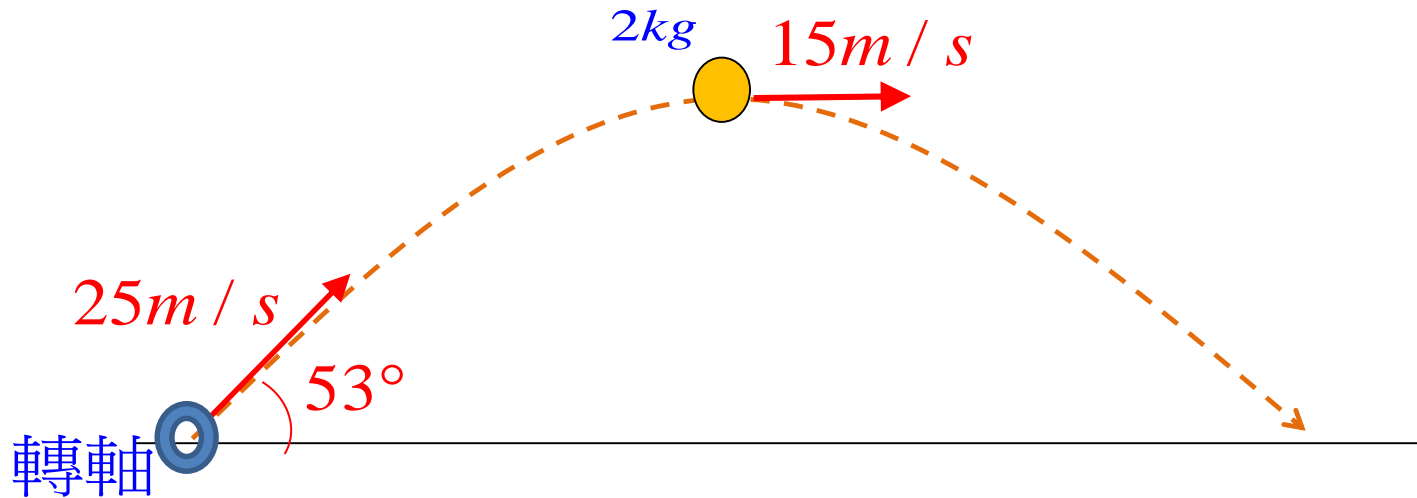
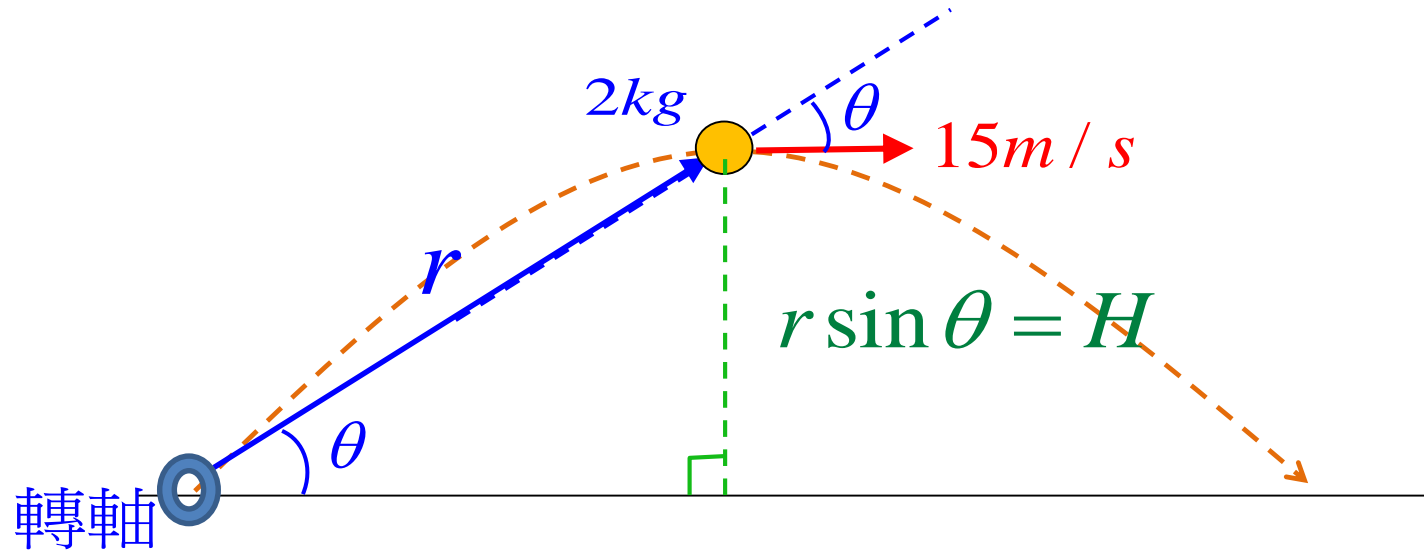


第1頁

1. 質量為 2kg 的質點以 25m/s 之初速度，拋射仰角為 53° 斜向拋出，求當達最大高度時，該(1) 質點對拋出原點之角動量？(2) 質點所受重力對拋出原點的力矩？ ($g = 10\text{m/s}^2$)



(1)

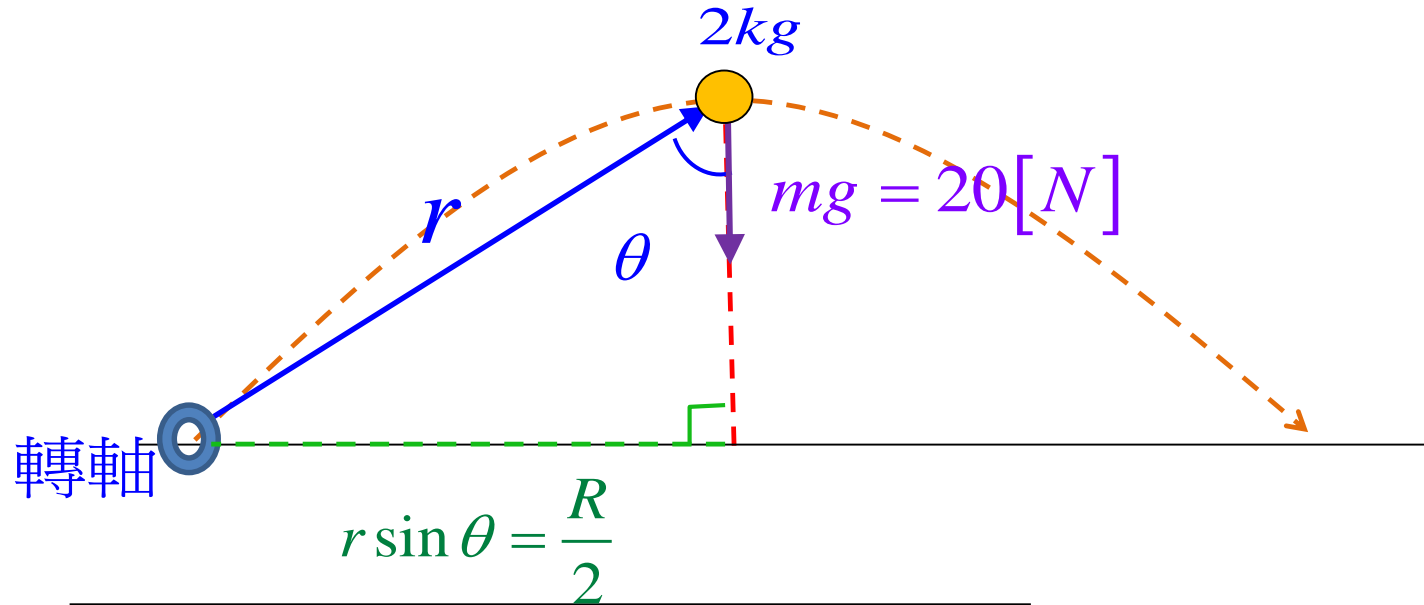


$$L = rmv \sin \theta = mvH$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{25^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2}{2 \times 10} = 20 [m]$$

$$\therefore L = mvH = 2 \times 15 \times 20 = 600 [kg \cdot m^2 / s]$$

(2)



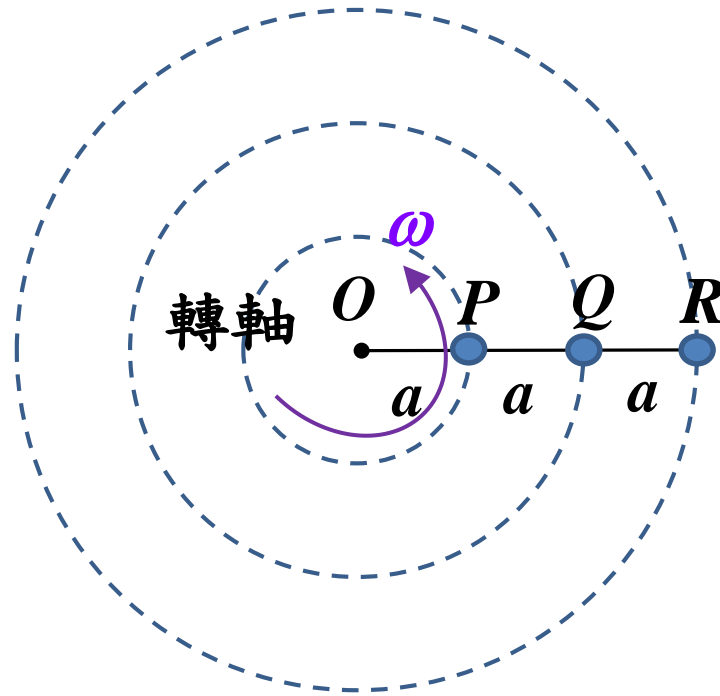
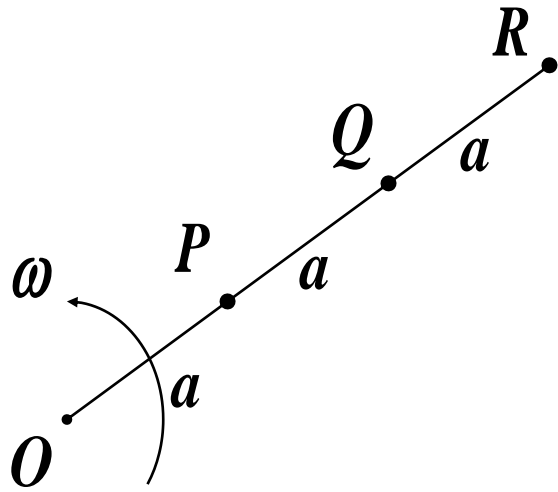
$$\tau = rF \sin \theta = rmg \sin \theta = mg \times \frac{R}{2}$$

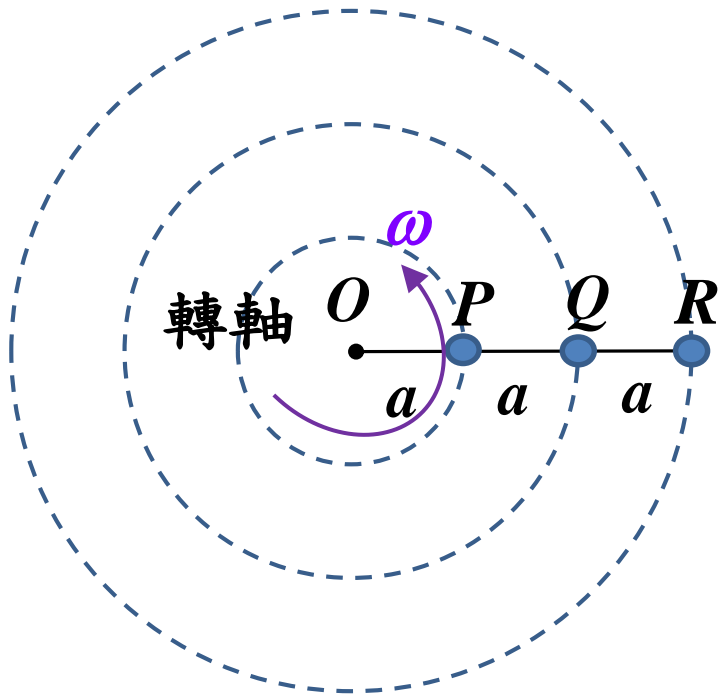
$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{2 \times 25^2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}}{10} = 60\text{[m]}$$

$$\therefore \tau = mg \times \frac{R}{2} = 20 \times \frac{60}{2} = 600\text{[N} \cdot \text{m]}$$

第1頁

2. 質量都是 m 的三質點，用長度皆為 a 的線段相連接，以角速度 ω 繞 O 點旋轉，如圖所示。若轉動時三個質點保持在同一直線上，求：
(1) 質點 Q 的角動量？ (2) 三個質點的角動量和？





$$L = rmv \sin 90^\circ = mr^2 \omega$$

$$(1) \quad L_Q = m(2a)^2 \omega = 4ma^2 \omega$$

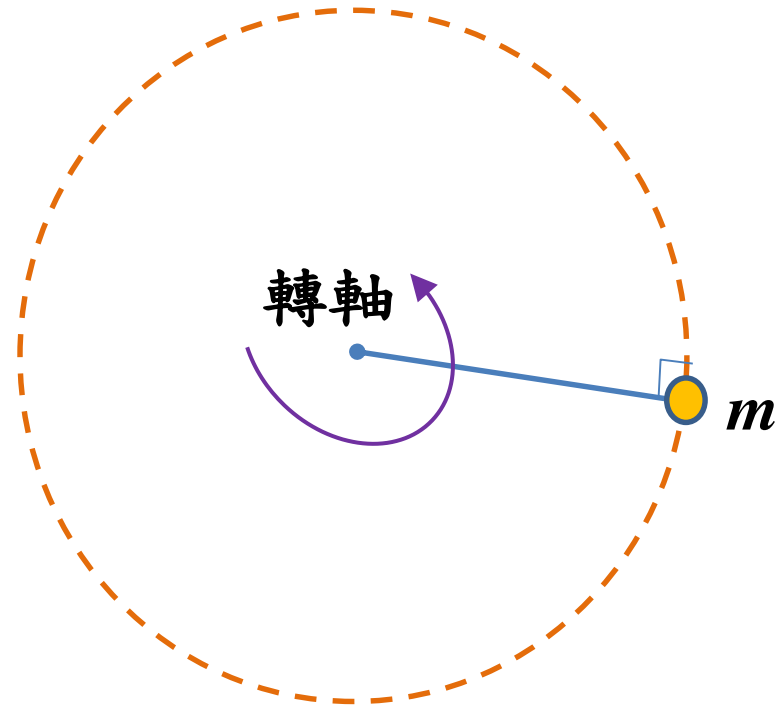
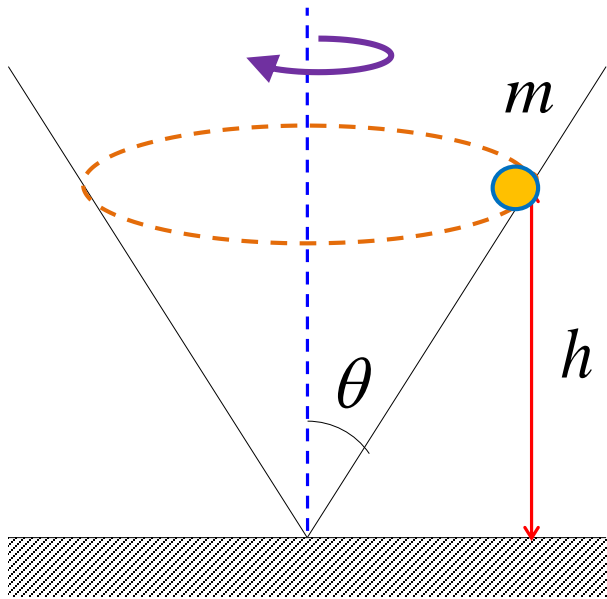
$$(2) \quad L_P = ma^2 \omega$$

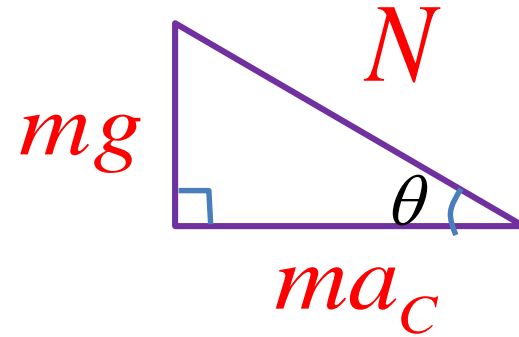
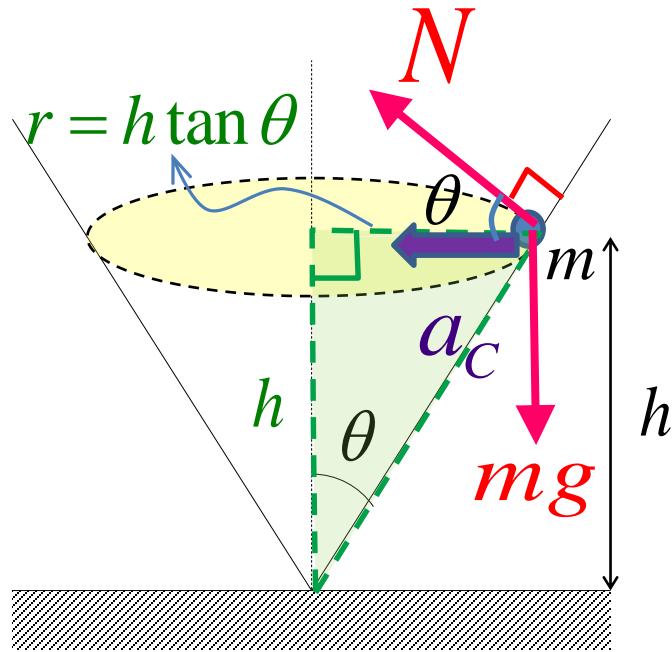
$$L_R = m(3a)^2 \omega = 9ma^2 \omega$$

$$\therefore L_P + L_Q + L_R = (1 + 4 + 9)ma^2 \omega = 14ma^2 \omega$$

第1頁

3. 如圖，一錐頂角 2θ 的圓錐形漏斗內面光滑，有一質量為 m 的小球在內部與錐頂相距 h 高處作角速度水平等速率圓周運動。設重力加速度為 g ，試求小球對通過錐頂鉛直軸的角動量為？

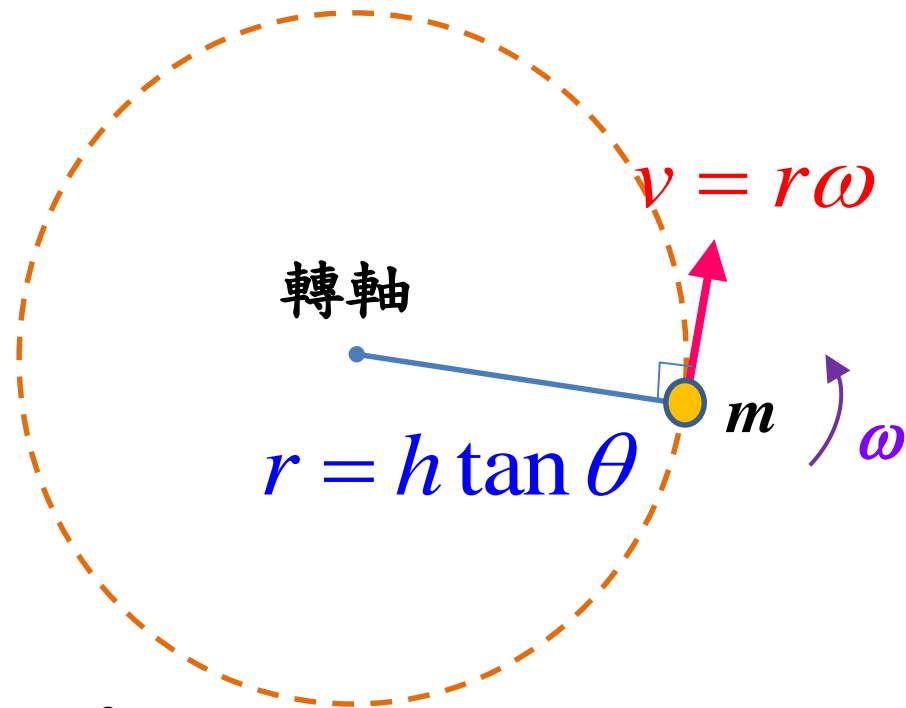
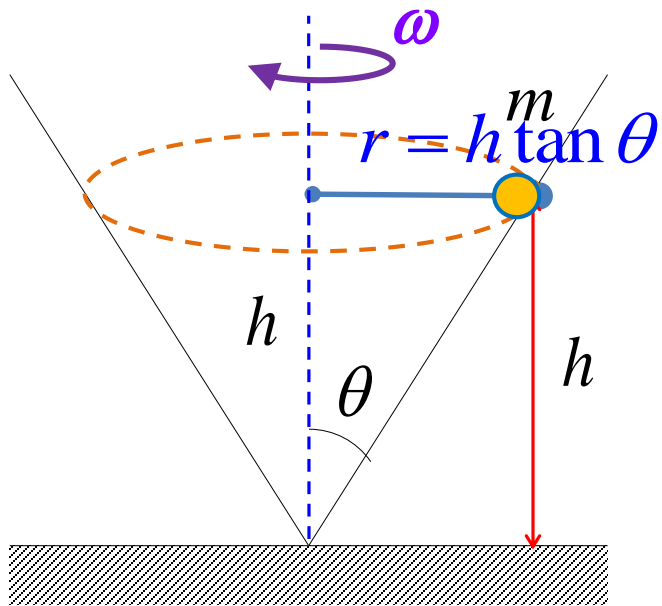




$$a_c = g \cot \theta \rightarrow h \tan \theta \omega^2 = g \cot \theta$$

$a_c = r \omega^2$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h \tan^2 \theta}}$$



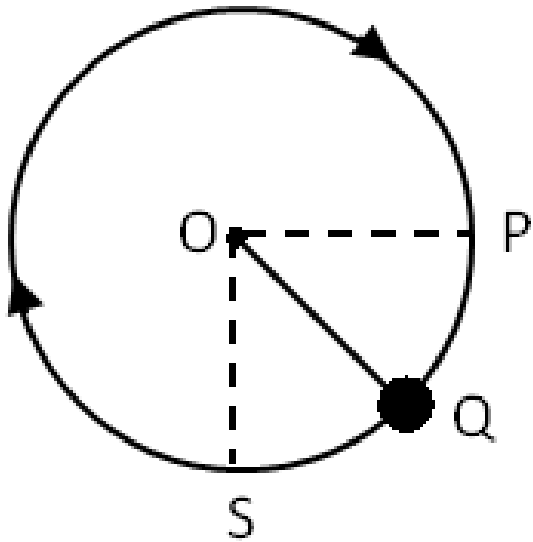
$$L = rmv \sin 90^\circ = mr^2 \omega$$

$$= m(h \tan \theta)^2 \times \sqrt{\frac{g}{h \tan^2 \theta}} = mh \tan \theta \sqrt{gh}$$

第1頁

1. 如圖，以輕繩繫住的小球，繞一水平軸在一鉛垂面作順時針、半徑固定的圓周運動， O 點為其圓心。相對 O 點而言，若忽略空氣阻力，試求：

- (A) 繩上的張力是否影響小球的角動量？
- (B) 小球角動量的方向？
- (C) P 、 Q 、 S 三點，小球角動量大小順序？
- (D) P 、 Q 、 S 三點，小球所受的重力力矩大小順序？
- (E) P 、 Q 、 S 三點，小球角動量隨時間的改變率大小順序？

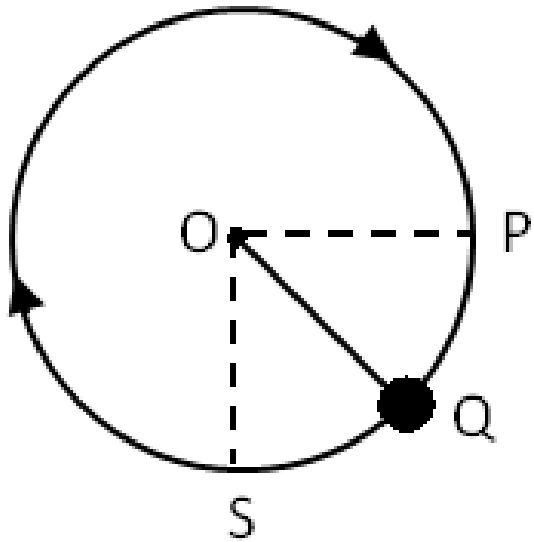


(A)繩上的張力是否影響小球的角動量？

$$\boxed{\text{轉動牛二：}\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}}$$

∴繩張力通過轉軸 O

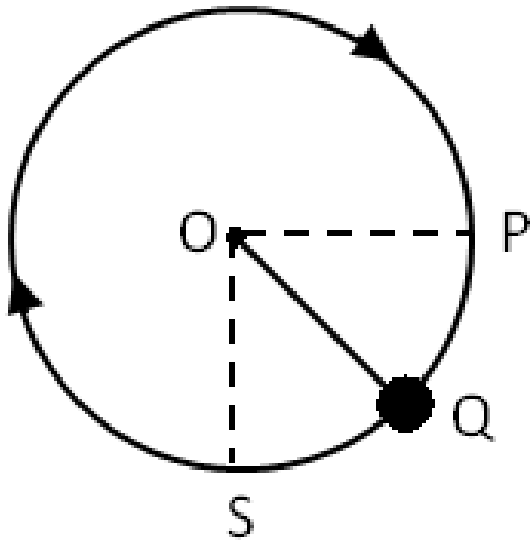
∴對轉軸 O 力矩 $\vec{\tau} = 0 \rightarrow$ 角動量守恆



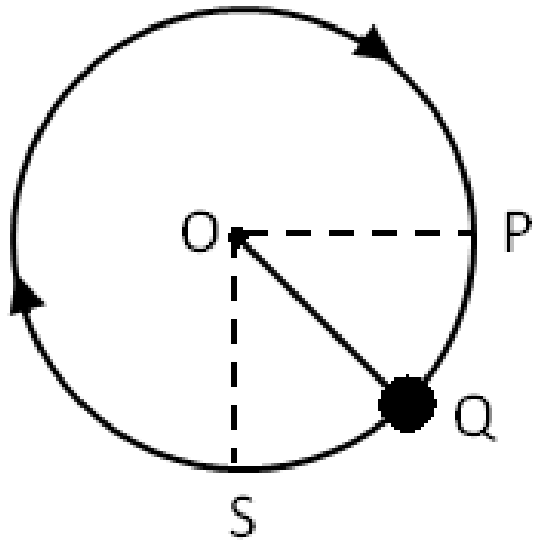
(B) 小球角動量的方向？

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

由右手螺旋定則知， $\vec{r} \times \vec{P}$ 垂直紙面向內



(C) P 、 Q 、 S 三點，小球角動量大小順序？

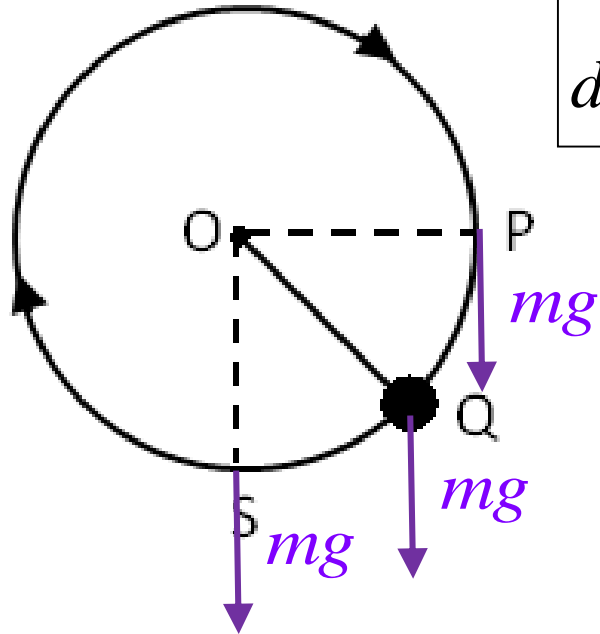


$$\text{圓周運動 } L = rmv \sin 90^\circ = rmv$$

$\therefore PQS$ 三處 r 相等且速率 $v_S > v_Q > v_P$

\therefore 角動量大小 $L_S > L_Q > L_P$

(D) P 、 Q 、 S 三點，小球所受的重重力力矩大小順序？



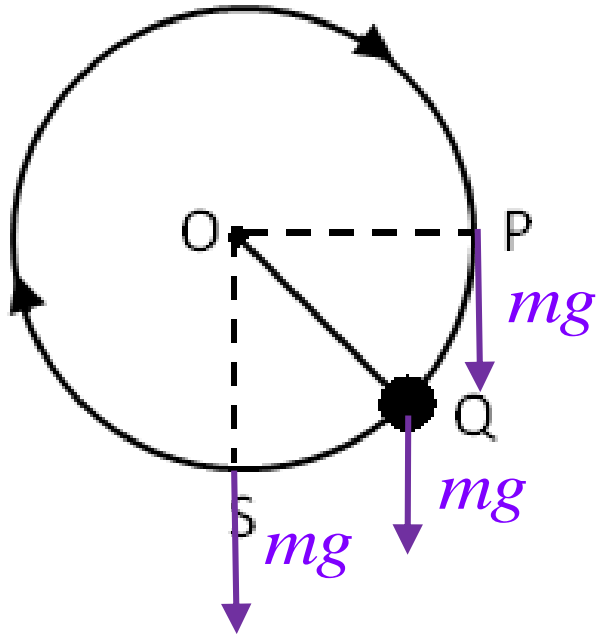
$$\tau = rmg \sin \theta = mgd$$

d 為力臂 (作用力延長線與轉軸垂直距離)

$\because mg$ 相等且力臂 $d_S < d_Q > d_R$

\therefore 力矩大小 $\tau_S < \tau_Q < \tau_P$

(E) P 、 Q 、 S 三點，小球角動量隨時間的改變率大小順序？



$$\text{轉動牛二：}\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \text{角動量時變率} \left(\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right) = \text{力矩} \vec{\tau}$$

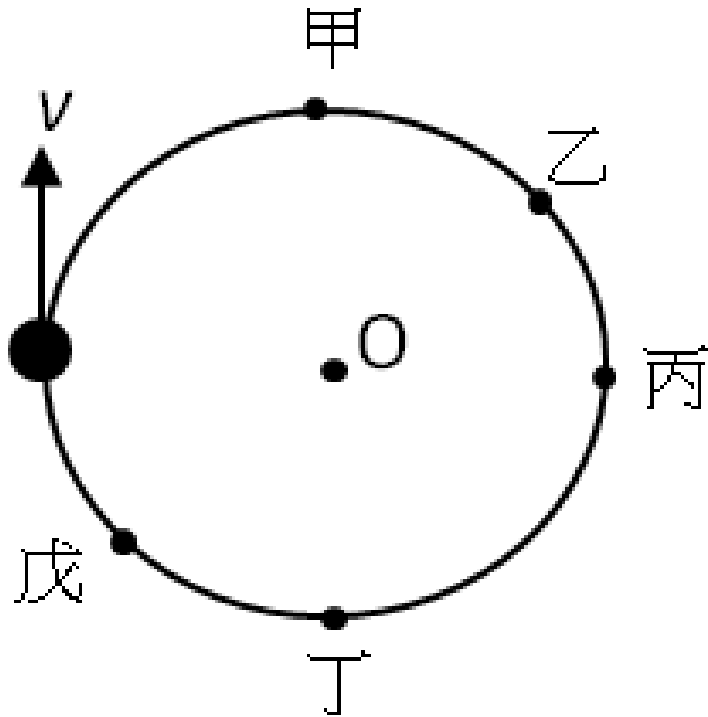
\therefore 由(D)知重力力矩大小 $\tau_S < \tau_Q < \tau_P$

且本題只有重力對轉軸會有力矩

\therefore 角動量時變率 $S < Q < P$

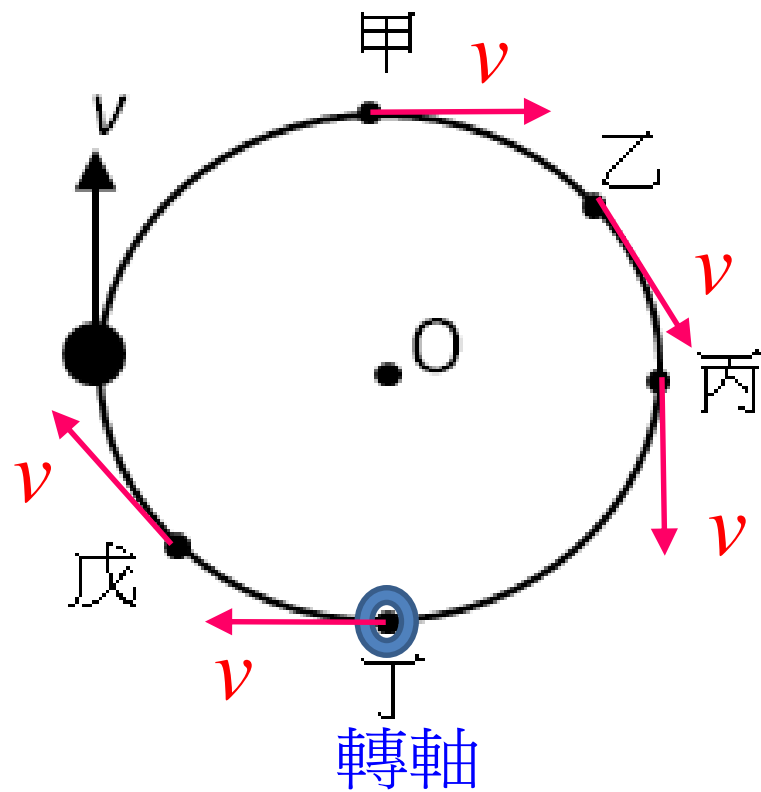
第1頁

2.如圖，一質點以O為圓心在一水平面上作等速率圓周運動，其速率為 v ，如圖所示。甲、乙、丙、丁、戊皆在圓周上，如果以丁點為參考點測量質點的角動量，則該質點(1)角動量 (2)角動量時間變化率的量值在圖中哪一處最大？



第1頁

(1) 角動量



$$L = rmv \sin \theta = mvd$$

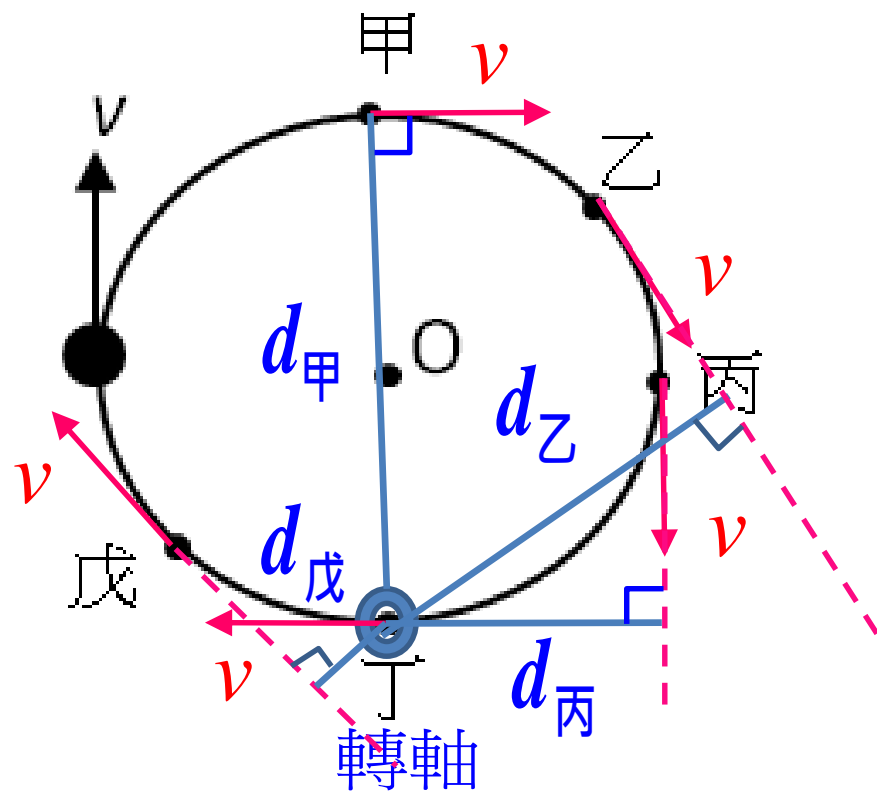
d 為速度延長線與轉軸垂直距離

$\therefore mv$ 均相同且 d 的大小為 甲 > 乙 > 丙 > 戊 > 丁

\therefore 角動量的大小為 甲 > 乙 > 丙 > 戊 > 丁

第1頁

(1) 角動量

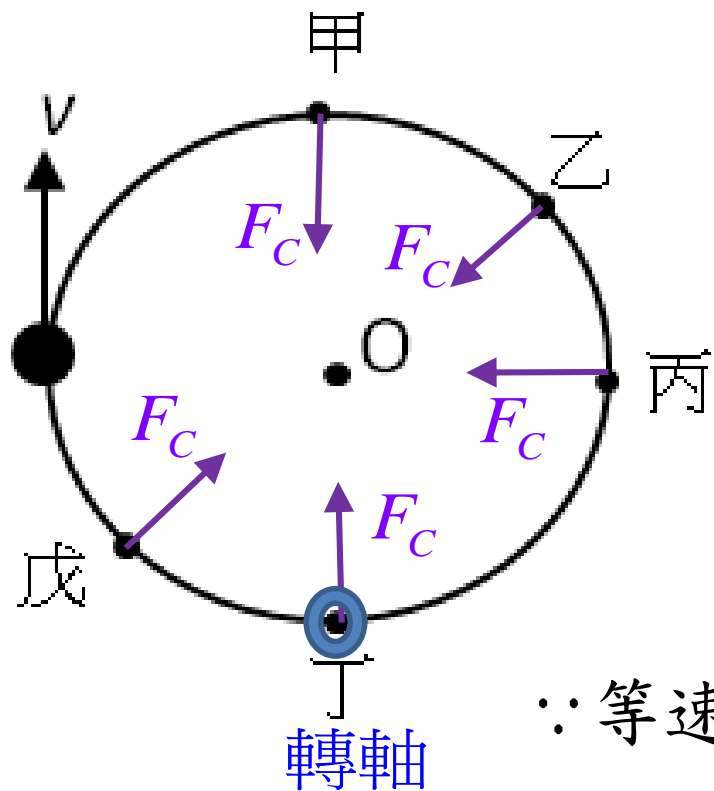


$\therefore mv$ 均相同且 d 的大小為甲 $>$ 乙 $>$ 丙 $>$ 戊 $>$ 丁

\therefore 角動量的大小為甲 $>$ 乙 $>$ 丙 $>$ 戊 $>$ 丁

第1頁

(2)角動量時間變化率的量值



$$\tau = rmg \sin \theta = mgd$$

d 為力臂 (作用力延長線與轉軸垂直距離)

$$\text{轉動牛二: } \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \text{角動量時變率} \left(\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right) = \text{力矩} \vec{\tau}$$

∴等速率圓周運動 合力為向心力

各點向心力大小不變方向指向圓心

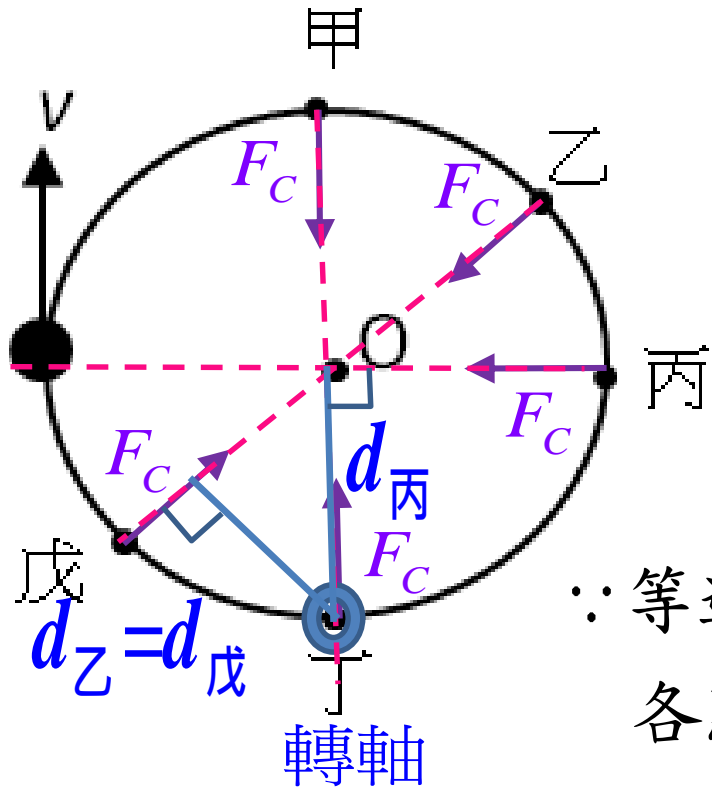
由力臂 d 大小 丙>乙=戊>甲=丁=0

∴力矩大小 丙>乙=戊>甲=丁=0

→角動量時變率 丙>乙=戊>甲=丁=0

第1頁

(2)角動量時間變化率的量值

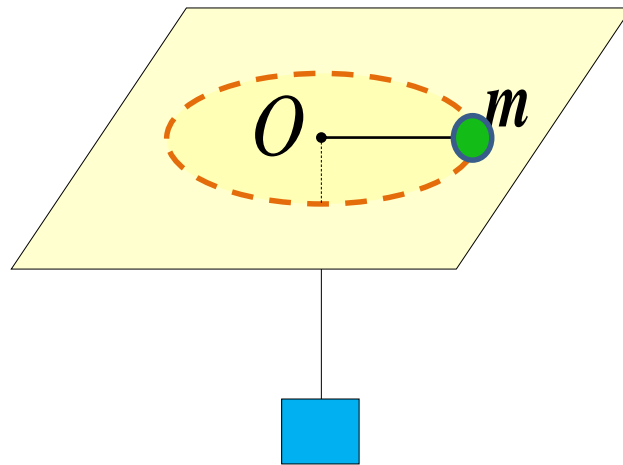


- ∴等速率圓周運動 合力為向心力
- 各點向心力大小不變方向指向圓心
- 由力臂 d 大小 丙 $>$ 乙 $=$ 戊 $>$ 甲 $=$ 丁 $=0$
- ∴力矩大小 丙 $>$ 乙 $=$ 戊 $>$ 甲 $=$ 丁 $=0$
- 角動量時變率 丙 $>$ 乙 $=$ 戊 $>$ 甲 $=$ 丁 $=0$

第1頁

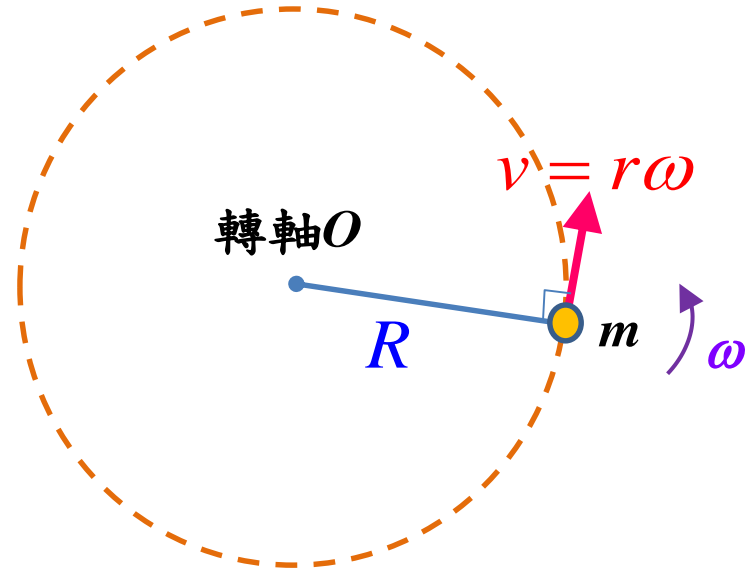
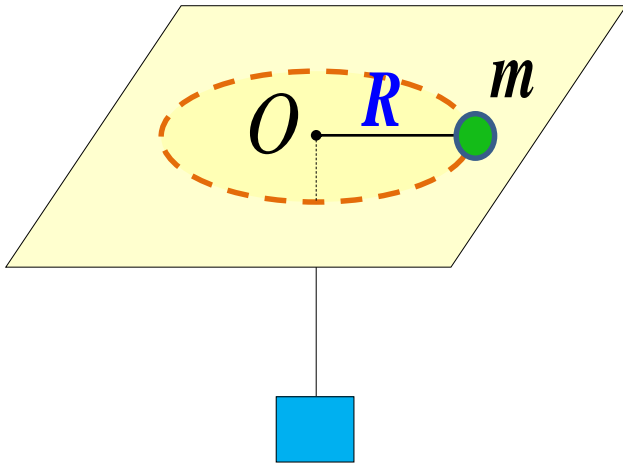
如圖所示，光滑桌面中心穿有一孔，一繩穿過此孔桌面上的一端繫有質量為 m 的小球作半徑為 R 而速率為 u 的圓周運動，桌面下一端繫一物體，恰可平衡，則：（重力加速度 g ）

- (1) m 對 O 點的角動量大小為何？
- (2) 繩子張力大小？桌面下一端繫一物體質量為何？
- (3) 桌下繩的一端改用手施力緩慢下拉，使 m 的圓周半徑變為 $R/3$ ，則此時 m 對 O 點的角動量大小變為多少？ m 的速率變為多少？繩子的張力又變為多少？



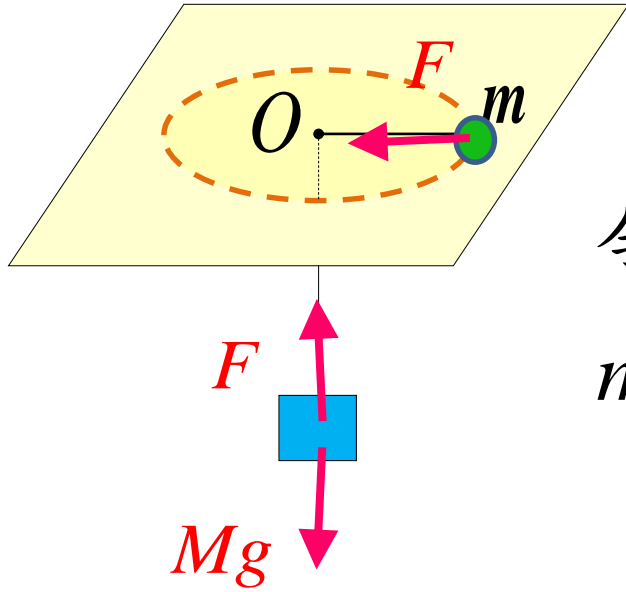
第1頁

(1) m 對 O 點的角動量大為何？



$$L = Rmv \sin 90^\circ = Rmv$$

(2) 繩子張力大小？為何桌面下一端繫一物體質量為何？



令物體質量 M

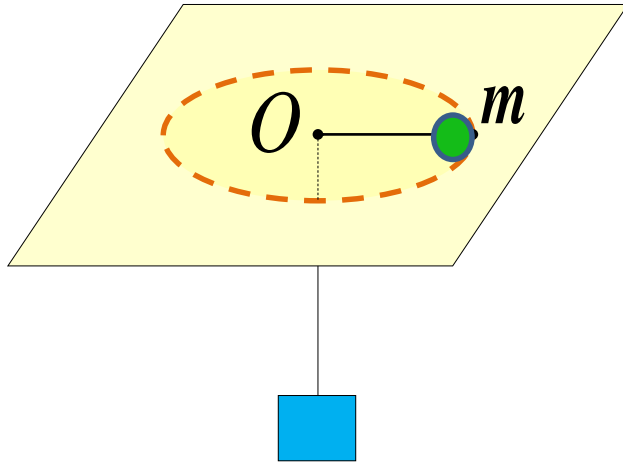
m : 等速率圓周運動 $[F_c = ma_c]$

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

M : 靜止 合力 = 0

$$\therefore Mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow M = \frac{mv^2}{gR}$$

(3)



$\therefore m$ 所受張力通過轉軸 O

$\therefore m$ 對 O 角動量守恆

$$L = Rmv \text{ 不變}$$

令此時速率 v' 角動量不變 $\therefore Rmv = \frac{R}{3}mv' \rightarrow v' = 3v$

令此時繩張力 F' m : 等速率圓周運動 $[F_c = ma_c]$

$$\therefore F' = m \frac{v'^2}{\frac{R}{3}} = m \frac{(3v)^2}{\frac{R}{3}} = 27m \frac{v^2}{R}$$