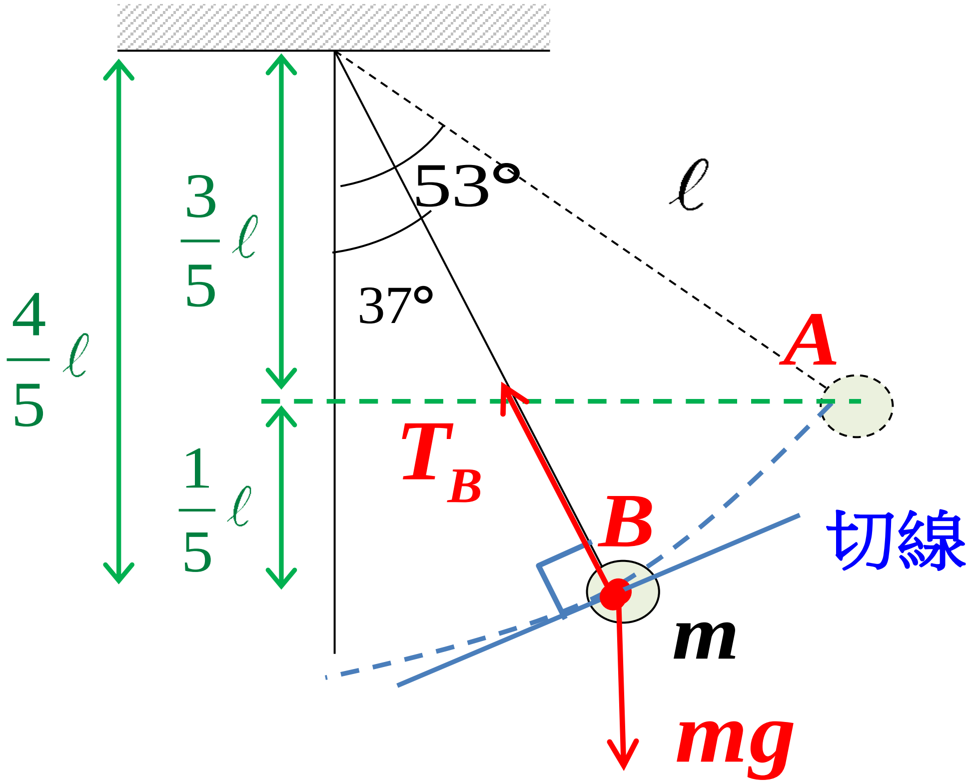
$$C\text{點臨界速率}v_C=\sqrt{gR}=\sqrt{g(L-d)}$$

$$\text{力學能守恆}:A\to C\left[U_A+K_A=U_C+K_C\right]$$

$$0+0=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{g(L-d)}\right)^2-mg(2d-L)\quad\therefore d=\frac{3}{5}L$$

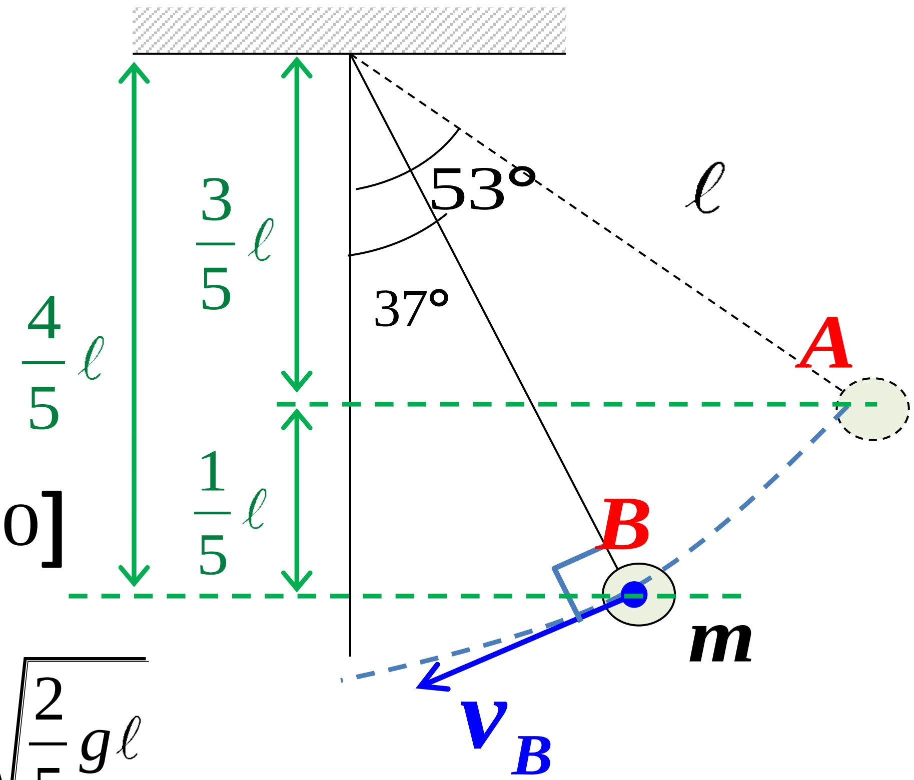
*1.*一單擺之擺長為ℓ ，其端繫質量為m之擺錘，將擺線拉至幅角*53*°由靜止釋放，當擺線與鉛直線夾角*37*°時，重力加速度為g，求：

（1）擺錘之切線加速度為？
（2）擺錘之法線加速度為？
（3）擺錘之加速度為？
（4）擺線之張力為？
（5）當擺錘擺至最低點時，擺線之加速度為？張力為？



(1)牛二：

$$a_T = \frac{F_T(\text{切線方向合力})}{m} = \frac{mg\sin 37°}{m} = g\sin 37° = \frac{3}{5}g$$

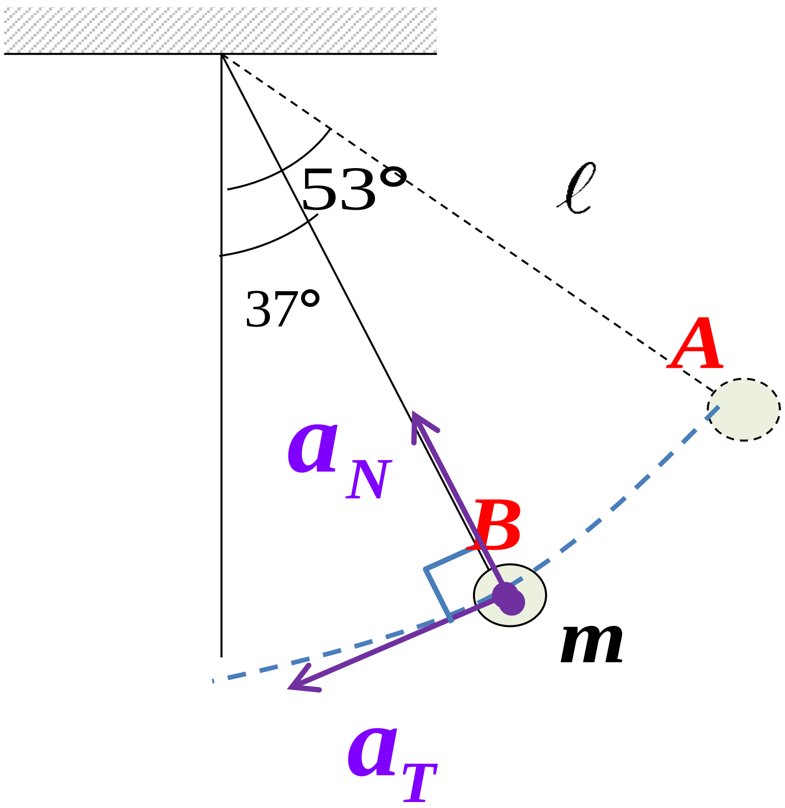


(2)力學能守恆：$[\Delta U + \Delta K = 0]$

$$-mg\frac{1}{5}\ell + \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} = 0 \qquad \therefore v_B = \sqrt{\frac{2}{5}g\ell}$$

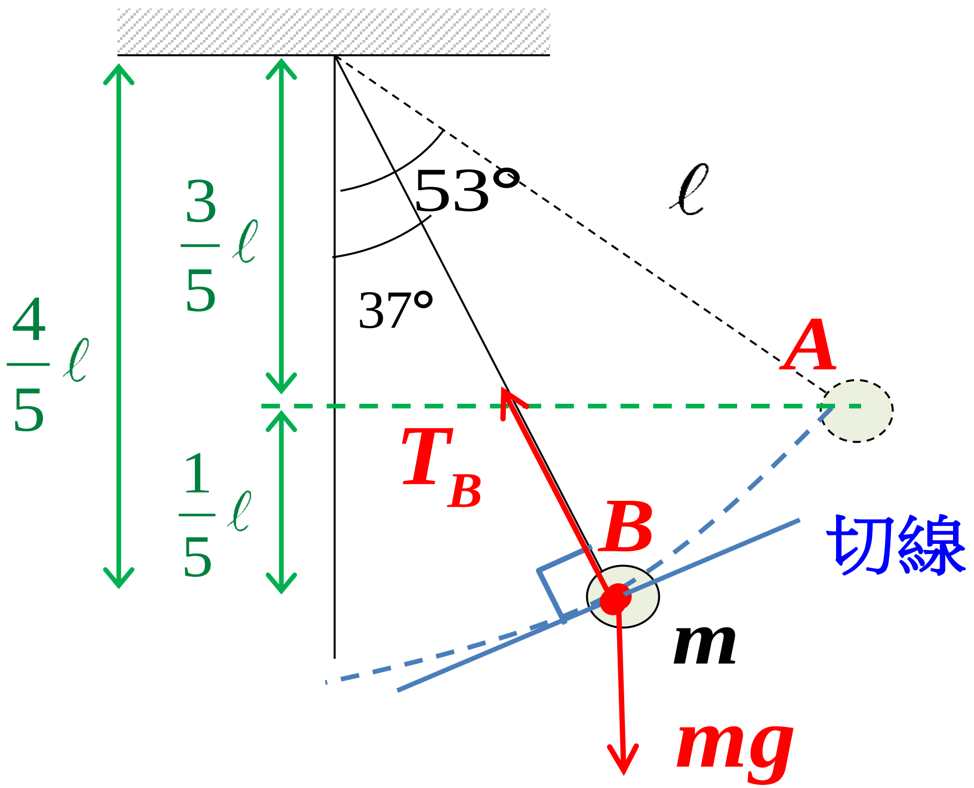
法線(向心)加速度$\left[\boldsymbol{a}_N\,(\boldsymbol{a}_C) = \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}\right]$

$$\therefore \boldsymbol{a}_N = \frac{\boldsymbol{v}_B^2}{\ell} = \frac{\frac{2}{5}\boldsymbol{g}\ell}{\ell} = \frac{2}{5}\boldsymbol{g}$$



(3)

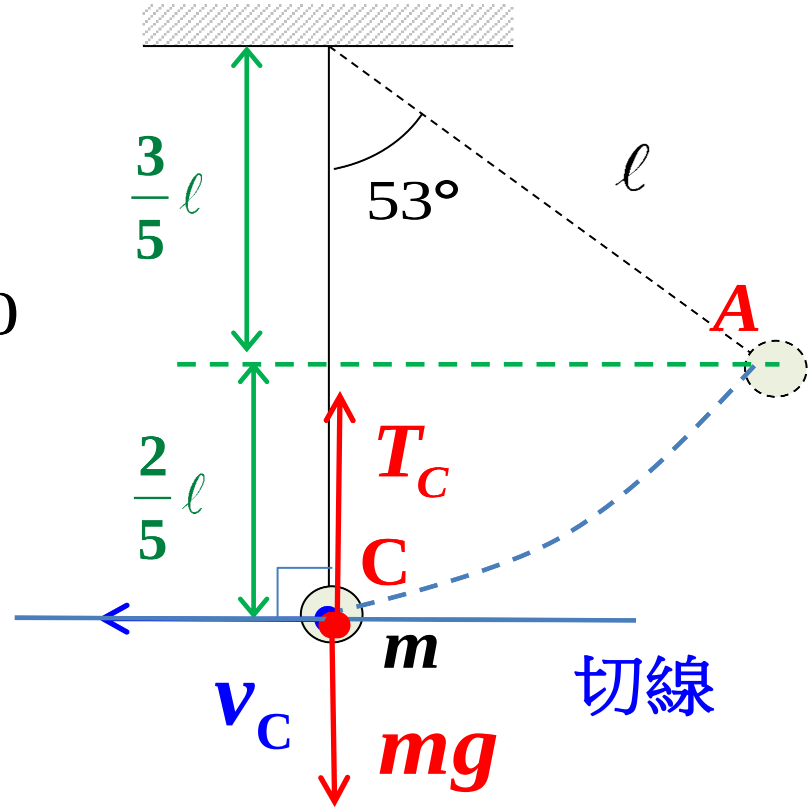
$$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}g\right)^2+\left(\frac{2}{5}g\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{5}g$$



(4)沿半徑方向$\left[F = ma_C\right]$

$$T_B - mg\cos 37° = m \times \frac{2}{5}g \quad \therefore T_B = \frac{6}{5}mg$$

(5)



$$\text{切線}a_T=\frac{F_T\left(\text{切線方向合力}\right)}{m}=0$$

$$\text{力學能守恆:}\left[\Delta U+\Delta K=0\right]$$

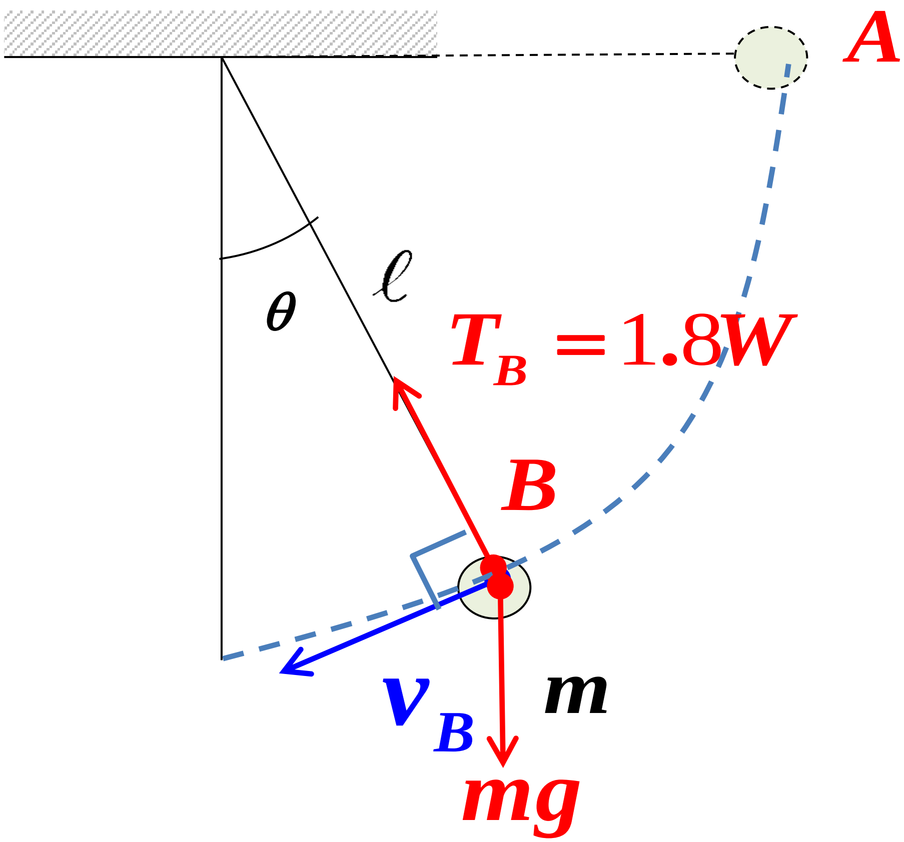
$$-mg\frac{2}{5}\ell+\frac{1}{2}mv_C{}^2=0 \quad \therefore v_C=\sqrt{\frac{4}{5}g\ell}$$

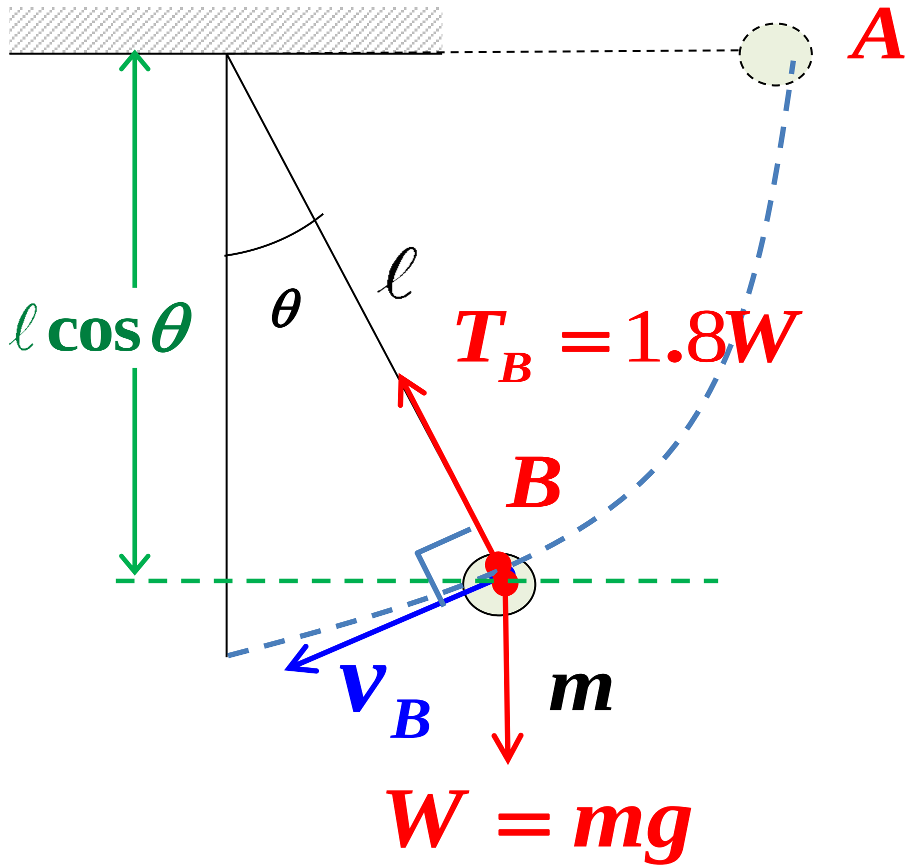
$$\text{法線}a_N=\frac{v_C^2}{\ell}=\frac{\frac{4}{5}g\ell}{\ell}=\frac{4}{5}g \quad \therefore a=a_N=\frac{4}{5}g$$

$$\text{沿半徑方向}\left[F=ma_C\right]$$

$$T_C-mg=m\times\frac{4}{5}g \quad \therefore T_C=\frac{9}{5}mg$$

*2.*長繩的一端固定，另端最多僅能鉛直自由懸掛 1.8 *W*重物而恰不斷裂，今將此另端僅懸掛 *W* 的重物，再由繩的水平位置放下，則繩子之斷裂點與鉛直方向θ的夾角為？





力學能守恆：$[\Delta U + \Delta K = 0]$

$$-mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}m{v_B}^2 = 0$$

$$\therefore v_B = \sqrt{2g\ell\cos\theta}$$

沿半徑方向$[F = ma_C]$

$$T_B - mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{\ell}$$

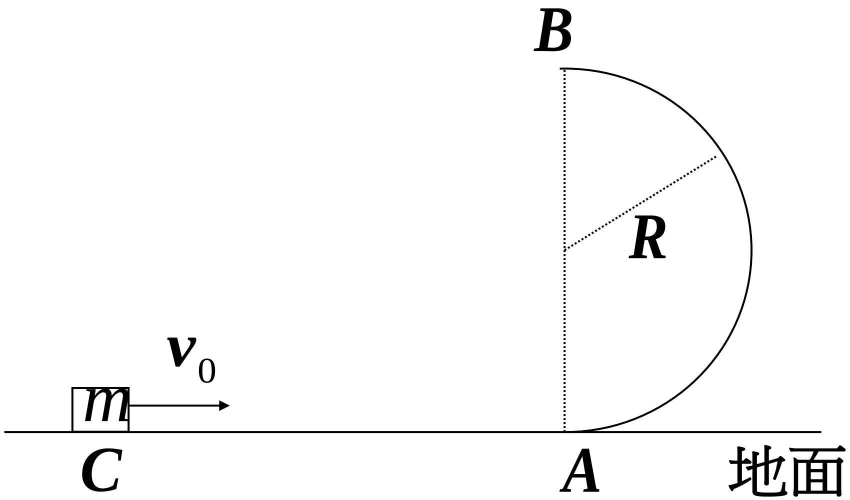
$$\rightarrow 1.8mg - mg\cos\theta = m\frac{2g\ell\cos\theta}{\ell}$$

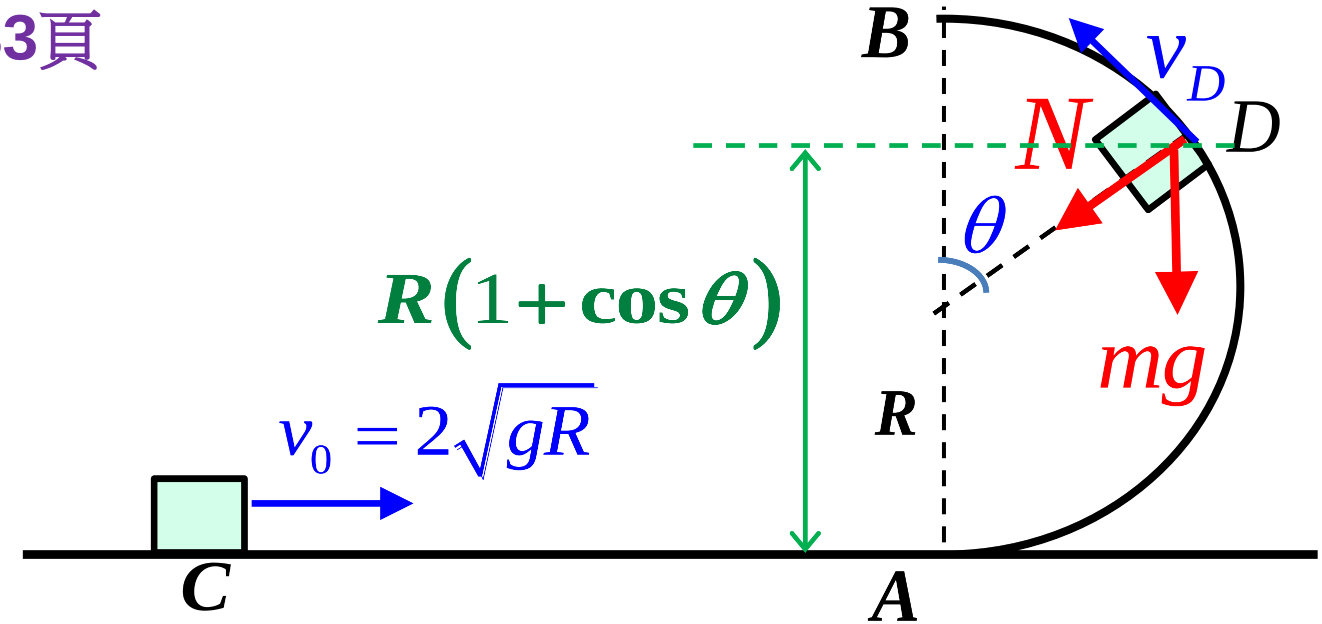
$$\therefore \cos\theta = 0.5 \rightarrow \theta = 37°$$

*1.*圖所示，若物體的速率$v_0 = 2\sqrt{gR}$ 時，則：

(a)在距地何高度處，小物體會脫離圓軌道面?

(b)小物體脫離軌道後，可到達的最大高度距地為若干？





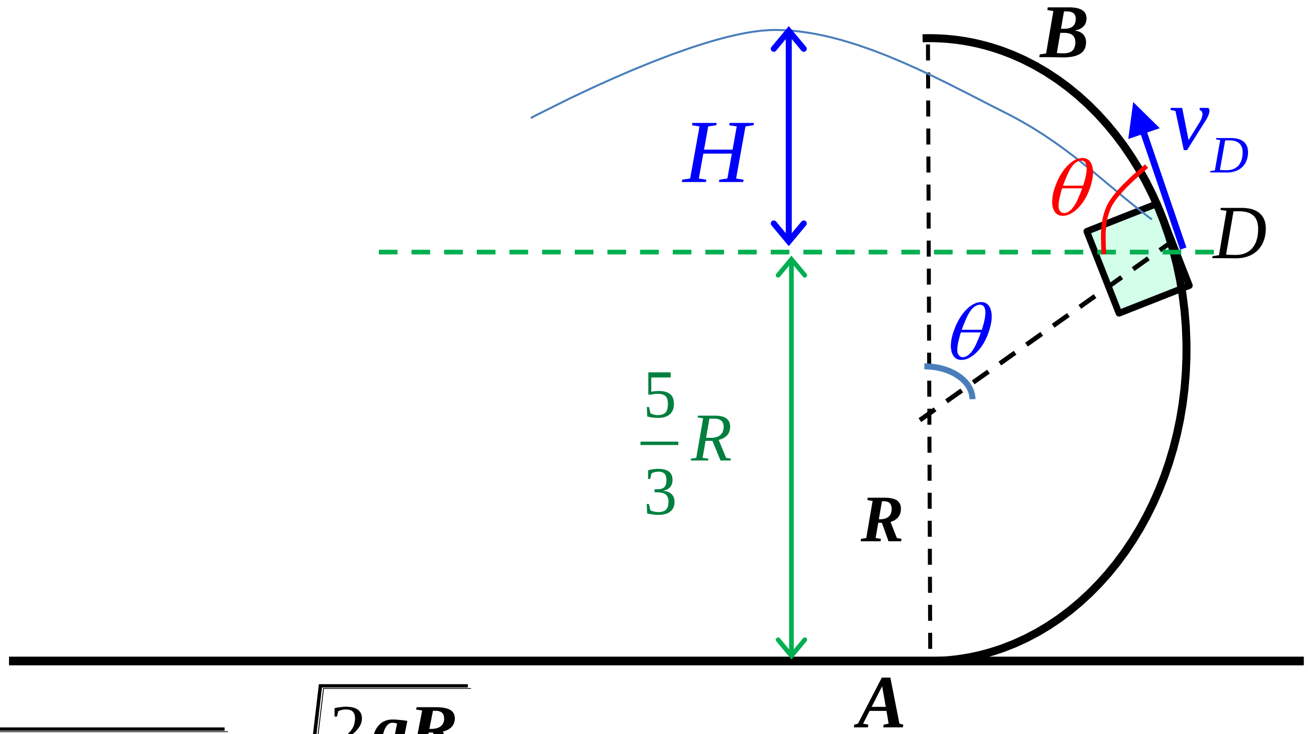
令$\boldsymbol{D}$點時恰脫離　此時$\boldsymbol{N}=0$

沿半徑方向$\left[\boldsymbol{F}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{a}_C\right]\boldsymbol{mg}\cos\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{m}\dfrac{\boldsymbol{v}_D^2}{\boldsymbol{R}}$　$\therefore \boldsymbol{v}_D^2=\boldsymbol{gR}\cos\boldsymbol{\theta}$

力學能守恆：$\left[\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{U}_2+\boldsymbol{K}_2\right]$

$$\frac{1}{2}m\left(2\sqrt{gR}\right)^2+0=\frac{1}{2}m{v_D}^2+mgR(1+\cos\theta)\quad \therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$$

脫離時距地高度 $R(1+\cos\theta)=\dfrac{5}{3}R$

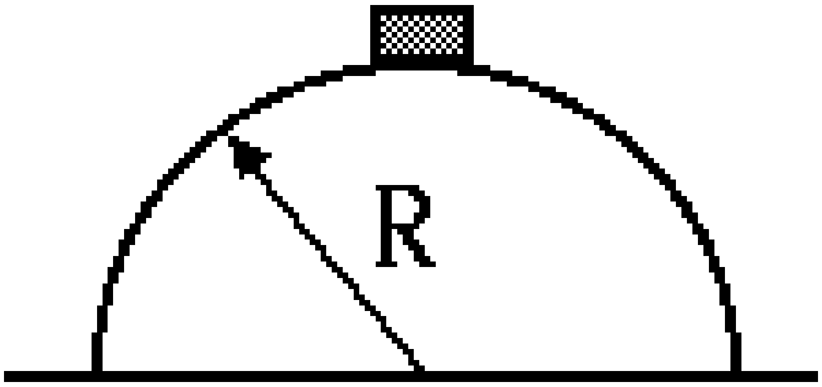


$$v_D = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

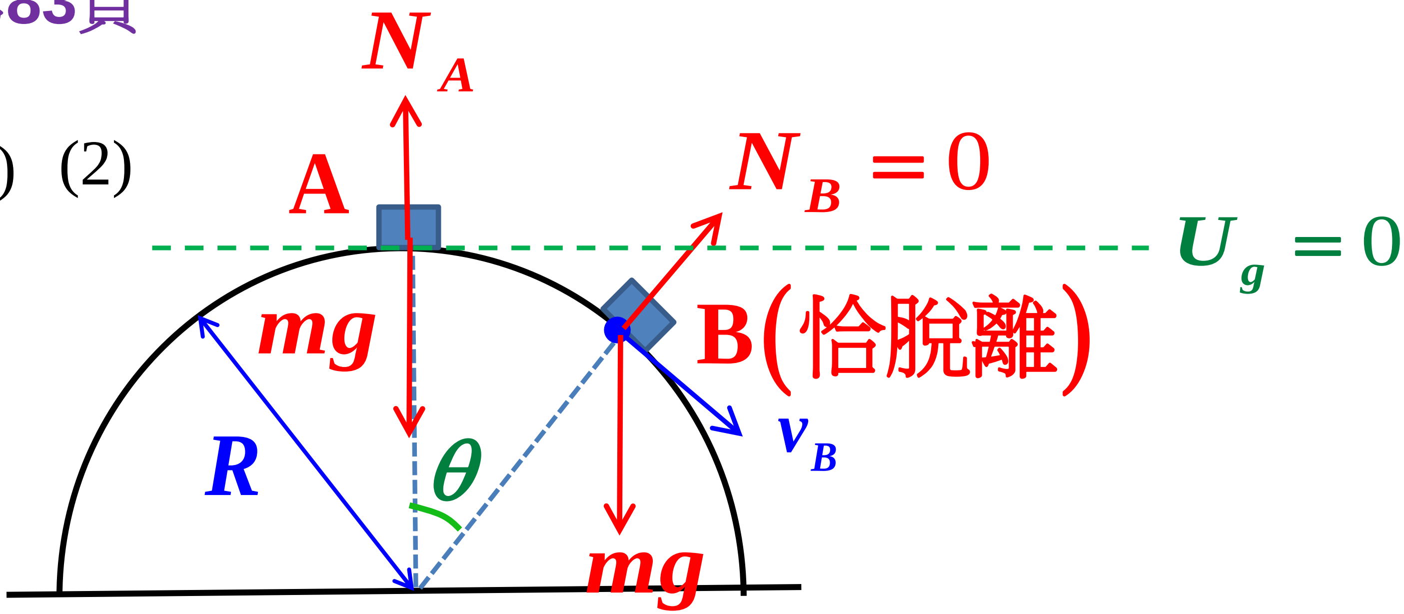
$$H = \frac{v_D^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{\frac{2gR}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}{2g} = \frac{R}{3}\times\frac{5}{9} = \frac{5}{27}R$$

$$\therefore \text{距地最大高度} = \frac{5}{3}R + \frac{5}{27}R = \frac{50}{27}R$$

*2.*圖所示，一光滑的半球形物體固定在水平面上。有一物體置於半球體的頂端，自靜止開始順著球面自由滑下。已知半球體的半徑為R，重力場強度為 g ，則物體脫離半球體的表面時，
(1)離地的高度？(2)此時速率為？(3)著地時速率為？



(1) (2)



[恰脫離處：$N = 0$] 令B點時恰脫離，則$N_B = 0$

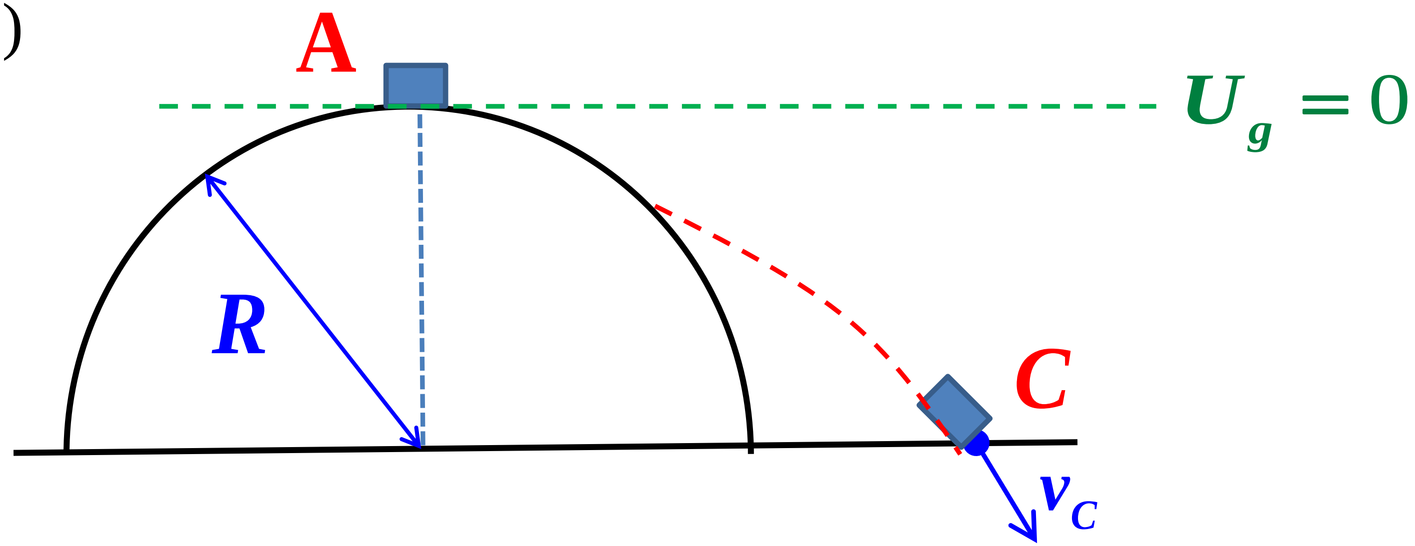
沿半徑方向$[F = ma_C]$ $mg\cos\theta = m\dfrac{v_B^2}{R}$ $\therefore v_B^2 = gR\cos\theta$

力學能守恆：$A \to B\,[U_A + K_A = U_B + K_B]$

$$0 = \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} - mgR(1-\cos\theta) \quad \therefore gR\cos\theta = 2gR(1-\cos\theta) \to \cos\theta = \frac{2}{3}$$

(1) $\therefore$距地高度$R\cos\theta = \dfrac{2}{3}R$ (2) $\therefore v_B = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR}$

(3)

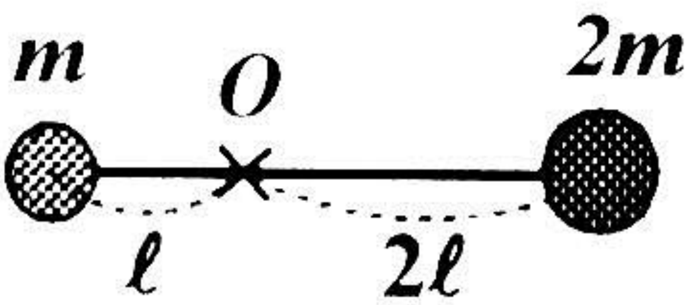


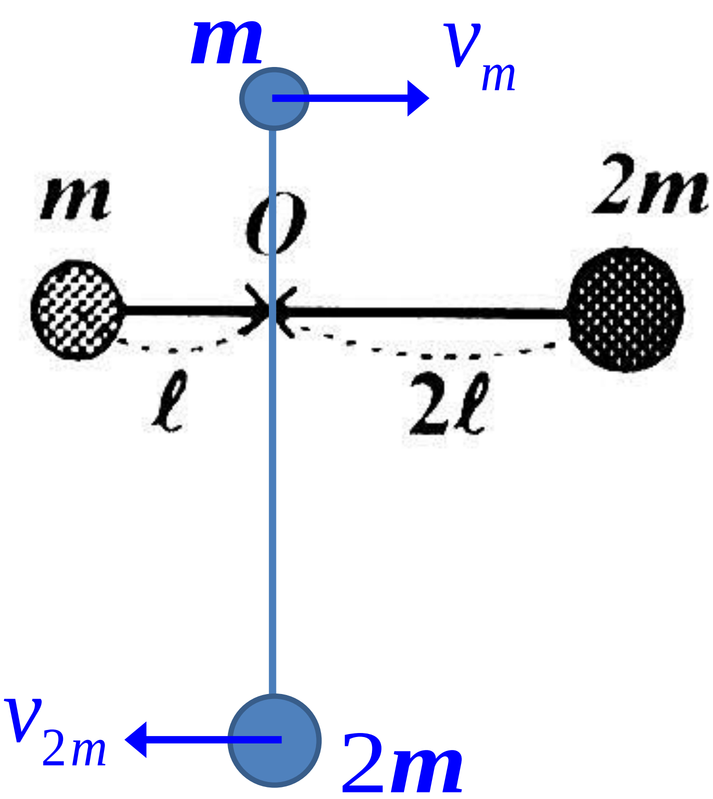
力學能守恆：$A \rightarrow C\left[U_A + K_A = U_C + K_C\right]$

$$0 = \frac{1}{2}mv_C{}^2 - mgR \quad \therefore v_C = \sqrt{2gR}$$

第頁

1. 質量 m 與 2m 兩物體分別固定於長 3 ℓ 之輕桿兩端，使輕桿以距離 m 物體　ℓ 處為軸，自水平釋放，輕桿恰成鉛直時，兩物體之速度各若干?





$$[v = r\omega] \qquad v_{2m} = 2v_m$$

力學能守恆：$[\Delta U + \Delta K = 0]$

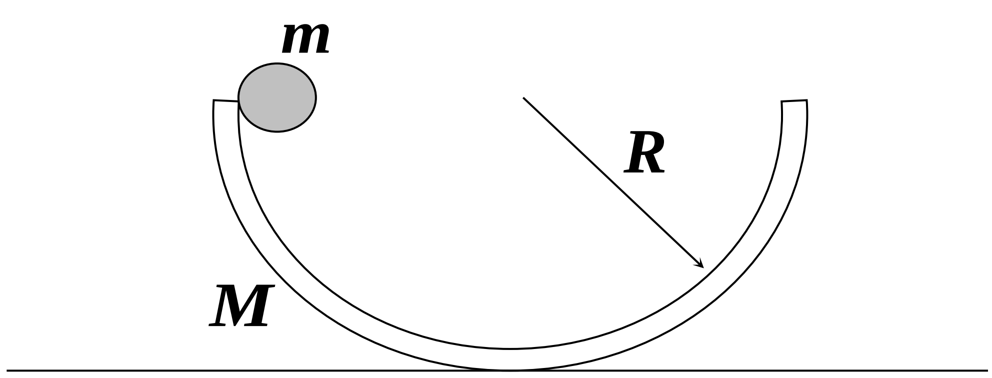
$$-2mg2\ell + mg\ell + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}2mv_{2m}^2 = 0$$

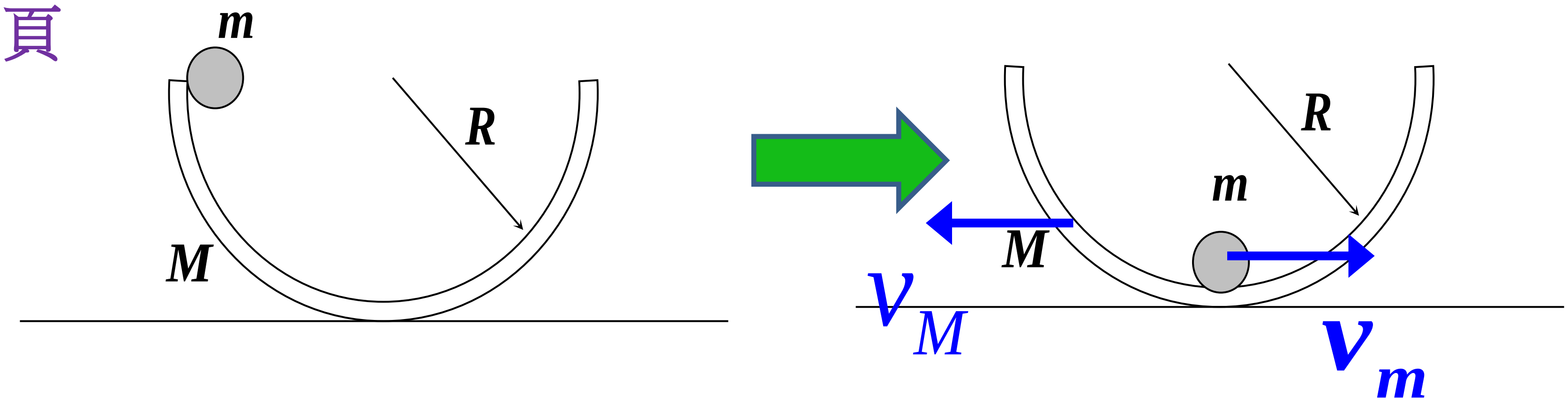
$$\rightarrow -3mg\ell + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}2m(2v_m)^2 = 0$$

$$\therefore v_m = \sqrt{\frac{2}{3}g\ell} \rightarrow v_{2m} = 2\times\sqrt{\frac{2}{3}g\ell} = \sqrt{\frac{8}{3}g\ell}$$

第頁

2. 圖中，光滑桌面上置質量 M ，半徑為 ℓR 內壁光滑的半球形碗，一小球質量 m 自碗左端點釋放，當球滾到碗底時，重力加速度g，試問（1）碗的速率為？（2）球的速率（若球為純滑動無滾動）？





$(M+m)$動量守恆：

$$0 = Mv_M - mv_m \therefore v_M = \frac{m}{M} v_m$$

$(M+m)$力學能守恆：$[\Delta U + \Delta K = 0]$

$$-mgR + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_m\right)^2 = mgR$$

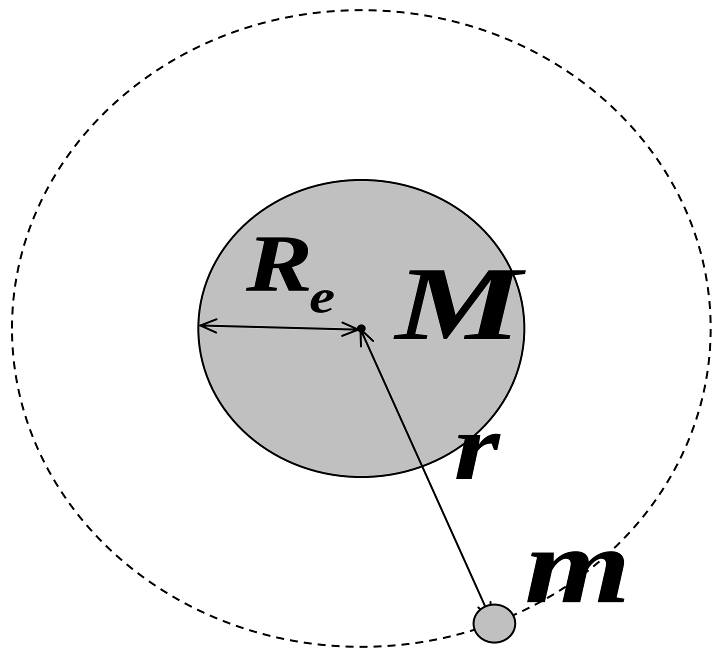
$$\therefore v_m = \sqrt{\frac{2mgR}{M+m}} \rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}$$

三、重力位能一般式的應用：人造衛星ℓ 星體運動....

(1) 圓軌道人造衛星：

設有人造衛星(質量m)，在離地心r處繞地球(質量M) 作**<u>等速率圓周運動</u>**：

<a>.重力位能 $\boxed{U_g = -\frac{GMm}{r}}$



<b>.動能 $\boxed{K = \frac{GMm}{2r}}$

（與位能零位面無關）

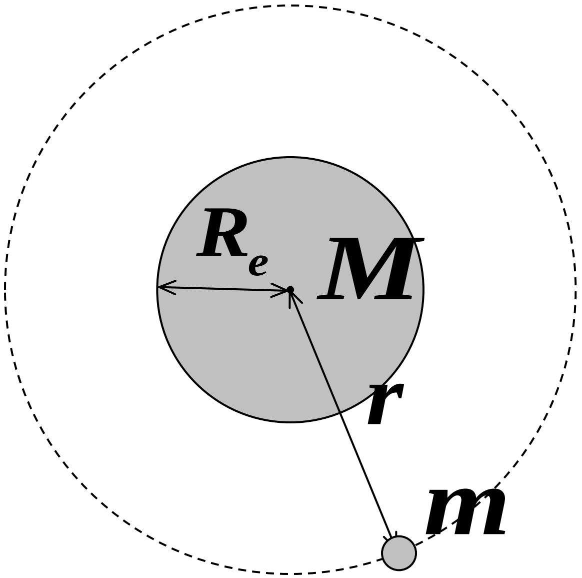
[證明]$F_c = F_g \rightarrow m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$

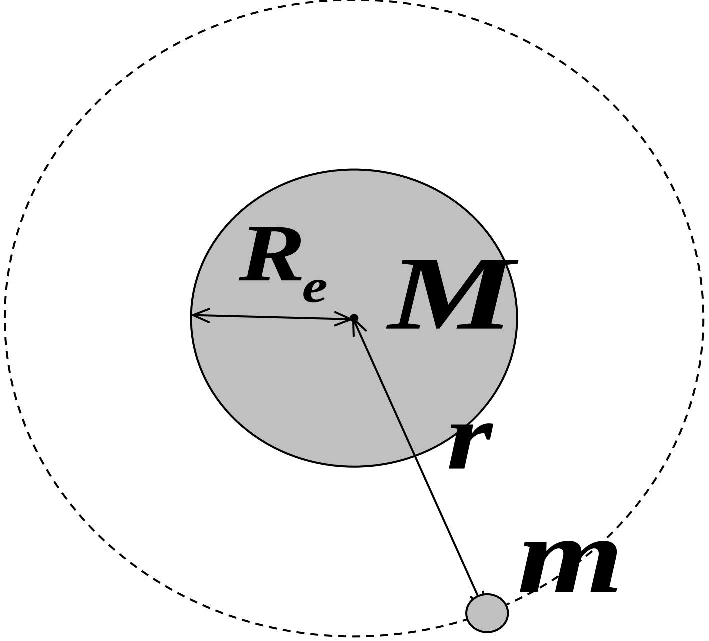
<c>.力學能 $\boxed{E=-\dfrac{GMm}{2r}}$

[証明] $E=K+U_g=\dfrac{GMm}{2r}+\left(-\dfrac{GMm}{r}\right)=-\dfrac{GMm}{2r}$

註：圓軌道衛星之力學能、動能、位能關係

$$E=-K=\frac{U_g}{2}$$





(1) 圓軌道人造衛星：

<a>.重力位能 $\boxed{U_g = -\dfrac{GMm}{r}}$

<b>.動能 $\boxed{K = \dfrac{GMm}{2r}}$

<c>.力學能 $\boxed{E = -\dfrac{GMm}{2r}}$

$$\boxed{\left[r\uparrow \Rightarrow U_g \uparrow \;\; K\downarrow \;\; E\downarrow \right]}$$

(2) 脫離動能與束縛能：（忽略星球自轉）

<a>.束縛能E_b：

欲使物體脫離重力場至無窮遠處，所需補充之最小能量。

$$E_b + E = 0$$

$$\boxed{E_b = -E}$$

(2) 脫離動能與束縛能：（忽略星球自轉）

<b>.脫離動能K_e：

欲使物體脫離重力場移至無窮遠處，物體所具備的最小動能。

$$K_e + U = E_\infty = 0 \qquad \boxed{K_e = -U = \frac{GMm}{r}}$$

（恰等於物體原位能的絕對值）

<c>.脫離速率v_e：

$$K_e = \frac{1}{2}mv_e^{\ 2} \qquad \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

[討論]：

1. $K_e = K + E_b$

2. 欲從地表發射衛星至距地心r處圓周運動，所須提供給衛星的能量

圓周運動　靜止

$$\Delta E = E(r) - E(R) = -\frac{GMm}{2r} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

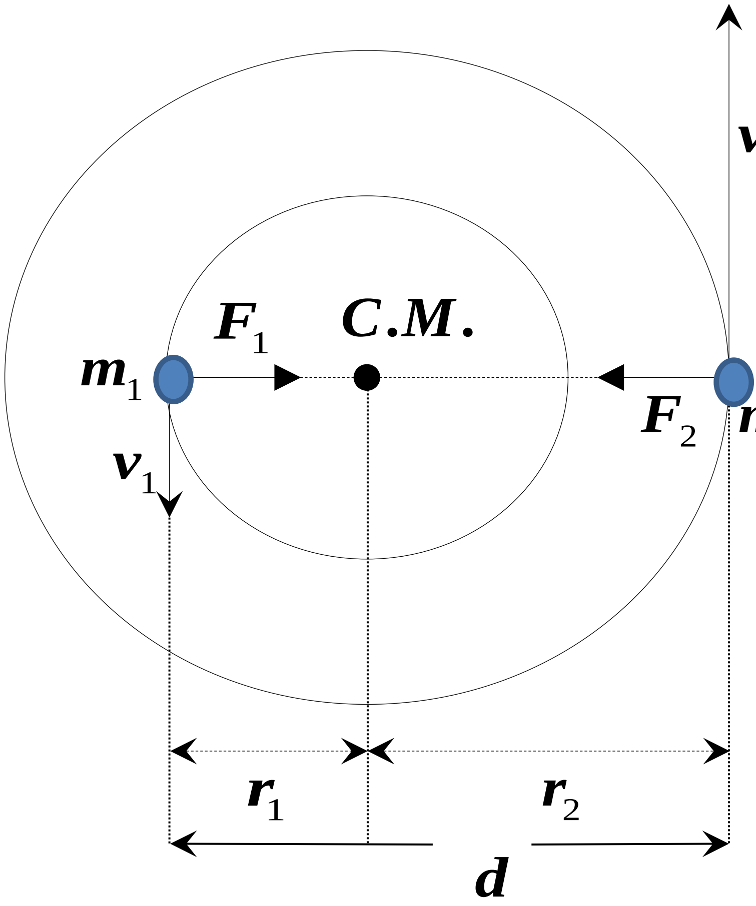
3. 欲使繞地球圓周運動的物體從距地心r_1移至距地心r_2處圓周運動，所須提供給物體的能量

$$\Delta E = E(r_2) - E(r_1) = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)$$

圓周運動　圓周運動

(3) 雙星運動：

如圖，質量分別為m_1及m_2的雙星，在同一平面上互繞其共同**質心**做等速率圓周運動



軌道半徑 $r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d$ $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$

向心力 $F_1 = F_2 = \frac{Gm_1 m_2}{d^2}$ $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1}$

加速度 $a_1 = \frac{Gm_2}{d^2}$ $a_2 = \frac{Gm_1}{d^2}$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$

軌道速率 $v_1 = m_2 \sqrt{\frac{G}{d\left(m_1 + m_2\right)}}$ $v_2 = m_1 \sqrt{\frac{G}{d\left(m_1 + m_2\right)}}$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \frac{1}{1}$$

週期 $$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G\left(m_1 + m_2\right)}} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1}$$

動能 $$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}mv_2{}^2 = \frac{Gm_1m_2}{2d}$$

位能 $$U = -\frac{Gm_1m_2}{d}$$

總力學能 $$E = -\frac{Gm_1m_2}{2 \cdot d}$$

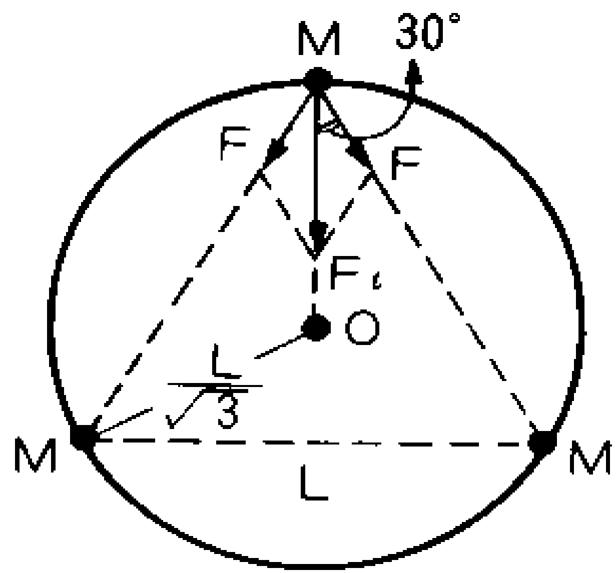
[補充] 三星運動：任一星球所受引力

$$F_t = 2F\cos 30° = \frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2}$$

軌道半徑 $r = \frac{L}{\sqrt{3}}$

軌道速率 $v = \sqrt{\frac{GM}{L}}$

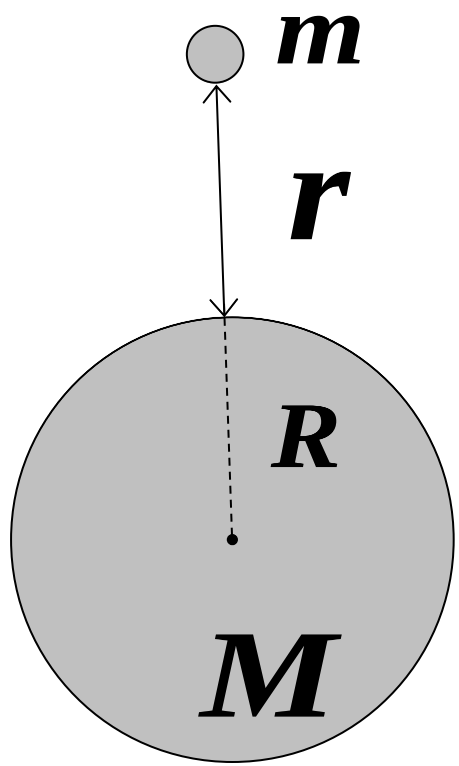
週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{3GM}}$



動能 $K = K_1 + K_2 + K_3 = 3\cdot\left(\frac{GM^2}{2L}\right)$

位能 $U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = 3\cdot\left(-\frac{GM^2}{L}\right)$ 總力學能 $E = 3\left(-\frac{GM^2}{2L}\right)$

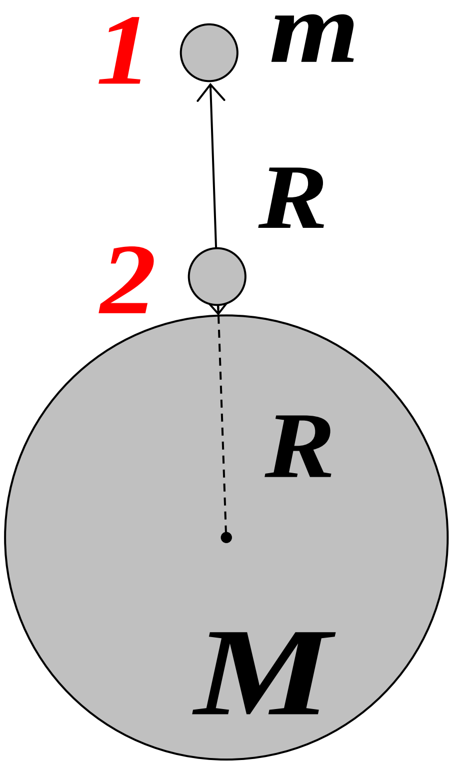
1. 地球半徑為R，質量為M，將質量為m的物體從距地面高R處讓其自由落下，若不考慮空氣阻力，則該物體落至地面瞬間的速率為？（需考慮重力場之實際變化）



$(M+m)$力學能守恆：$[U_1+K_1=U_2+K_2]$

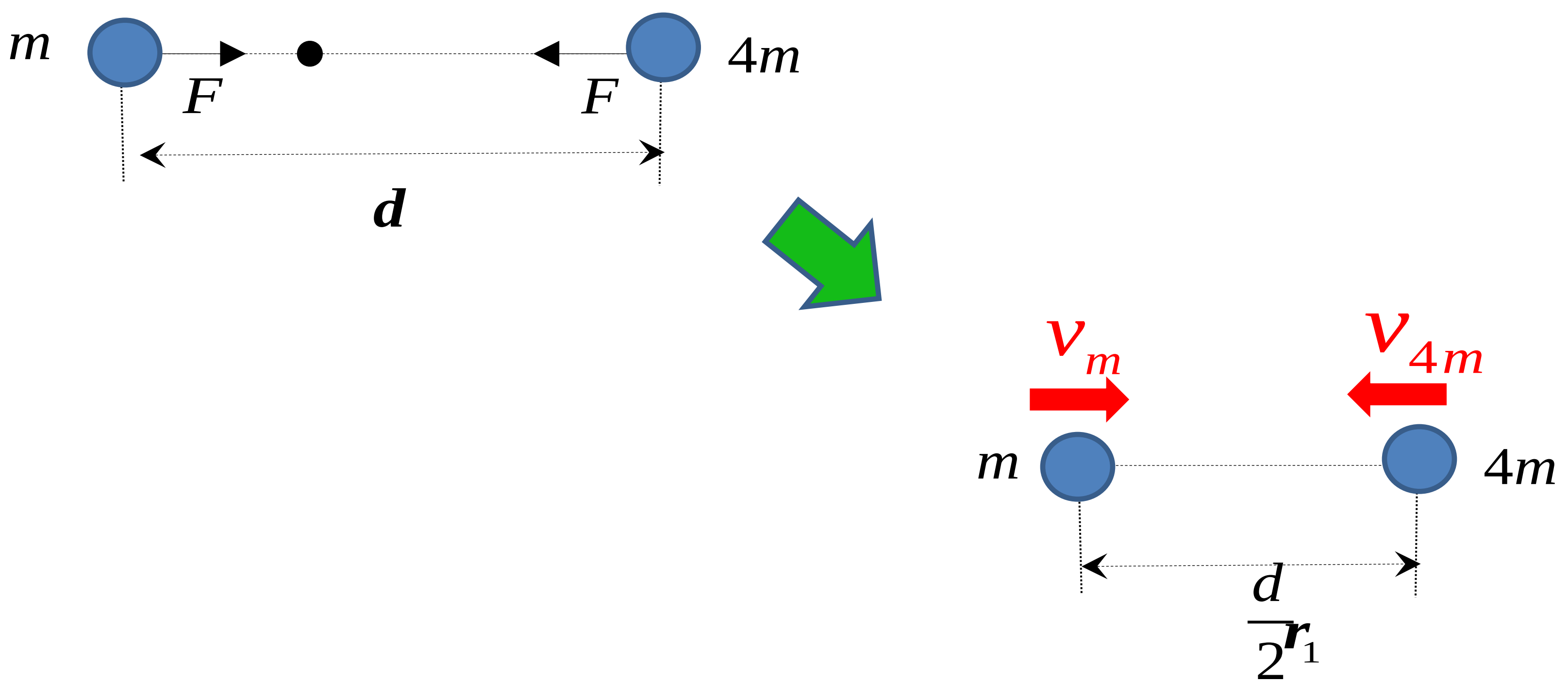
$$-\frac{GMm}{R+R}+0=-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2$$

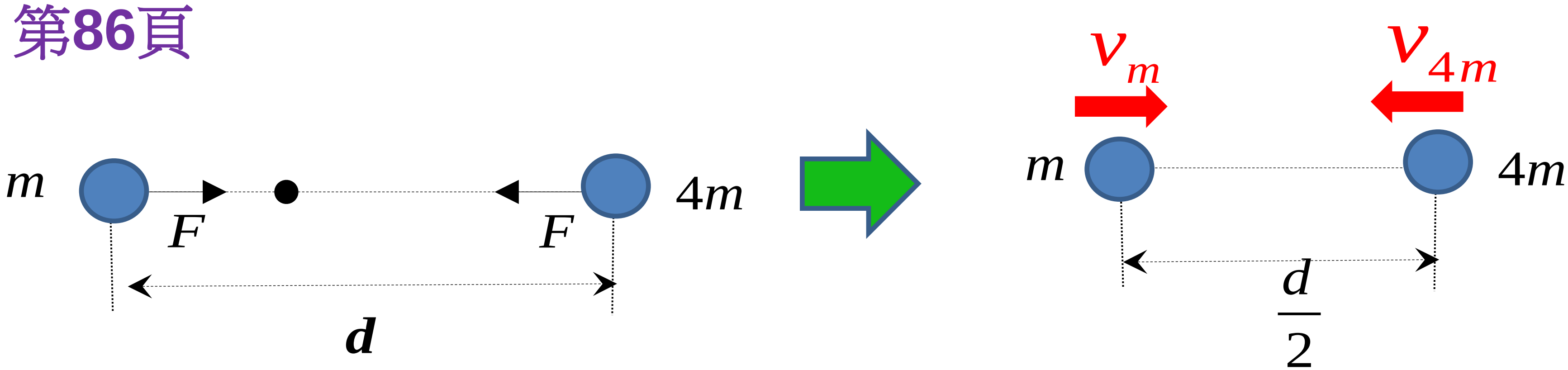
$$\therefore v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$



第86頁

2. 兩物體質量比為1：4，相距d時彼此互相吸引之萬有引力大小為F。若由靜止藉萬有引力的作用拉引至相距 $\frac{d}{2}$ 時，則質量大的物體之動能為何？





$$F=\frac{Gm4m}{d^2}\rightarrow Gm^2=\frac{Fd^2}{4}$$

$(m+4m)$動量守恆：

$$0=mv_m-4mv_{4m}\ \therefore v_m=4v_m$$

$(m+4m)$力學能守恆：$[U_1+K_1=U_2+K_2]$

$$-\frac{Gm4m}{d}+0=-\frac{Gm4m}{\frac{d}{2}}+\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}4mv_{4m}^2$$

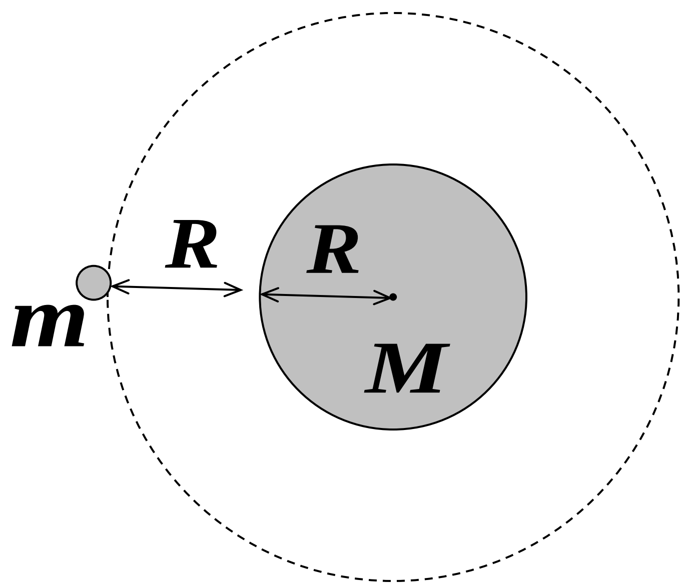
$$\therefore \frac{1}{2}4mv_{4m}^2=\frac{4Gm^2}{5d}=\frac{1}{5}Fd$$

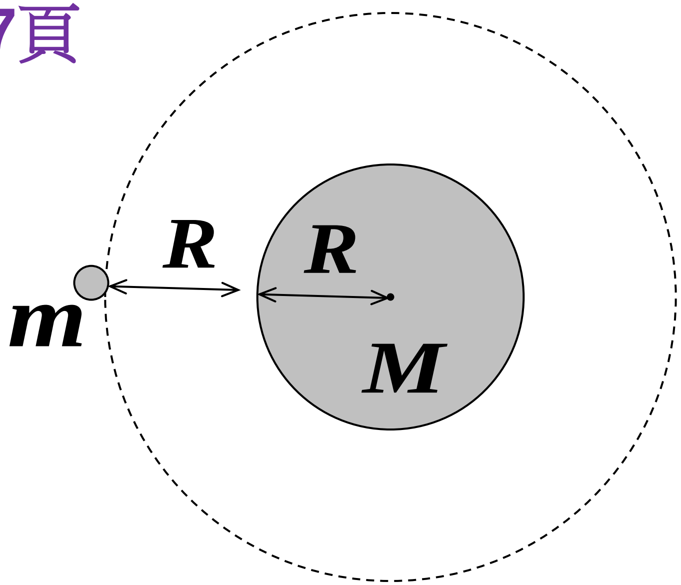
*1.*地球半徑為R，一人造衛星在距地面高ℓR處，繞地球作圓周運動，設無窮遠處重力位能為零時，人造衛星總力學能為E，則此人造衛星

（A）重力位能為？

（B）軌道半徑變為2倍時，總力學能變為？

（C）若改定地球表面的重力位能為零時，則距地面高R處重力位能為

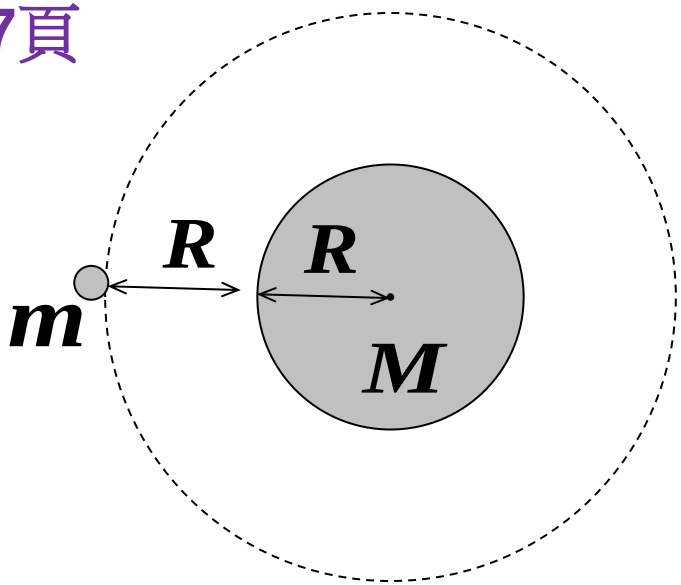




$$\left[E=-\frac{GMm}{2r}\right] \quad E=-\frac{GMm}{2\times 2R}=-\frac{GMm}{4R}$$

$$(A)\left[U_g=-\frac{GMm}{r}\right]U_g=-\frac{GMm}{R}=2E$$

$$(B)\,E'=-\frac{GMm}{2\times 4R}=-\frac{GMm}{8R}=\frac{E}{2}$$



(C)零位面改變不影響兩位置間位能差

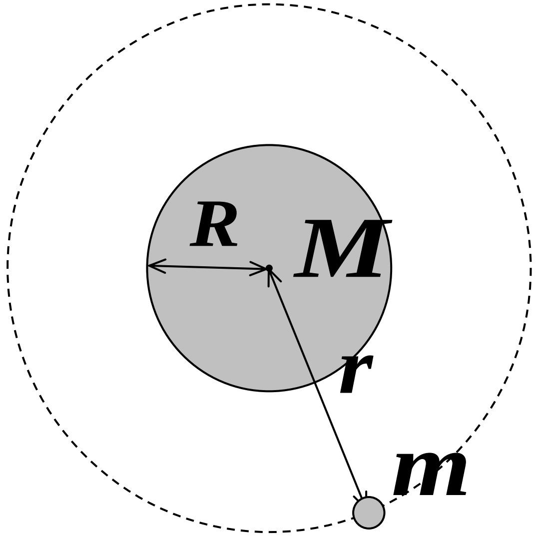
$$U_g(2R)-U_g(R)=-\frac{GMm}{2R}-\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{GMm}{2R}=\text{定值}$$

$\therefore$當$U_g(R)=0$時 ,則$U_g(2R)=\dfrac{GMm}{2R}$

2.將質量m的人造衛星，由地面發射進入太空中，以一圓形軌道繞地球運行，若衛星的軌道速率為 $\sqrt{\frac{1}{3}gR}$，g為地表重力加速度，R為地球半徑，則：

（1）衛星離地高度？（2）發射衛星的初速量值？

(1)

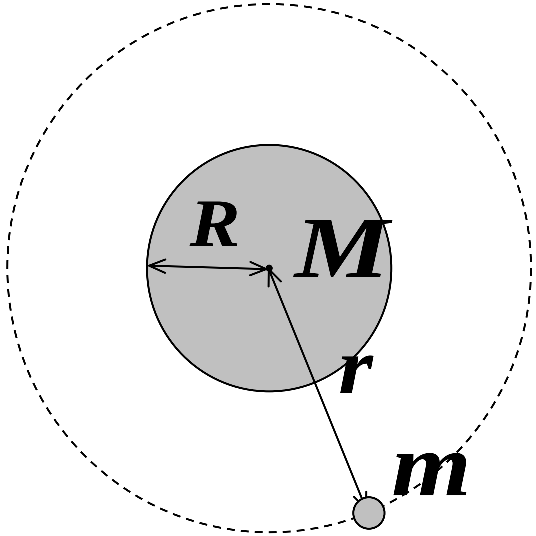


$$g=\frac{GM}{R^2}\rightarrow GM=gR^2$$

$$\left[v=\sqrt{\frac{GM}{R}}\right]\quad \sqrt{\frac{1}{3}gR}=\sqrt{\frac{GM}{r}}\rightarrow \frac{1}{3}gR=\frac{gR^2}{r}\therefore r=3R$$

$\therefore$ 離地高度 $=r-R=2R$

(2)



力學能守恆

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=-\frac{GMm}{2\times 3R}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{5GMm}{6R}=\frac{5gR^2m}{6R}=\frac{5}{6}mgR$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{5}{3}gR}$$

1. 假定地球表面上重力加速度量值為g，地球半徑為R時，自地面發射一顆質量為m之太空船，試問：

（1）太空船在地表的脫離速率為？

（2）若欲使其脫離地球引力的束縛所需之功為？

（3）若欲使至距地面高R處，使其繞地球中心做圓周運動所需之功？

（4）承上題，此時的脫離動能與束縛能？

（5）欲將軌道半徑由$2R$提升至$4R$處運行，則需補充能量？

$$g=\frac{GM}{R^2}\rightarrow GM=gR^2$$

(1) 力學能守恆

$$\frac{1}{2}mv_e{}^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=0$$

$$\rightarrow v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2gR^2}{R}}=\sqrt{2gR}$$

(2)

須作功＝束縛能＝$-E$

$$=-\left(-\frac{GMm}{2R}\right)=\frac{GMm}{2R}=\frac{gR^2m}{2R}=\frac{1}{2}mgR$$

(3) 須作功 $= E_2 - E_1$

$$= -\frac{GMm}{2\times 2R} - \left(-\frac{GMm}{2R}\right) = \frac{GMm}{4R} = \frac{gR^2m}{4R} = \frac{1}{4}mgR$$

(4) 脫離動能 $K_e = -U_g = -\left(-\frac{GMm}{2R}\right) = \frac{GMm}{2R} = \frac{gR^2m}{2R} = \frac{1}{2}mgR$

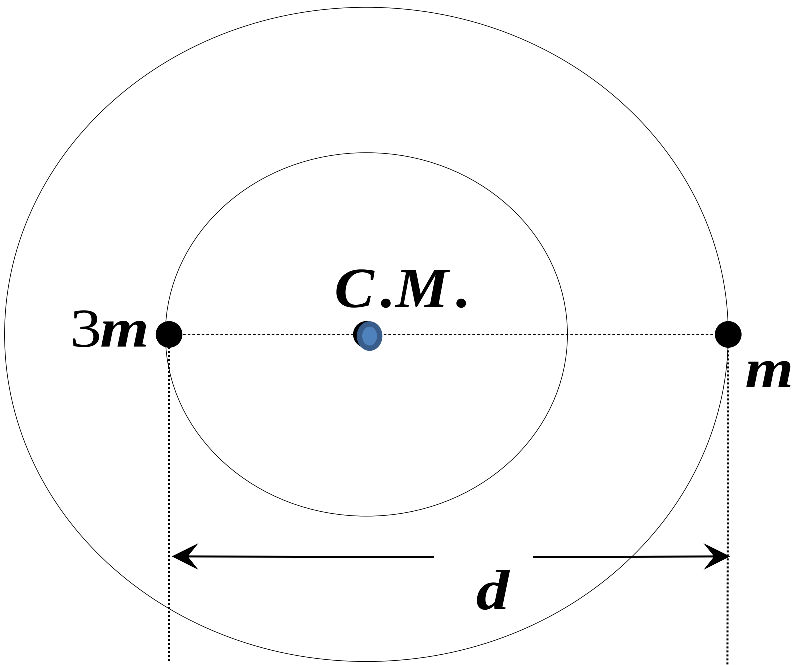
束縛能 $E_b = -E = -\left(-\frac{GMm}{2\times 2R}\right) = \frac{GMm}{4R} = \frac{gR^2m}{4R} = \frac{1}{4}mgR$

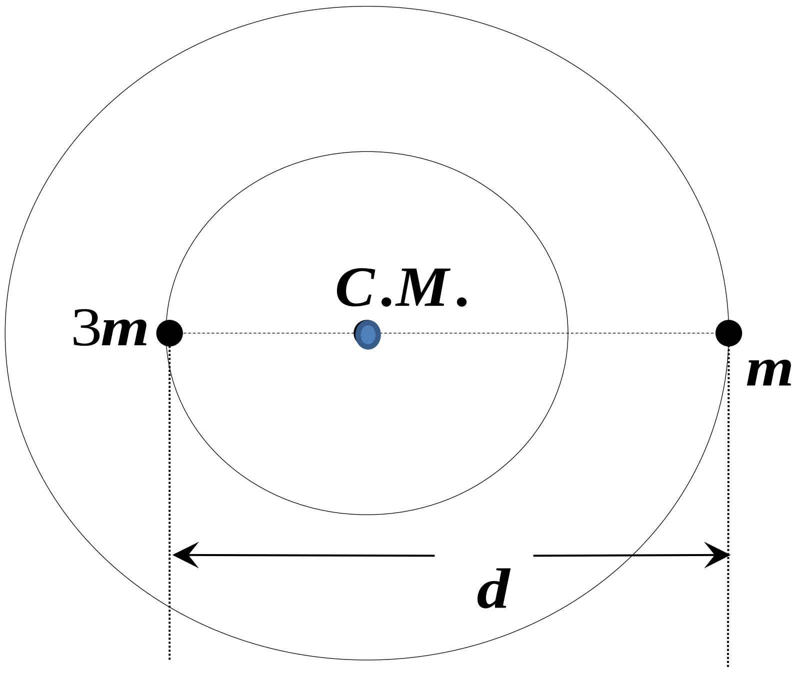
(5)

須作功 $= E_2 - E_1$

$$= -\frac{GMm}{2\times 4R} - \left(-\frac{GMm}{2\times 2R}\right) = \frac{GMm}{8R} = \frac{gR^2m}{8R} = \frac{1}{8}mgR$$

2. 外太空中的某雙星係由質量分別為m與3m的兩星體所組成，兩星體藉由彼此間的萬有引力互繞其質量中心運轉。已知兩星距離d，則欲將兩星拆散成相距無窮遠處至少需多少能量？





$$束縛能 E_b = -E = -\left(-\frac{G3mm}{2d}\right) = \frac{3Gm^2}{2d}$$

第90頁

1.一彈簧橫置於一水平光滑平面上，一端固定，另一端連結一木塊作振幅R的簡諧運動，試求

（1）當木塊離平衡點的位移為最大位移的 2/3時，木塊動能為？彈簧位能為？

（2）簡諧運動中木塊最大動能為？

總力學能$E=$(任一點)$U+K=$(最大位能)$\frac{1}{2}kR^2=$(最大動能)$\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2$

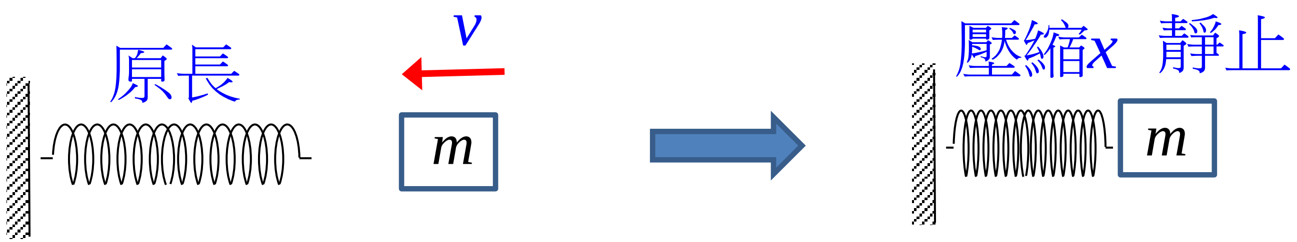
(1)已知形變量$x=\frac{2}{3}R$

所以位能$U=\frac{1}{2}k\times\left(\frac{2}{3}R\right)^2=\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}kR^2$

動能$K=E-U=\frac{1}{2}kR^2-\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}kR^2=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}kR^2$

(2)(最大動能)$\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2=$(最大位能)$\frac{1}{2}kR^2$

2一條彈力常數為*k*的彈簧平放在光滑水平面上，一端定在牆上。如有質量為*m*的木塊以速率v撞向彈簧的另一端，則此彈簧的最大壓縮長度為？

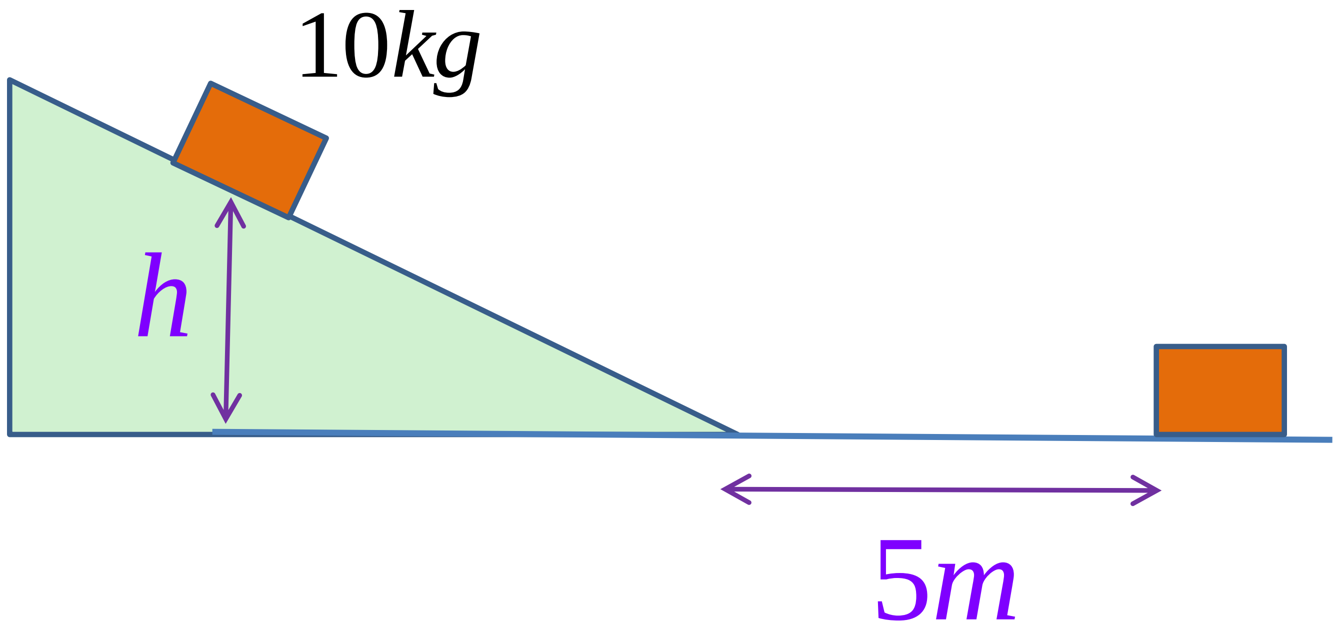


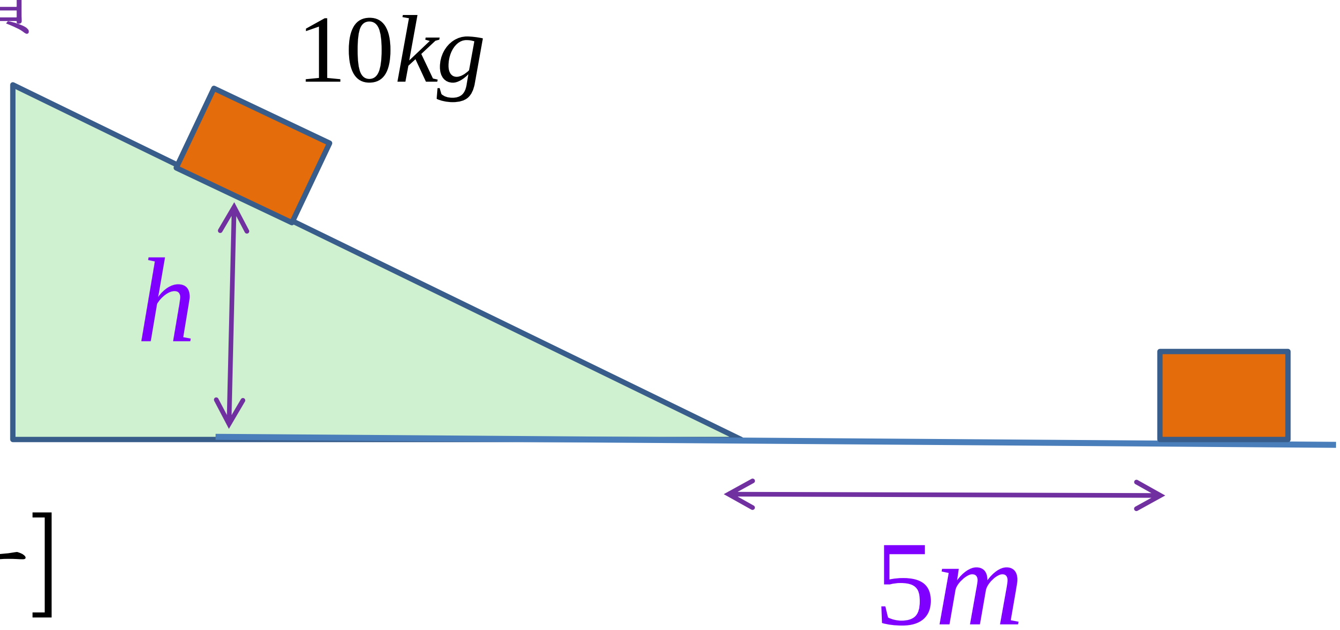
力學能守恆：$\left[K_1 + U_1 = K_2 + U_2\right]$

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{mv^2}{k}}$$

1.有一10仟克之物體從光滑斜面滑下後，在動摩擦係數為0.4之平面上滑行5米後停止。則物體原在斜面上之高度為若干米？





[解一]

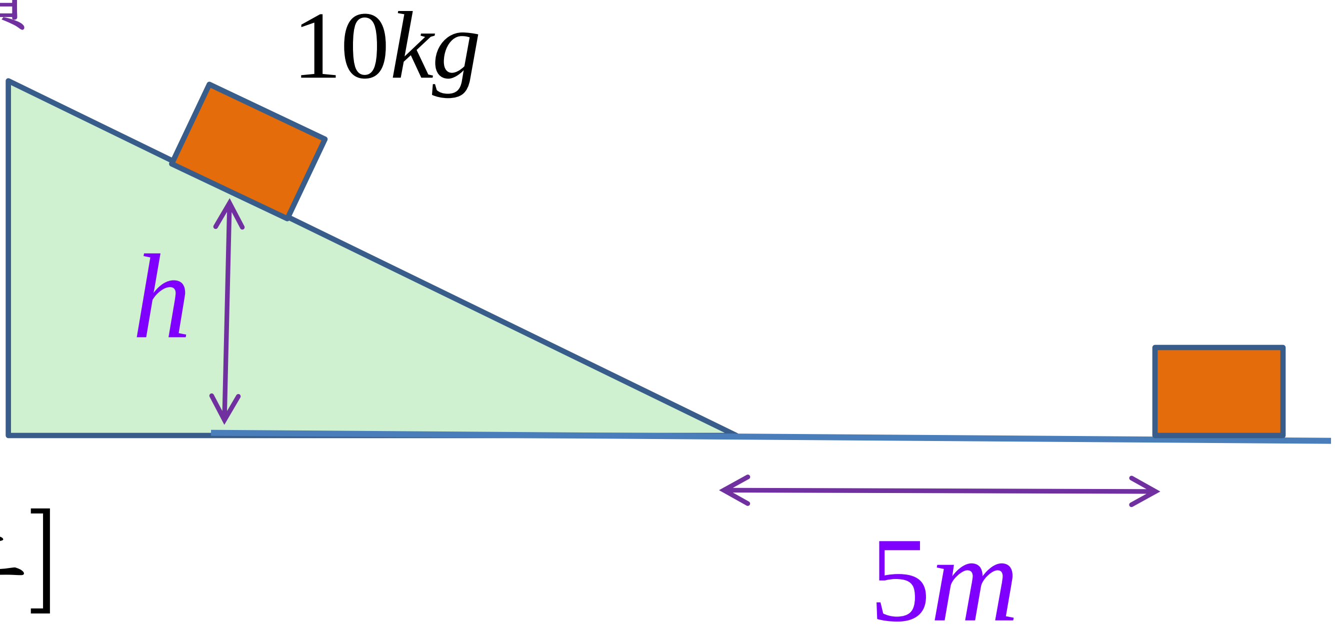
$$\left[W_{非保守力} = \Delta E = \Delta U + \Delta K\right]$$

$$W_f = \Delta U_g + \Delta K$$

$$\left(-f_k \times d = -mgh\right)$$

$$-0.4 \times 10 \times 10 \times 5 = -10 \times 10 \times h$$

$$\therefore h = 2[m]$$



[解二]

$$\left[W_{合力} = \Delta K\right]$$

$$W_f + W_g = \Delta K$$

$$\left(-f_k \times d + mgh = 0\right)$$

$$-0.4 \times 10 \times 10 \times 5 + 10 \times 10 \times h = 0$$

$$\therefore h = 2\left[m\right]$$

*2.*施力使質量m的物體，沿斜角ϑ之斜面等速上移，若在鉛直方向升高h，假設斜面為光滑，則

（A）施力所作之功為mgh（B）重力所作之功為mgh

（C）重力位能增加mgh（D）淨力作功為mgh

（E）質量 之總力學能守恆。

(A) $\left[W_{\text{非保守力}} = \Delta E = \Delta U + \Delta K\right]$

$$W_{\text{施力}} = \Delta U_g + \Delta K = mgh$$

(B) $W_g = mgh$

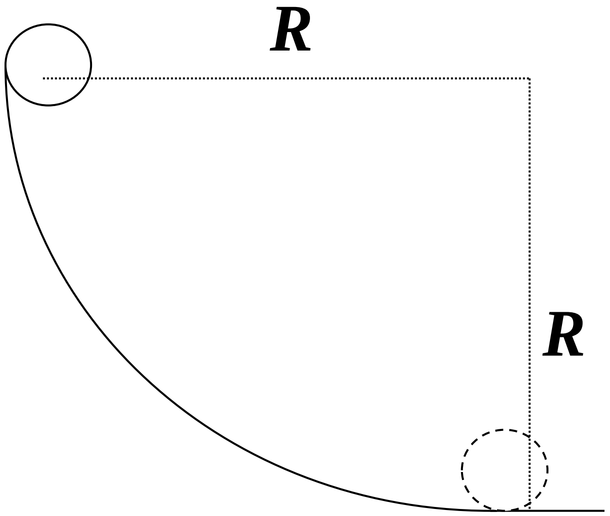
(C) $\Delta U_g = -mgh$

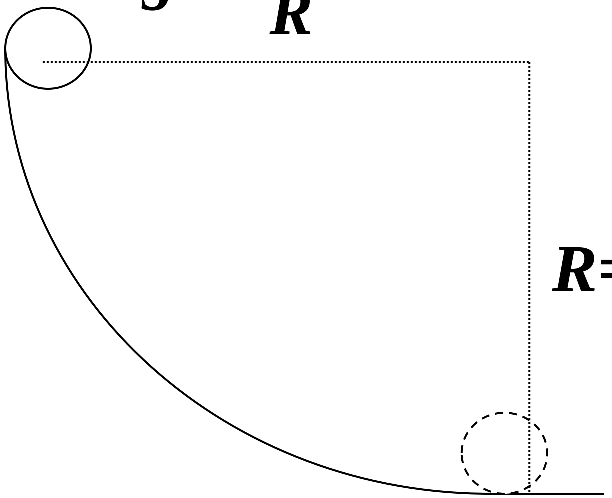
(D) $\left[W_{\text{合力}} = \Delta K\right]$ $W_{\text{合力}} = \Delta K = 0$

(E) $\Delta E = \Delta U + \Delta K = mgh$

力學能不守恆

*3.*質量*5*公斤的質點，沿著一半徑為*10*公尺的圓弧曲面從水平位置以等速率*2*公尺/秒滑至底部，如圖所示。則摩擦力作功？$(g=9.8m/s^2)$





$$\left[W_{\text{非保守力}} = \Delta E = \Delta U + \Delta K \right]$$

$$W_f = \Delta U_g + \Delta K = -mgR + 0 = -10 \times 9.8 \times 5 = -490 \left[J \right]$$