高二 物理 (上學期)

上課講義

第1章 直線運動

第2章 平面運動

第3章 靜力學

第4章 牛頓運動定律

第5章 週期運動

班級________________

座號________________

姓名________________

蔡豐光 編授 104.09

第一章　直線運動

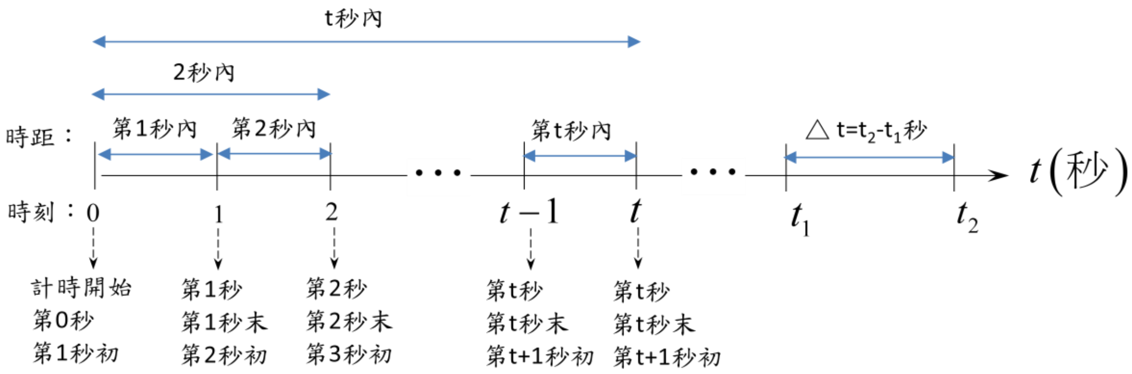
1-1 位遺和路徑長　1-2 速度與速率　　1-3 加速度

一、質點　：忽略物體的大小和形狀，用一個有質量的點來代替整個物體。

二、時間座標：若以時間為一座標軸 (如下圖)

時距：二個不同時刻之間所包含的一段「時間長」，如第2秒內、3秒內…等。

時刻：每一個剎那瞬間都代表一不同的時刻，如第1秒、第1秒初、第2秒末等。



三、描述物體運動的物理量

物理量	符號		定義
位置	$\vec{x}$	向量	質點與原點（參考點）間距離的大小與方向，為向量，稱為「位置向量」。
位移	$\Delta\vec{x}$	向量	位置變化量　$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$
路徑長	$\Delta\ell$	純量	物體實際移動所經過的路徑長度，只有正值。
速度	$\vec{v}$	向量	單位時間內的位移 平均速度：$\bar{v}\equiv\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$ 瞬時速度：$v\equiv\dfrac{dx}{dt}\equiv\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$

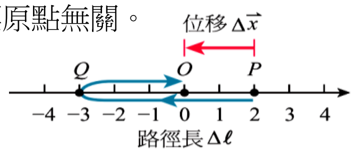
速率	***v***	純量	單位時間內所經過的路徑長，只有正值。 平均速率： $\overline{v_S} \equiv \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}$ 瞬時速率： $v_S \equiv \dfrac{d\ell}{dt} \equiv \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}$
加速度	$\vec{a}$	向量	單位時間內的速度變化量 平均加速度： $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ 瞬時加速度： $a = \dfrac{dv}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ ※ **方向** ：(1) 與速度變化方向相同 $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ (2) 與合力方向相同 $\vec{F} = m\vec{a}$

※ 向量的正負號表示方向，沒有大小的關係，在作向量的加減時不可省略。

$\boxed{\text{註}}$ ：“△”(delta)表示某物理量之變化量或改變量 $\boxed{\triangle \mathbf{A} = \mathrm{A}_{末} - \mathrm{A}_{初}}$ (A可為任何物理量)

（1） 重要性質：

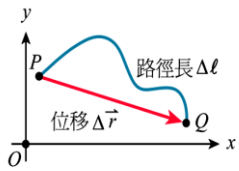
① 位移只與起點、終點有關，與所經的路徑及所取的座標原點無關。



② 單方向前進之線性運動體 (不能有轉折)，

運動路徑長 ＝ 位移大小。

曲線運動體，所經過路徑長大於位移大小。



③ 速度有大小，亦有方向。平均速度的方向與位移方向相同。

④ 平均速度的大小小於或等於平均速率（∵ $\Delta s \geq |\Delta x|$ ），但瞬時速度的大小一定等於瞬時速率（∵當時間很短時，路徑長等於位移大小 $ds = |dx|$ ）

⑤ 平均加速度的方向與速度變化的方向相同，但不一定與瞬時速度的方向相同。

⑥ 加速度a是描述 速度變化快慢 的物理量，其大小可由 $\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ 求出。但a與v、Δv 、Δt 均無關，它是由作用在物體上的合力與物體的質量二者共同決定的（牛頓第二定律）。

⑦ 加速度的正、負代表方向。若加速度與速度同方向，則物體的速率增加。

（2）加速度的效應：

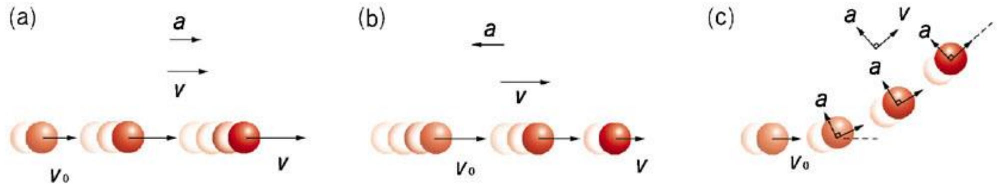


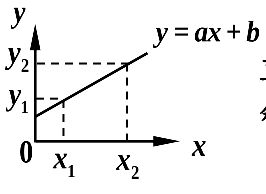
圖 2－13　加速度對速度的影響。(a)若加速度與速度同向，則速度變快。(b)若加速度與速度反向，則速度變慢。(c)若加速度與速度垂直，則速度方向改變。

四、直線運動的位置、速度、加速度對時間的函數圖形：

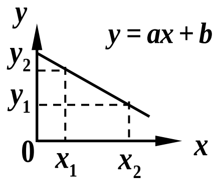
物理意義	$x-t$ 圖 $\Rightarrow x=x(t)$	$v-t$ 圖 $\Rightarrow v=v(t)$	$a-t$ 圖 $\Rightarrow a=a(t)$
割線的斜率	平均速度	平均加速度	
切線的斜率	瞬時速度	瞬時加速度	
曲線與t軸所圍的面積		位移（橫軸上方取正值，橫軸下方取負值） 路徑長（橫軸上、下方均取正值）	速度變化量

[回顧] 直線的斜率＝直線上任兩點的鉛直座標差與水平座標差的比值。

公式：$\boxed{\text{斜率}=\dfrac{\text{鉛直座標差}}{\text{水平座標差}}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a}$



直線斜向右上
斜率為正$a>0$



直線斜向右下
斜率為負$a<0$

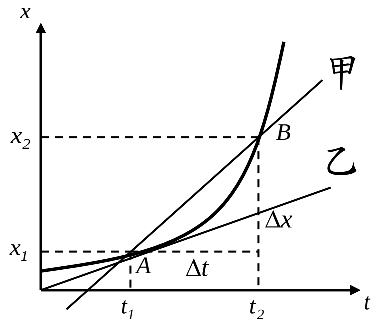
（1）位置對時間關係圖（x-t圖）

① 平均速度：$\boxed{\bar{v}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$（AB兩點間割線斜率）

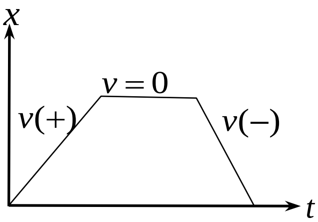
圖中甲線斜率為 $t_1 \to t_2$ 平均速度

② 瞬時速度：$\boxed{v(t_1)=\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$（A切線斜率）

圖中乙線斜率為 t_1 瞬時速度



斜率
- > 0 ⇒ 速度>0，向+x軸方向位移
- = 0 ⇒ 靜止
- < 0 ⇒ 速度<0，向-x軸方向位移



（2）速度對時間關係圖（v-t圖）

① 平均加速度：$\boxed{\bar{a}=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}}$（AB兩點間割線的斜率）

圖中甲線斜率為 $t_1 \to t_2$ 平均加速度

② 瞬時加速度：$\boxed{a(t_1)=\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}}$（A切線斜率）

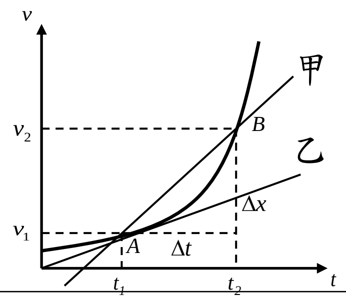
圖中乙線斜率為 t_1 瞬時加速度

③ 位移：v-t 圖線與 t 軸所圍面積

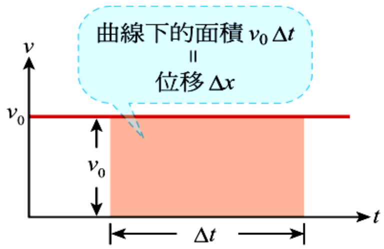
（t軸上方取正值，t軸下方取負值）

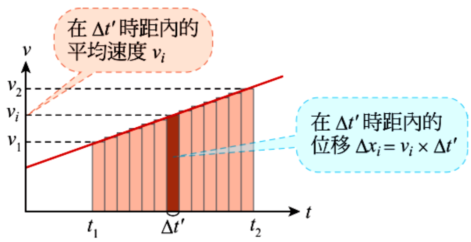
④ 路徑長：v-t 圖線與 t 軸所圍面積

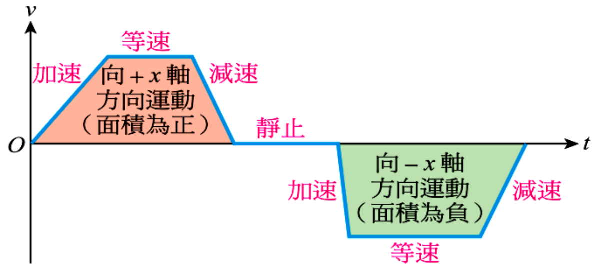
（t軸上、下方均取正值）



斜率
- >0 ⇒ 加速度>0，向+x軸方向加速(速率可能增加，也可能減小)
- =0 ⇒ 加速度=0，等速度
- <0 ⇒ 加速度<0，向-x軸方向加速(速率可能增加，也可能減小)

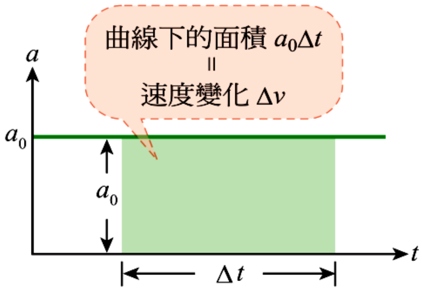


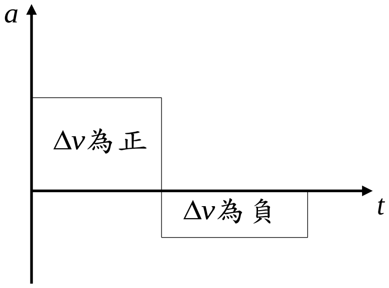


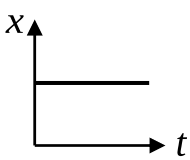
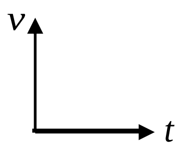
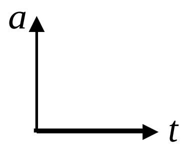
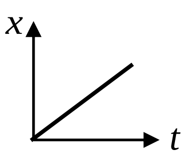
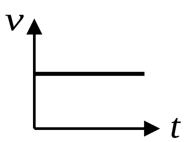
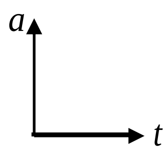
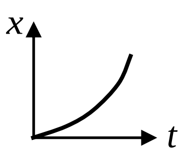
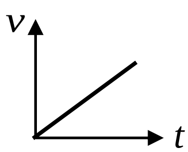
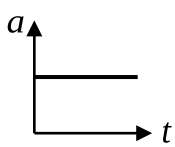


（3）.加速度對時間關係圖（*a-t* 圖）

a-t 圖線與 *t* 軸所圍面積（*t* 軸上方取正值，下方取負值） ＝ 該時距速度變化量

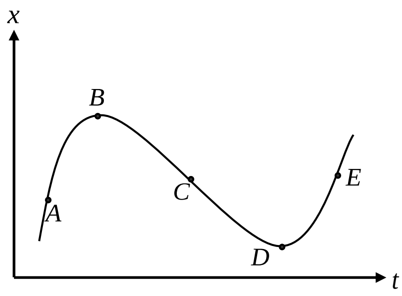




	x-t圖	v-t圖	a-t圖
靜止			
等速度			
等加速度			

$\boxed{\text{註}}$： 由$x-t$ 圖求速度與加速度的正、負方向。

	v	a
A ⇒ B	+	–
B ⇒ C	–	–
C ⇒ D	–	+
D ⇒ E	+	+



五、利用$\boxed{\text{微分}}$求直線運動的<u>運動方程式</u>：

（1）微分：速度與加速度的極限($\lim\limits_{\Delta t\to 0}$)求法，又稱為微分。（$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{dx}{dt}=x'(t)$）

[說明] 2次多項式函數：

x-t ： $x(t)=At^2+Bt+C$【x-t圖為二次曲線＝拋物線】

→v-t ：

$$\boxed{\begin{aligned}&v(t)=x'(t)=\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{(t+\Delta t)-t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)^2+B(t+\Delta t)+C-\left[At^2+Bt+C\right]}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2At\Delta t+A(\Delta t)^2+B\Delta t}{\Delta t}=2At+B+A\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t\\&\underset{\text{以}\Delta t=0\text{帶入}}{=}2At+B\end{aligned}}$$

→a-t ：

$$\boxed{\begin{aligned}&a(t)=v'(t)=x''(t)=\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{(t+\Delta t)-t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2A(t+\Delta t)+B-\left[2At+B\right]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2A\Delta t}{\Delta t}=2A\end{aligned}}$$

→ 也說明了 *x-t* 為二次函數的運動為等加速度直線運動。

（2）n 次多項式微分規則：各分項照此規則微分再相加。

[規則] $\boxed{\textbf{\textit{1.}指數乘係數 \quad \textit{2.}降一次方（指數減1） \quad \textit{3.}常數項微分 = 0}}$

① 等加速度運動常用微分（指數函數微分） $\frac{d}{dt}(c)=0$ ， $\frac{d}{dt}\left(t^n\right)=nt^{n-1}$ ，

例：$\frac{d}{dt}\left(2t^2+3t+5\right)=4t+3$

② [補充] 三角函數的微分：簡諧運動常用微分（三角函數微分）

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t)=-\omega\sin(\omega t) \qquad \frac{d}{dt}\sin(\omega t)=\omega\cos(\omega t)$$

例：$\frac{d}{dt}3\sin(\omega t)=3\omega\cos(\omega t)$ $\quad \frac{d}{dt}5\cos(\omega t)=-5\omega\sin(\omega t)$

（4）運動方程式

$$x=x(t) \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\Leftrightarrow}} v=v(t) \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\Leftrightarrow}} a=a(t)$$

範例一

1.下列何者正確？

(A)運動之物體若速度方向不變，任何時間內平均速度與平均速率之大小恆相同

(B)運動之物體若速度大小不變，任何時間內平均速度與平均速率大小恆相同

(C)分針尖端在任一時間間隔的平均速度不大於同時間的平均速率

(D)分針的尖端在某一時刻的瞬時速度值等於該時刻尖端的瞬時速率

(E)運動之物體若速度改變，則其速率必將改變。

2.下列有關於「速度」與「加速度」的敘述何者正確？

(A)物體的速度為零時，其加速度亦為零

(B)物體的加速度為零時，其速度亦為零

(C)物體速度的方向不一定與加速度方向相同

(D)物體作鉛直上拋至最高點時，速度為零，加速度亦為零

(E)物體作自由落體時，速度與加速度方向相同。

3.下列敘述何者正確？

(A)加速度漸減時，速度可能漸增

(B)有加速度時，速度必改變

(C)速度改變，必有加速度

(D)速率改變必有加速度

(E)速率漸減必有相反方向的加速。

Ans:1.ACD2.CE 3.*ABCDE*

範例二

1.假日登山，上山之平均速率為v，下山（循原路）之平均速率為$3v$，試求全程之
(a)平均速度為？ (b)平均速率為？
2.車子由A直線前進行駛到B，試求以下各狀況下的平均速度
(a)全程時間之前後兩半段的平均速度各為u、v
(b)前後兩半段行程的平均速度各為 u、v

Ans: *1*. (a) 0 (b) $\frac{3}{2}v$ *2* (a) $\frac{u+v}{2}$ (b) $\frac{2uv}{u+v}$

範例三

1.如圖，為直線運動之位置對時間之關係圖($0\sim t_2$ 為拋物線，$t_2\sim t_4$ 為拋物線，$t_4\sim t_5$為直線)，試求 (*a*) 做減速率運動之區域為何？

(b) 加速度方向與運動方向相同的區域為何？ (c) 何時瞬時速度為0？

2.一物體在直線上運動的 $x-t$ 圖，如圖所示，則

(*a*) 物體從$t=2$ s到$t=4$ s的平均速度為何？ (b) 物體在$t=4$s的瞬時速度為何？

3.右圖所示為一個沿x軸運動質點之位置x與時間 t 的關係，

試問該質點：(*a*) $t = 2$ s時(2秒末)速度為？ (b) $t = 6$ s時(6秒末)速度為？

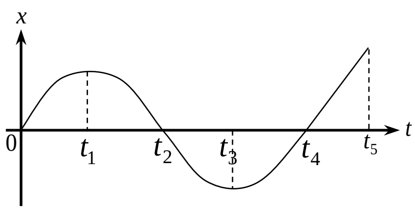
(c) $t = 10$ s時(10秒末)速度為？ (d) $t = 0\sim12$ s時(12秒內)平均速度為？

(e) $t = 0\sim12$ s時(12秒內)平均速率為？

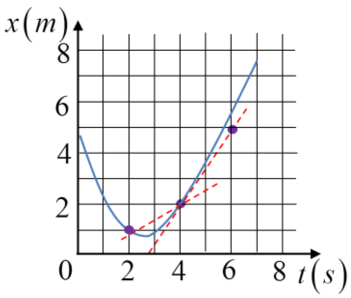
Ans: **1.** (*a*)$0\sim t_1$，$t_2\sim t_3$ (b)$t_1\sim t_2$，$t_3\sim t_4$ (c)t_1，t_3

2. (a)0.5m/s (b)1.5 m/s 3.(a)0.5 m/s (b)0 m/s (c) -1 m/s (d)$-\frac{1}{6}m/s$ *(e)0.5 m/s*

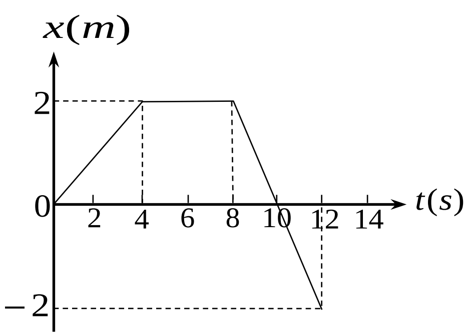
1.



2.



3.



範例四

1.右圖所示為一個沿x軸運動質點之速度v與時間 t 的關係，若$t = 0$時該質點位於 $x = 4\ m$ 處，試問該質點：(1) $t = 12$ s時(12秒末)位置x為？ (2) $t = 2$ s時(2秒末)加速度為？ (3) $t = 10$ s時(10秒末)加速度為？ (4) t =0~12 s時(12秒內)平均加速度為？

2.附圖所示為甲、乙、丙三直線運動質點的速度與時間關係圖則下列描述正確的是：

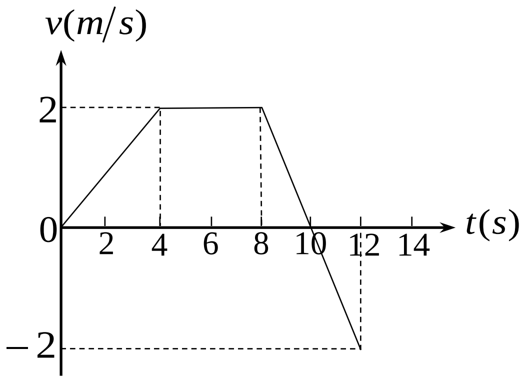
(A) T 秒末加速度甲>乙>丙 (B) T秒內平均加速度：甲=乙=丙

(C) T秒內平均速度：甲=乙=丙=2V_o (D) T 秒末，丙車居最前面

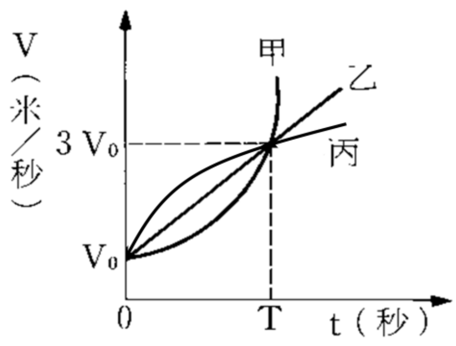
(E) T秒末，丙的加速度與速度方向相反 。

Ans:* 1.(1)16 m* **(2)0.**5 m/s^2 (3) **-1** m/s^2 (4) $-\frac{1}{6}m/s^2$ ***3.***AB

1.



2.



範例五

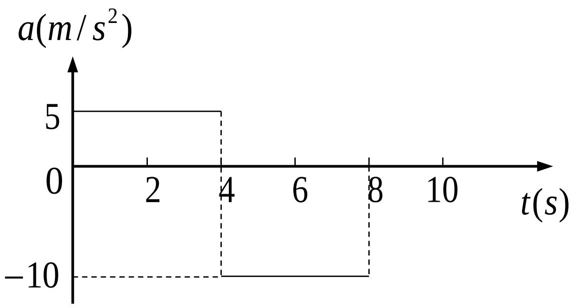
一質點作加速度運動，初速度為 5 m/s，其加速度對時間如圖所示， 試求：

(*a*) *4*秒時速度？ *8*秒時速度？ *10*秒時速度？

(*b*) 幾秒時速度為零？ (*c*) *0~10*秒時速度對時間關係圖？

(*d*) 質點在*10*秒內的位移為多少？ (*e*) *10*秒內的平均加速度為？

Ans: .(a)25m/s -15m/s -15m/s (b)6.5 (c)略 (d)50 m (e)-2m/s^2



範例六

運動體沿直線運動，其位置與時間之關係為 $x(t) = 16t - 4t^2$，其中 x 以 m，t 以 s 為單位，試求：*(a)* $t = 3$ s 之瞬時速度　*(b)* 物體靜止時之位置與時刻

(c) $t = 3$ s 之瞬時加速度　*(d)* 4 s 內物體的平均速度與平均加速度

(e) 4 s 內物體的平均速率　*(f)* 作 $x-t$、$v-t$、$a-$t 圖。

Ans: .(a) −8 m/s　(b)2s、18 m　(c) −8 m/s²　(d) 0 、 −8 m/s²　(e) 8 m/s

【提示】求平均速率時，須找出反向點時間位置。

六、等加速度運動

1. 等加速度運動的描述：

(1) 運動質點於運動過程中，任何時刻具有恒定之加速度 (所受合力為定值)，即加速度的大小和方向都不變。

(2) 等加速度運動軌跡，依初速度和加速度的方向關係，可能為**直線**或**拋物線**：

① 初速度為零或初速度與加速度方向平行

→ 軌跡為直線 (如：自由落體、鉛直上拋、鉛直下拋)

② 初速度與加速度方向不平行

→ 軌跡為拋物線 (如：水平拋體、斜向拋體)

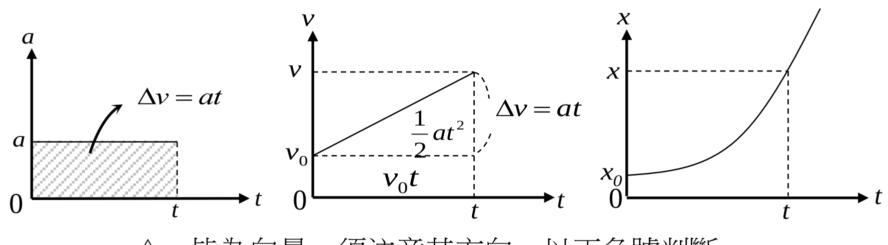
2. <u>直線等加速度運動的三大基本公式</u>：

$t=0$ 時質點開始運動，初速度 v_0，加速度 a，經時距 t 後，末速度 v，位移 $\triangle x$

(1) $\boxed{v = v_0 + at}$

(2) $\boxed{\Delta x = \dfrac{v+v_0}{2}t = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2}$

(3) $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\cdot\Delta x}$



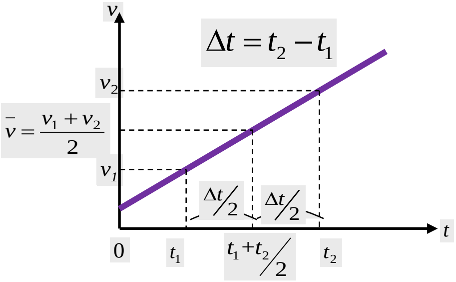
$\boxed{\text{註}}$：式中 v_0，a，v，$\triangle x$ 皆為向量，須注意其方向，以正負號判斷 。

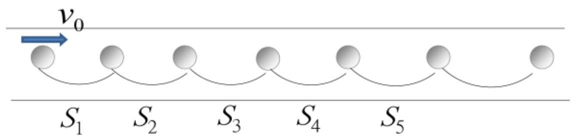
沿 $+x$ 方向：取"+"，沿 $-x$ 方向：取"–"。

$\boxed{\text{註}}$：公式中共有 5 個物理量 (v_0，a，v，$\triangle x$、t)，雖有 3 個方程式，但只等效於 2 個，故在解題過程中須掌握 3 個已知量。

3. 等加速度直線運動的重要性質：

（1） 某一段時距內的平均速度等於這段時間的中點時刻之瞬時速度。





（2） 以加速度***a***，作等加速度直線運動的物體，在任意兩個相等的時間間隔 ***T*** 內的位移之差為一定值。 $\boxed{\Delta s = s_2 - s_1 = s_3 - s_2 \cdots = aT^2}$

[說明]

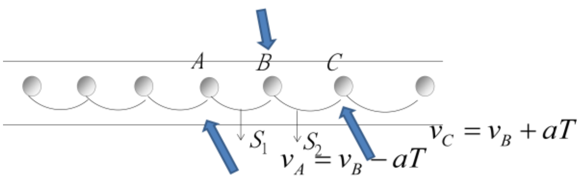
$$S_1 = v_0 T + \frac{1}{2} aT^2 \quad S_2 = (v_0 + aT)T + \frac{1}{2} aT^2 \quad S_3 = (v_0 + a2T)T + \frac{1}{2} aT^2$$

$$\therefore S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = aT^2$$

（3）電鈴(打點)計時器 ：

利用電鈴計時器在紙帶打點的方法，分析滑車的等加速度，已知紙帶上的打點如下圖所示。若兩相鄰的時距為 ***T***，則滑車的加速度為 $\boxed{a = \frac{S_2 - S_1}{T^2}}$

$$v_B = \frac{S_1 + S_2}{2T}$$



[說明] $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{S_2}{T} - \frac{S_1}{T}}{T} = \frac{S_2 - S_1}{T^2}$

（4）[回顧] $\boxed{\text{初速為零}}$的等加速度直線運動

①*1*秒內、*2*秒內、*3*秒內、 … 、*n*秒內之位移比

$$s_1 : s_2 : s_3 : \cdots : s_n = 1^2 : 2^2 : 3^2 : \cdots : n^2 \qquad \text{< 說明 >} \quad \Delta x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \propto t^2$$

②第*1*秒內、第*2*秒內、第*3*秒內、 … 、第*n*秒內之位移比

$$\Delta s_1 : \Delta s_2 : \Delta s_3 : \cdots : \Delta s_n = 1 : 3 : 5 : \cdots : (2n-1)$$

$$\text{< 說明 >} \quad \Delta s_n = \Delta x_n - \Delta x_{n-1} = \frac{1}{2} a(2n-1)$$

範例一

1.某物作直線等加速度運動，其加速度為2公尺/秒^2，初速度為5公尺/秒，試問：

(*a*)某物第2秒末的速度為________公尺/秒。

(b)某物前10秒內的平均速度為________公尺/秒。

(c)當質點所走的位移為6公尺時，質點的末速度為________公尺/秒。

2.自車站靜止起動沿直線做等加速度運動行駛的列車，途中經過一座長，100 m的橋樑歷時4.0 s。若列車頭駛離橋樑的速度為30.0 m/s，則

(*a*)列車頭駛入橋樑之速度為若干？　(b)列車之加速度為何？　(c)橋頭離車站多遠？

Ans:1. (*a*)9 m/s　(b)15 m/s　(c)7 m/s　*2*.(*a*)20 m/s　(b)2.5 m/s^2　(c)80 m

.

範例二

1. 火車以等加速度前進，列車長 ℓ，其前端通過車站某一點時，速率為u，後端通過時速率為v，試求：(*a*) 火車之頭尾經該點所需時間 (*b*) 火車中點通過該點速率 (*c*) 距車頭 $\ell/3$ 處通過該點之速率。

2. 某質點沿直線作等加速度運動，通過線上A點時的速度為V，通過線上另一點B時的速度為3V，則該質點通過AB中點時的速度為若干？

Ans: 1.(*a*) $\dfrac{2\ell}{u+v}$ (*b*) $\sqrt{\dfrac{u^2+v^2}{2}}$ (*c*) $\sqrt{\dfrac{2u^2+v^2}{3}}$ **2.** $\sqrt{5}V$

範例三

在測定加速度之實驗中，用紙帶經計時打點今拉動紙帶，5 s 得101個點其中第50點至第56點之記錄如下圖，其每點距離以cm表示，則：

(*a*)這段運動是下列何種運動 (A)等速度運動 (B)變速度運動 (C)變速率運動 (D)等加速度運動 (E)變加速度運動

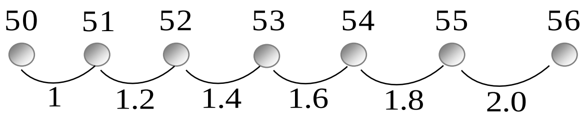
(*b*)計時器的打擊週期為幾秒？

(*c*)點50至51、點55至56的平均速度各為何？

(*d*)點50至56的平均加速度為何？

(*e*)點54、50的瞬時速度為何？

Ans:(a)BCD (b)0.05 s (c)20 m/s 、40 m/s (d) 80 m/s^2 (e) 34 m/s 、18m/s



範例四

*1.*作等加速度直線運動之物體，在 t 時距內其速度自 v 變至 $-\frac{3}{2}v$ ，則在此時距內，其平均速度值與平均速率比？

2.一升降機自靜止起動，最初 $\frac{2}{7}$ 行程作等加速度增速，最後 $\frac{2}{7}$ 則為等減速度至停止，中間 $\frac{3}{7}$ 行程為等速度，試求最大速度與平均速度的量值比？

Ans: 1.5：13　***2.*** $\frac{11}{7}$

範例五

要停止一部車，首先你需要某一段反應時間才踩剎車，然後車子以等減速度停下設若當車速為72 *km/h*，車子可在180 *m*後停住；車速為36 *km/h*，則僅需50 *m*可停住，試求：

(*a*)你的反應時間？ (*b*)剎車時的加(減)速度大小？

Ans: (a)1 s (b)1.25 m/s²

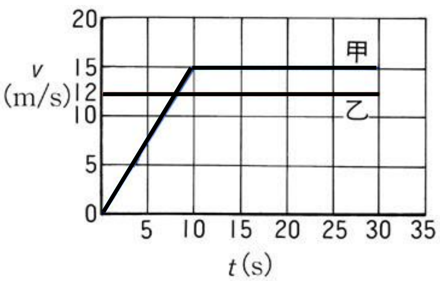
範例六

1. 在一直行的路上，甲車停在路口等綠燈亮起。當綠燈 亮起時，甲車由靜止加速向前，這時有一乙車以等速度 通過路口，並超越甲車。若以甲車在路口的出發處為$x=0$，兩車的$v-t$圖如圖所示，則：
(*a*)在何時甲車的速度與乙車相同？
(*b*)在何時甲車可以追及乙車？此時甲車離路口多遠？

2. 甲車以 *10 m/s*，乙車以 *4 m/s*之速率在同一車道中同向行駛。若甲車之駕駛員在乙車後方距離 *d* 處發現乙車，立即採煞車而使車獲得 $-2\ m/s^2$ 之定值加速度，為使兩車不致相撞，則 *d* 之值至少大於何值？

Ans*：1.** *(a) t=8 s (b) t=25 s*、*x =300 m* ***2. 9m

1.

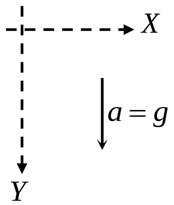


4. 等加速度直線運動的應用

抛體運動：（1）直線運動 － 自由落體、鉛直上拋、鉛直下拋
（2）平面運動 － 水平拋射、斜向拋射 (下一章介紹)
(共同特徵：皆為等加速度運動，加速度為g)
抛體運動解題要領：（1） 選定參考點 (座標原點)。
（2） 訂定鉛直正、負方向。
（3） 利用初始條件，寫下運動方程式。

(1) 自由落體： 質點於地表附近，因**受重力作用**，由**靜止**作鉛直落下之等加速度直線運動（$v_o= 0$，加速度 $a=g$ (↓)）

定向下為正：



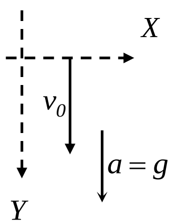
運動方程式：
$$\begin{cases} a = g \\ [v = v_0 + at] \; v = gt \\ \left[\Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2\right] \; \Delta y = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ \left[v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x\right] \; v^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta y \end{cases}$$

【應用】自距地高度 h 處自由落下，則：

① $h = \dfrac{1}{2}gt^2$，著地歷時 $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$

② $v^2 = 2gh$，著地速率 $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$

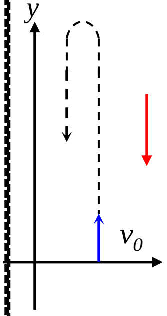
(2) 鉛直下拋：質點於地表附近，以初速v_0下拋，作等加速直線運動（v_o 與 a 方向相同）定向下為正。



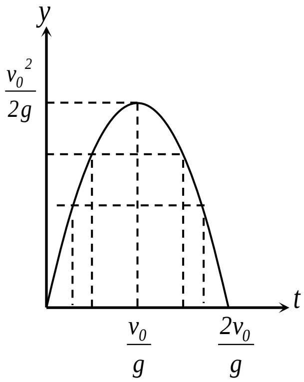
運動方程式：
$$\begin{cases} a = g \\ [v = v_0 + at] \; v = v_0 + gt \\ \left[\Delta x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2\right] \; \Delta y = v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2 \\ \left[v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x\right] \; v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot \Delta y \end{cases}$$

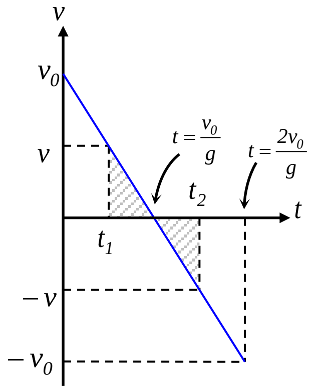
(3) 鉛直上拋：　質點於地表附近，以初速 v_0 上拋，作等加速直線運動

定出發點為 y 軸原點，即 y_o=0，並定向上為正，從頭到尾受重力作用 $g(\downarrow)$：



$$a=-g\quad\begin{cases}a=-g\\ v=v_0+(-g)t\\ y=v_0t+\frac{1}{2}\cdot(-g)\cdot t^2\\ v^2=v_0^{\,2}+2\cdot(-g)\cdot\Delta y\end{cases}$$



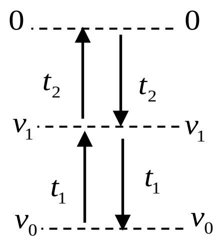


【重要特性】 $\boxed{\text{對稱性}}$：上升期間與下降期間對稱，且下降期間可視為自由落體運動

①上升時間等於下降時間。

②速率對稱：在相同高度處，上升速率等於下降速率。

③時距對稱：任取兩個水平面，不論上升或下降，物體經過這兩個水平面的運動時間相等。



【應用】$\boxed{\text{達最高點瞬間}}$：速度為0，加速度不為零$a=-g$，

① $0=v_0+(-g)\,t$，上升期間（或下降期間）所需的時間 $\boxed{t=\frac{v_0}{g}}$。

落回初拋之相同高度處所需的時間 $\boxed{T=2t=\frac{2v_0}{g}}$

② $0^2=v_0^{\,2}+2(-g)\cdot H$ ，可上升之最大位移 $\boxed{H=\frac{v_0^{\,2}}{2g}}$

（3）　v代表末速，若$\begin{cases}v>0\Rightarrow\text{向上運動}\\ v<0\Rightarrow\text{向下運動}\end{cases}$

y代表位置，若$\begin{cases}y>0\Rightarrow\text{在初拋點上方}\\ y<0\Rightarrow\text{在初拋點下方}\end{cases}$

範例一

1.高度差為*14.7 m*的甲球與乙球，同時自由落下，若甲球比乙球遲1秒鐘落地，則甲球原來的高度為若干(g = 9.8 m/s^2) ？

2.自由落體，於全程之前$\frac{1}{5}$所經歷時距，與後$\frac{4}{5}$行程所經歷時距比若干?

Ans: 1. 19.6 m   2. $1:(\sqrt{5}-1)$

範例二

如圖所示，不計空氣阻力，小胖將一個小鋼珠自頂樓以初速20公尺/秒向上鉛直拋出，則小鋼珠(g＝10 公尺/秒^2) ：

(1)由拋出至最高點所需的時間為_______秒。

(2)可上升的最大高度距原拋射點______公尺。

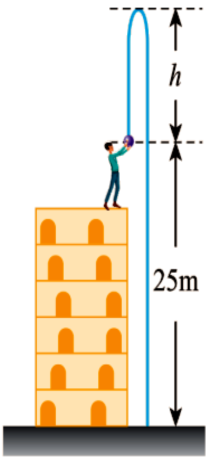
(3)由最高點回到原拋射點所需的時間為_____秒。

(4)回到原拋射點時的總飛行時間為____秒。

(5)承(4)，速率為______公尺/秒。

(6)若拋射點距地面25公尺，則拋射後______秒到達地面。

Ans:(1)2(2)20(3)2(4)4(5)20(6)5



範例三

*1.*不計阻力，一球自高 5.0 m 處靜止落下，落至地面後反彈最大高度為 3.2 m，自由落體加速度為10 m/s^2，求(a)球著地時之速度 (b)球反彈之初速度 (c)若球與地面接觸時間為 1.0×10^{-2} s，則球與地面接觸期間之平均加速度為何？

*2.*帶有包裹氣球以12 m/s的等速率上升，當包裹開始墜落時，氣球之高度為32 m，若包裹離開氣球後氣球便以2 m/s^2之加速度上升，則（$g = 10\ m/s^2$）(1)包裹自墜落到著地歷時若干秒？ (2)當包裹著地時氣球之高度為何？

Ans:1. (a)10 m/s(向下) (b)8 m/s(向上) (c)1800 m/s^2 2.(1)4.0 s (2) 96 m

範例四[對稱性]

1.如右圖所示，小明將某物自*A*點以初速 v_0 鉛直上拋，*C* 點為最高點。
物體兩次經過拋出點上方 *B* 點的時間分別為 *1* 秒及 *5* 秒，則(重力
加速度$g=10$公尺/秒^2)：
※注意：右圖只是示意圖，物體其實是作直線運動。

(1)物體由 *B* 點上升至*C*點費時____秒；自*C*點下降至*B*點費時____秒；
自*B*點下降至*A*點費時____秒。

(2)自*C*點下降至*A*點費時____秒；自拋出至落回拋出點共費時____秒。

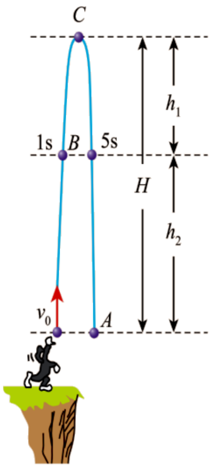
(3)右圖中的*H*為______公尺；h_1為______公尺；h_2為______公尺。

(4)此物體之初速度v_0為______公尺/秒。

2. 某人在室內經一長*2.45 m*的窗，見一石子上升又落下，若見石子的總時間為*1.0 s*，
則石子在窗以上之高度為若干公尺？ ($g = 9.8\ m/s^2$)

Ans: 1. (1)2,2,1(2)3,6(3)45,20,25(4)30　2.0.31 m

1.



2.

範例五

1.自崖頂同時以相同之初速鉛直上、下拋出A、B兩石，經t_1及t_2時間分別著地，重力加速度g，求：(a)初速度大小 (b)崖高 (c)著地末速大小？

2.物體以初速 v 被鉛直上拋，假設重力加速度為g，則自拋出上升到其最大高度的一半處，所需時間為？

Ans:1. (a) $\frac{1}{2}g(t_1-t_2)$ (b) $\frac{1}{2}gt_1t_2$ (c) $\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$ ***2.*** $\frac{v}{g}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

範例六[相遇與相距]

1. 將兩質點 A、B 同時自崖頂以相同的初速 10 m／s 拋出，A 被垂直上拋，B 被垂直下拋，則在 3 秒後（3 秒小於 B 著地所需時間），A、B 兩質點間的距離若干？（ $g=10.0$ m／s^2）

2. 從地面上相隔 t 時間先後將*A*、*B*兩球以 v_o 之初速度鉛直上拋，則兩球在空中相遇時

(A) *A*球下降中 (B) *B*球上升中 (C) 兩球速率均為 $\frac{1}{2}gt$

(D)相遇點之高度為 $\frac{v_o^2}{2g}-\frac{1}{8}gt^2$ (E) *B*球拋出 $\frac{v_o}{g}-\frac{t}{2}$ 之時間後相遇。

Ans: 1. 60m　2.ABCDE

範例七[相遇]

石子自離地 h 高處自由落下，同時將球以 v_o 初速自地面鉛直上拋。試回答下列各題：

(a)兩者歷時多久可於空中相會?

(b)兩者空中相會時，球正欲落下，v_o 值若干?

(c)兩者空中相會時，球正在下落，v_o 值如何?

(d)兩者空中相會時，球尚在上升，v_o 值如何?

(e)欲使兩者空中相會時，球上拋最小速度值如何?　(g 為重力加速度值)

Ans: .(a) $\dfrac{h}{v_o}$ **(b)** $\sqrt{gh}$ **(c)** $v_o < \sqrt{gh}$ **(d)** $v_o > \sqrt{gh}$ **(e)** $v_o > \sqrt{\dfrac{gh}{2}}$

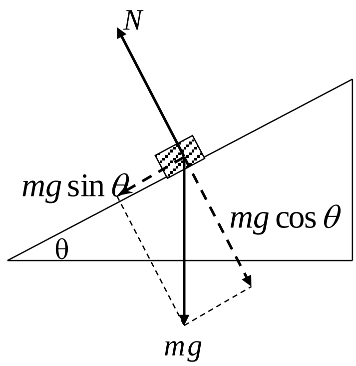
5. 光滑斜面上的等加速度直線運動：

物體沿光滑斜面的運動時， 加速度為 $\boxed{a = g\sin\theta}$ 沿斜面向下

(1) 比較： **自由落體或鉛直上拋**運動 $\boxed{a = g}$

光滑斜面運動 $\boxed{a = g\sin\theta}$

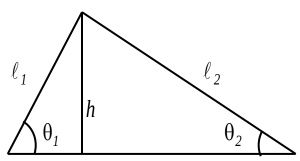
(2) 斜面運動和鉛直上下拋運動公式相同，僅加速度大小須以 $a = g\sin\theta$ 代換之。



《討論1》由相同高度*h*的斜面上由靜止滑下：

（1）著地所需時間比 $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$

（2）著地時的速率比 $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1}{1}$

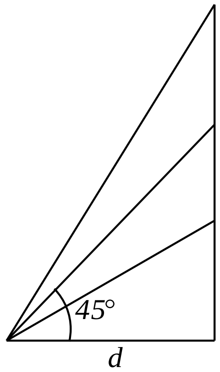


《討論2》 由相同底部距離d的斜面由靜止滑下

（1）斜面傾斜角θ著地所需時間 $t=\sqrt{\dfrac{4d}{g\sin 2\theta}}$

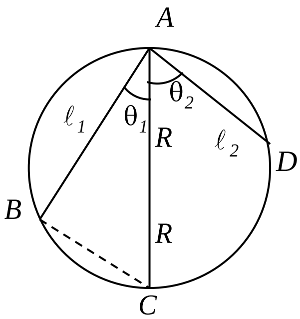
（2）當$\theta=45^\circ$，所需時間最短

（3）當$\theta_1+\theta_2=90^\circ$時，兩次下滑所需時間相同



。

《討論3》如圖，AC為鉛直直徑，AB、AD為兩條光滑弦，質點由A滑至B需時t_1，質點由A滑至D需時t_2 ，則$\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{1}{1}$



範例一

1.一光滑斜面斜角$30°$，質量2公斤的物體，由斜面中點以$4\ m/s$之速率沿斜面上滑，經2秒滑至斜面底，求：（$g = 10\ m/s^2$）（1）斜面長度？（2）滑至斜面底之速率（3）最高可滑至距底端多遠？（4）此2秒內平均速率為何？

2.一物體質量為m，從一長24公尺的光滑斜面頂端由靜止下滑，經4秒後到達斜面底部。今將物體由斜面底部以初速v_0沿斜面上滑，經6秒後又滑回到斜面底部，求v_0？

ANS: 1.（1）4公尺（2）6 m / s（3）3.6公尺（4）2.6公尺 2.9 m/s

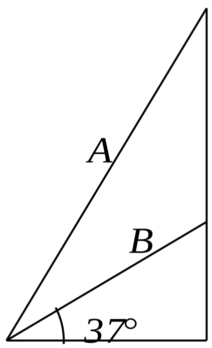
範例二

1.如圖，使鋼珠自*A*、*B*兩光滑斜面頂點自由下滑至底部所需之時間相同，則沿*A*、*B*滑至底部時末速之比為？

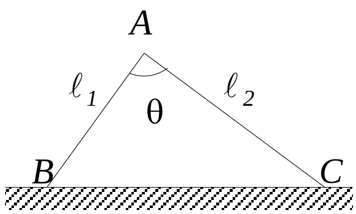
2.兩個光滑平板，固定於水平桌面上，其截面成一三角形*ABC*，如圖所示。平板*AB*、*AC*之邊長各為ℓ_1、ℓ_2。設一質點受重力自*A*點滑落至*B*點所需之時間為t_1，自*A*點受重力滑落至*C*點所需之時間為t_2，則 (A) $\frac{t_1}{t_2}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$ (B) $\frac{t_1}{t_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^{1/2}$ (C) $\frac{t_1}{t_2}=\frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}$ (D) $\frac{t_1}{t_2}=\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^{3/2}$ (E) $\frac{t_1}{t_2}$與$\frac{\ell_1}{\ell_2}$有關外，尚與θ 角有關。

ANS:1.4：3　2.A

1.



2.



1-4 相對運動

一、相對觀念：物體運動的狀態隨各觀察者所在參考坐標不同而異，故要描述物體運動，須先指出參考座標(即觀察者所在處才有意義，就是說物體的位置、速度、加速度均是以相對於參考體來測量。

二、參考座標系：以參考體為原點所建立的座標系，物體的位置、速度、加速度均相對於參考體而言是多少。參考點不同，所得運動的物理量就會不同。

三、相對運動公式：

【以C為靜止原點，運動體B，運動體A】

（1）以C為參考點：B對C（C看B）的相對位置$\boxed{\overrightarrow{x_{BC}}}$

A對C（C看A）的相對位置$\boxed{\overrightarrow{x_{AC}}}$

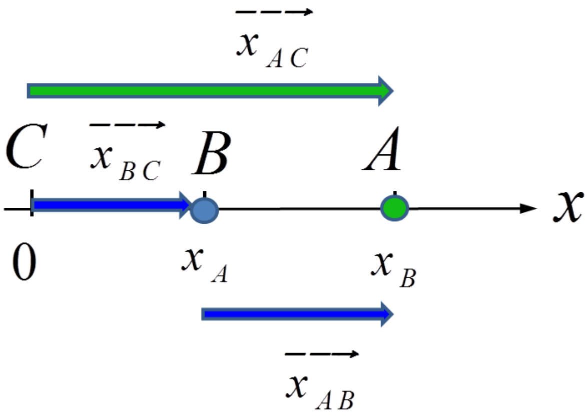
（2）以B為參考點：

A對B（B看A）的相對位置$\boxed{\overrightarrow{x_{AB}}}$

$$\boxed{\overrightarrow{x_{AB}}=\overrightarrow{x_{AC}}-\overrightarrow{x_{BC}}}$$

位置對時間微分： A對B的相對速度$\boxed{\overrightarrow{v_{AB}}=\overrightarrow{v_{AC}}-\overrightarrow{v_{BC}}}$

速度對時間微分： A對B的相對加速度$\boxed{\overrightarrow{a_{AB}}=\overrightarrow{a_{AC}}-\overrightarrow{a_{BC}}}$



範例一

*1.*如圖，求：

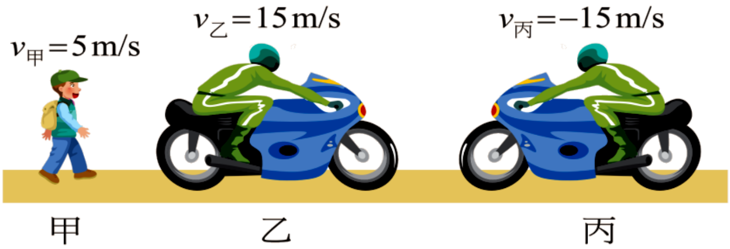
(1)甲對乙的速度為_______ 公尺/秒；乙看甲的速度為_______公尺/秒。

(2)乙對丙的速度為_______ 公尺/秒；丙看乙的速度為_______公尺/秒。

*2.*某人以 10m/s 等速度追趕停在前方的汽車，當人車相距 30m 時，車突以 $2 m/s^2$ 等加速度向前開車，則經過多少秒時，人車相距最近？ 最近距離？

Ans:1.(1)-10　-10 (2)30　30　2.5s　5m

1.



2.

範例二

*1.*一升降梯垂直向上作等加速度運動，其加速度為a，今一物體由高h之電梯天花板脫落，則：(a)該物相對於電梯的加速度量值為何？ (b)該物幾秒掉落於電梯地板上？（重力加速度g）

*2.*將兩質點A、B同時從塔頂，以相同的初速V_0拋出，A被垂直上拋，B被垂直下拋，則在t時間後(t小於B著地所需時間)，A、B兩質點間的距離為？

Ans: 1..(a) $\vec{a}_{物梯} = g + a(\downarrow)$ ***(b)*** $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g+a}}$ ***2 .2v_0t***

第二章 平面運動

2-1 平面向量

一、向量的性質

1. （1）向量：凡具有量值與方向的物理量

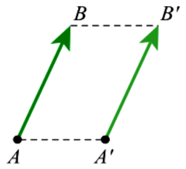
   例如：位移、速度、加速度、力、動量、‧‧‧‧等。

   （2）純量：只有量值，不須方向的物理量

   例如：路徑長、時間、溫度、質量、‧‧‧‧等。

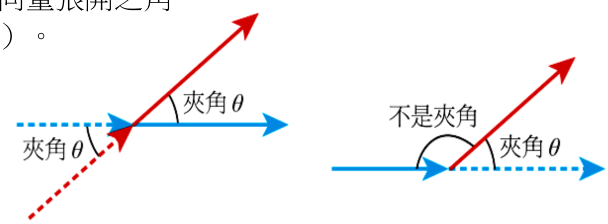
2. 向量的可平移性

   如右圖之 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{A'B'}$ ，將一向量平移至其他位置，則兩者不僅大小相等，方向也相同，故平移後的向量仍與原來之向量相等。因此我們可將向量任意平移至其他位置。

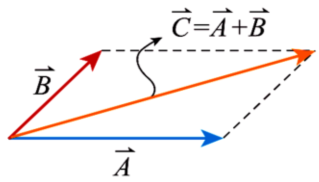
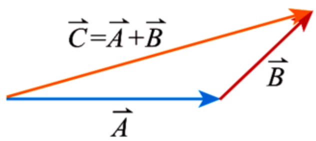
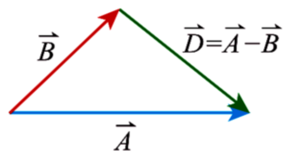


3. 向量的夾角

   如圖所示，兩向量之夾角θ，必須是二向量張開之角（即起點端接起點端或終點端接終點端）。

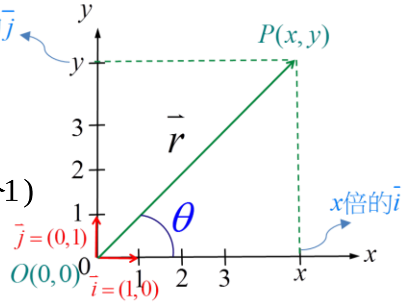


二、向量的加法與減法

加　法		減　法
 (a) 平行四邊形法	 (b) 三角形法	 三角形法

三、坐標解析法

1. 向量的直角坐標表示法



如右圖所示，$\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$

分別代表 x 軸及 y 軸的單位向量(長度皆等於1)

，則向量 $\vec{r}=\overline{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x,y)$

(1) 大小（量值）$\left|\overline{OP}\right|=r=\sqrt{x^2+y^2}$

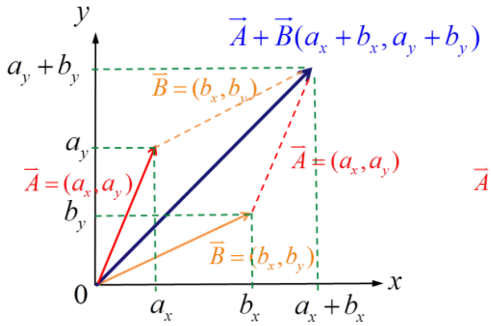
(2) 方向角：$\overline{OP}$ 與 x 軸正向的夾角稱為 $\overline{OP}$ 的方向角

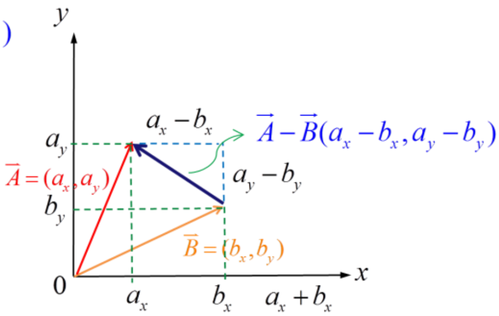
$(0\le\theta\le 2\pi)$

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{y}{r}\text{ 、 }\cos\theta=\dfrac{x}{r}\text{ 、 }\tan\theta=\dfrac{y}{r}\\ \vec{r}=(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$$

2. 向量加減的直角坐標表示法

$$\begin{cases}\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\\ \vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{A}+\vec{B}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}\\ \vec{A}-\vec{B}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}\end{cases}$$





[例題] $\vec{A}=(3,4)$ ；$\vec{B}=(5,6)\Rightarrow$

$$\begin{cases}\vec{A}+\vec{B}=(3+5,4+6)=(8,10)=8\vec{i}+10\vec{j}\text{，}\\ \text{大小}|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{8^2+10^2}=\sqrt{164}\text{。}\\ \vec{A}-\vec{B}=(3-5,4-6)=(-2,-2)=-2\vec{i}-2\vec{j}\text{，}\\ \text{大小}|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}\text{。}\end{cases}$$

四、向量的內積、外積

1. 內積

(1) 兩向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的內積寫成$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}}$，讀作「$\vec{A}$ *dot* $\vec{B}$」，其結果為一純量，故也常稱之為向量的純量積。其在物理上的應用甚廣，如功、環場積……等等。

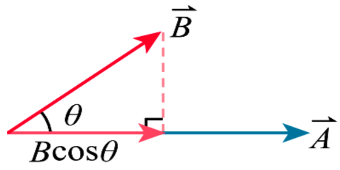
(2) 向量內積的定義：$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta}$ 為純量，

其中 θ 為$\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角，且$0°\leq\theta\leq180°$。

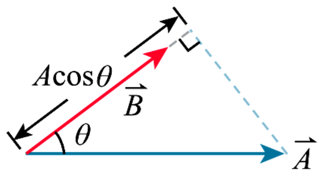
(3) 向量內積的幾何意義為：

① $\vec{A}$的大小乘以$\vec{B}$在$\vec{A}$方向上的投影量，如下圖(a)。

② $\vec{B}$的大小乘以$\vec{A}$在$\vec{B}$方向上的投影量，如下圖(b)。



(a)



(b)

(4) 坐標表示法：若$\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ ；$\vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=a_xb_x+a_yb_y}$

[例題] $\vec{A}=(3,4)$ ；$\vec{B}=(5,6)\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=3\times5+4\times6=39$

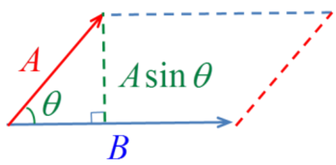
2. 外積

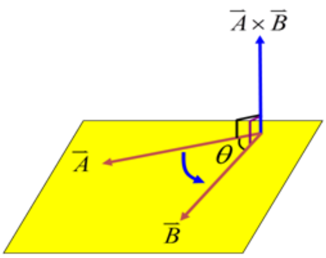
(1) 兩向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的外積寫成$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}}$，讀作「$\vec{A}$ *cross* $\vec{B}$」，其結果為一向量，故也常稱之為向量的有向積。其在物理上的應用亦甚廣，如力矩、帶電質點在磁場中的受力、載流導線在磁場中的受力……等等。

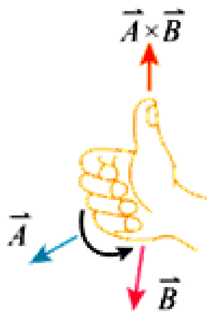
(2) 向量內積的定義： 為向量，

① 大小：$\boxed{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB\sin\theta}$ 其中 θ 為$\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角，且$0°\leq\theta\leq180°$。

② 方向：向量外積的方向同時垂直於$\vec{A}$和$\vec{B}$兩向量，依<u>右手螺旋定則</u>判定。





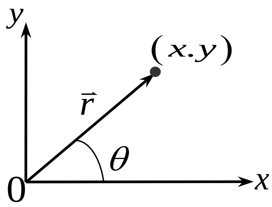


2-2 平面運動的描述

一、平面運動的描述：

1. 運動的獨立性：**在直角座標系中各維的運動狀態均各自獨立**(包括受力、位移、速度、加速度)。不過各維度的**運動時間**必然一致。

2. 位置 $\vec{r}$ ：向量 $\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (x, y)}$



① 大小：$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

② 與+x軸夾角θ：$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

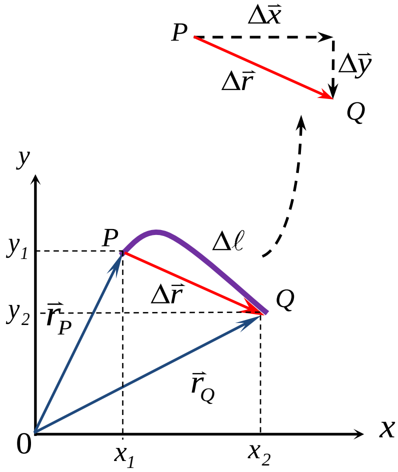
3. 位移與路徑長：

(1) 位移 $\Delta\vec{r}$ ：向量

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \left(x_2\ \hat{i} + y_2\ \hat{j}\right) - \left(x_1\ \hat{i} + y_1\ \hat{j}\right)}$$

$$\boxed{= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} = \Delta x\ \hat{i} + \Delta y\ \hat{j}}$$

(2) 路徑長 $\Delta\ell$ ：實際軌跡的長度



註：**位移和所經的運動路徑無關。**

4. 速度與速率：

(1) 平均速度：$\boxed{\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\ \hat{i} + \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\ \hat{j} = \overline{v}_x\hat{i} + \overline{v}_y\ \hat{j}}$

（$\vec{v}_{av}$ 的方向與 $\Delta\vec{r}$ 相同）

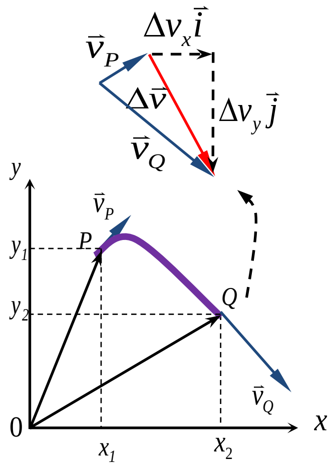
(2) 平均速率：$\boxed{\overline{v} = \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}}$

(3) 瞬時速度：$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\ \hat{j}}{\Delta t} = v_x\ \hat{i} + v_y\ \hat{j}$

（瞬時速度方向=運動方向=軌跡的切線方向）

(4) 瞬時速率：$v = |\vec{v}|$ (就是**瞬時速度的量值**)

5. 加速度：



(1) 速度變化量：$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}$

(2) 平均加速度：$\bar{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} = \bar{a}_x \hat{i} + \bar{a}_y \hat{j}$

(平均加速度 $\bar{a}$ 的方向與速度變化量 $\Delta\vec{v}$ 的方向相同)

(3) 瞬時加速度：$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}}{\Delta t} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

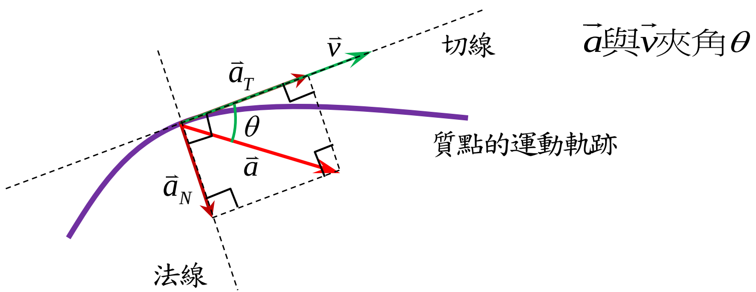
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

(4) **切線加速度與法線加速度：**

運動有獨立性，故加速度亦可分為兩互相垂直之**切線加速度、法線加速度。**

切線加速度 $\vec{a}_T$	加速度在速度方向的分量，$\overrightarrow{a_T}$ 與 $\vec{v}$ 的方向<u>平行</u>，改變質點的<u>速率</u>。
法線加速度 $\vec{a}_N$	加速度在垂直速度方向的分量，$\overrightarrow{a_N}$ 與 $\vec{v}$ 的方向<u>垂直</u>，改變質點的速度<u>方向</u>。

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \;;\qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \qquad a_T = a\cos\theta \quad a_N = a\sin\theta$$



《結論》

$$\begin{cases} a_N = 0 \Rightarrow \text{則必為直線運動} \begin{cases} a_T = 0 \Rightarrow \text{等速率直線運動} \\ a_T \neq 0 \Rightarrow \text{變速率直線運動} \\ a_T = \text{定值} \Rightarrow \text{等加速度直線運動} \end{cases} \\ a_N \neq 0 \Rightarrow \text{則必為曲線運動} \begin{cases} a_T = 0 \Rightarrow \text{等速率曲線運動} \\ a_T \neq 0 \Rightarrow \text{變速率曲線運動} \end{cases} \end{cases}$$

範例一

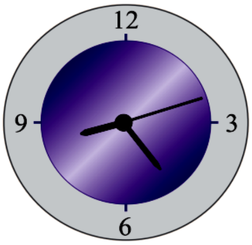
有一時鐘，秒針長 10 公分，則由 15 秒到 30 秒時間內，秒針針尖：

(1) 位移的大小為________公分。

(2) 平均速度的大小為________公分/秒。

(3) 平均速率為______公分/秒。

(4) 平均加速度的大小為________公分/秒^2。



Ans: (1)$10\sqrt{2}$ *(2)*$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ *(3)*$\dfrac{\pi}{3}$ *(4)*$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{45}$

範例二

一個質點在平面上運動，其x分量與y分量分別為$x=-2t^2$，$y=6t-3$(SI制)，則質點

(a) 第3秒的位置為？ (b) 0~3 s間的位移為？大小？ (c) 第3秒的速度為？大小？

(d) 第3秒的加速度為？大小？ (e)第3秒的切線加速度大小 ？ 法線加速度大小 ？

(f) 移動的軌跡方程式為？

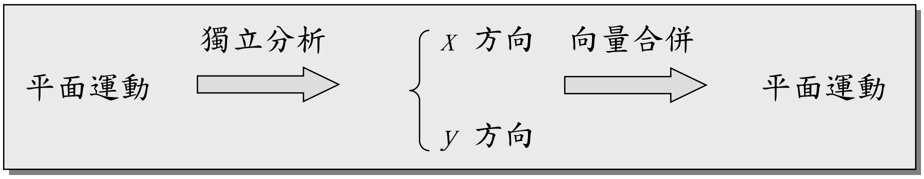
Ans: (a)(-18，15) m (b)(-18，18) m $18\sqrt{2}m$ ***(c)(-12，6) m/s*** $6\sqrt{5}m/s$

(d)(-4，0) m/s^2 $4m/s^2$ ***(e)*** $a_t=\dfrac{8}{\sqrt{5}}m/s^2$；$a_n=\dfrac{4}{\sqrt{5}}m/s^2$ ***(f)*** $18x=-(y+3)^2$

2-3　水平拋體運動

一、運動的獨立性：任何平面運動可以看成兩個**互相垂直的直線運動**之合成，

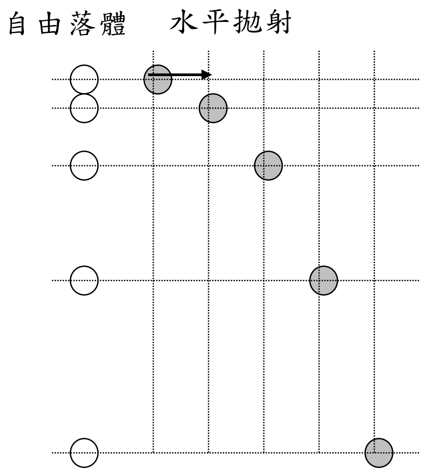
例如 x 軸與 y 軸兩個方向；這兩個方向的運動彼此獨立。

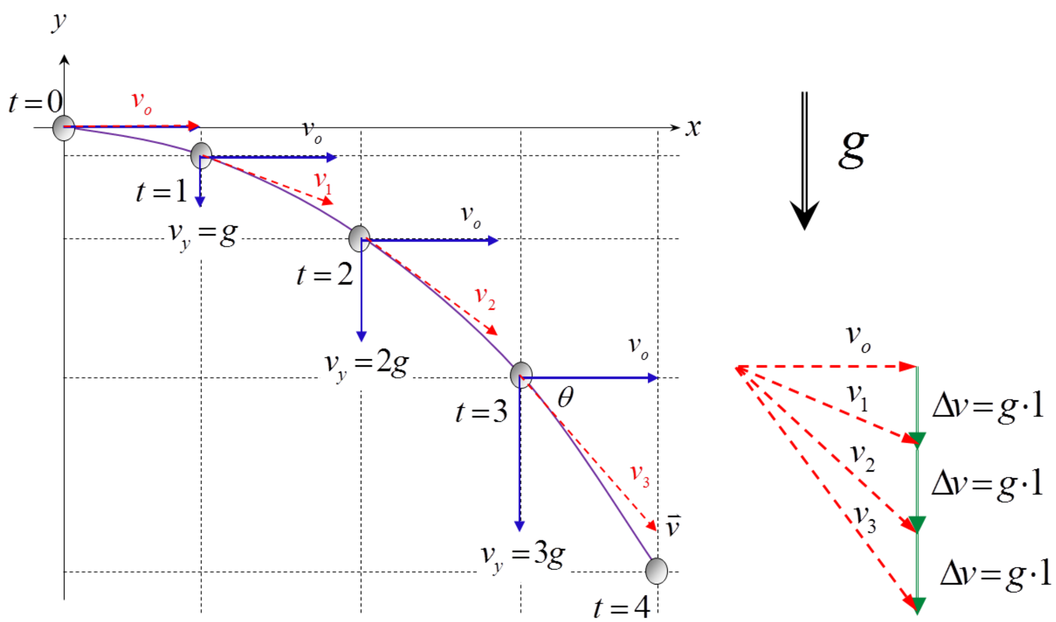


二、水平拋射：
$$\boxed{\begin{cases}\text{水平方向：等速度運動}\\ \text{鉛直方向：自由落體運動}\end{cases}}$$

初速度 v_0 (→) (沿水平方向拋出)

之**曲線等加速度**運動。





（1）分析：已知初速度v_0 (→)，加速度 g (↓)，求 t 秒後之 $\begin{cases}\text{加速度}\vec{a}\\ \text{速度}\vec{v}\\ \text{位移}\vec{r}\end{cases}$

以出發點為原點，定向下、向右為正，並設離地高度為 H。

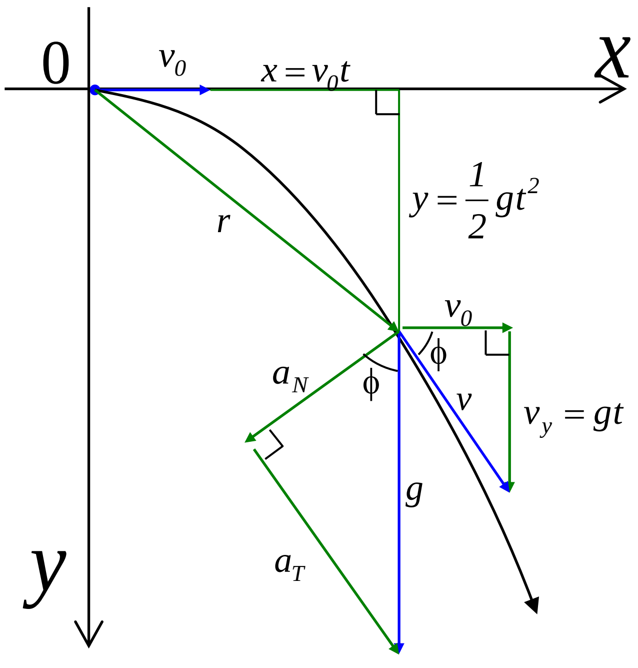
① 位置 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ $\boxed{\begin{cases}x=v_0t\\ y=\frac{1}{2}gt^2\end{cases}}$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$

② 速度(運動方向) $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$ $\boxed{\begin{cases}v_x=v_0\\ v_y=gt\end{cases}}$ $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$

方向與水平夾角ϕ $\tan\phi=\frac{v_y}{v_x}$

③ 加速度$\vec{a}=g\vec{j}$ ⇒ [補充]$\begin{cases}\text{法線加速度：}a_N=g\cos\varphi\\ \text{切線加速度：}a_T=g\sin\varphi\end{cases}$

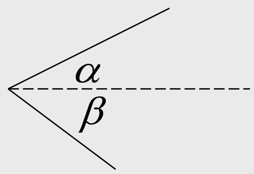
④ 軌跡方程式 $y=\frac{g}{2{v_0}^2}x^2$(開口朝下之拋物線)



$\boxed{\text{註}}$ ：仰角 → α

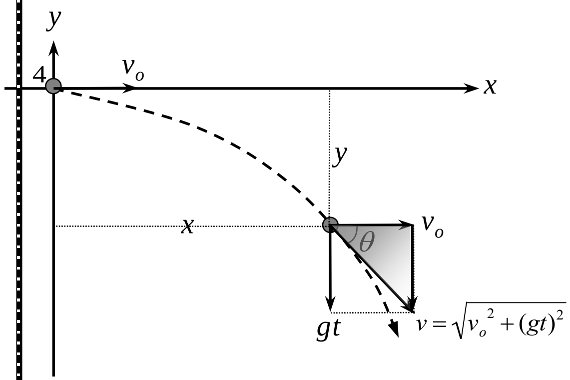
俯角 → β

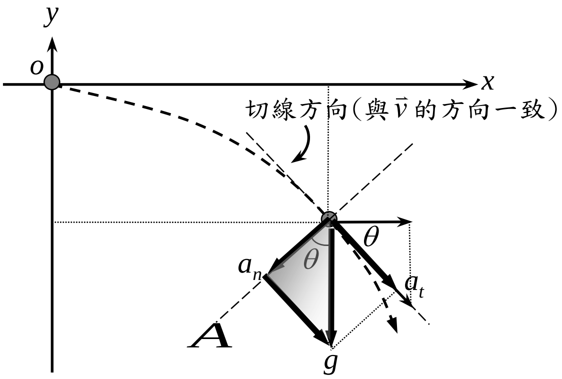
（都是與水平面的夾角）



[補充]：利用$\left\langle \begin{array}{l} v_x = v_o \\ v_y = g \cdot t \end{array} \right\rangle$夾出“切線”與“水平線”的夾角，同時決定“法線”方向，再將

加速度投影至“切線”與“法線”上，即可得 a_T 與 a_N 。





【問題思考】：

① 平拋運動過程中，方向如何決定? <u>速度</u> 。

② 何時速度量值最小? <u>拋出點</u> 。

（2）水平拋射運動的應用：

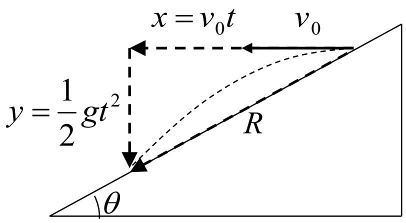
由高H處，以初速度v_0水平拋出一物體則落地時間僅與高度H有關，與初速度無關（與自由落體落下H時間相同）：

① 飛行時間 $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}}$（與自由落體相同）

② 著地時的瞬間
$$\begin{cases} \text{水平速度 } v_x = v_0 \\ \text{鉛直速度} \boxed{v_y = \sqrt{2gH}} \\ \text{水平位移 } R = v_0 t = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}} \\ \text{位移 } r = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{H^2 + \dfrac{2Hv_0^{\ 2}}{g}} \end{cases}$$

（**3**）**從斜面上的水平拋射**

在斜角 θ 的斜坡上，以水平初速度 v_0 拋出一物體 (仍落於斜面上)：



恰落於斜面時 $\boxed{\frac{y}{x} = \tan\theta}$

a. 飛行時間 : $t = \dfrac{2v_0 \tan\theta}{g}$

[解] $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} = \dfrac{gt}{2v_0} \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{2v_0 \tan\theta}{g}$

b. 沿斜面的射程(位移) : $\boxed{R = \dfrac{x}{\cos\theta}} = \dfrac{2{v_0}^2 \tan\theta}{g\cos\theta}$

範例一

飛機在空中以100 m/s的水平速度等速飛行，機上落下炸彈，歷時10 s著地爆炸，試回答下列各題：(g=10 m/s^2)　　(*a*) 飛機離地多高?

(*b*) 炸彈水平射程為何?

(*c*) 炸彈著地前瞬間速率為何?

(d) 炸彈著地前瞬間運動方向與水平夾角？

(e) 炸彈著地前瞬間切線加速度大小？法線加速度大小？

Ans :*(a)500 m　(b)1000m　(c) $100\sqrt{2}$ m/s　(d)45°　(e) $5\sqrt{2}$ m/s^2　$5\sqrt{2}$ m/s^2*

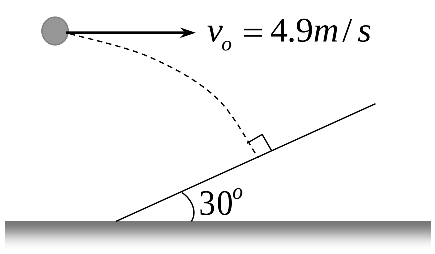
範例三

1 不計空氣阻力，以初v_o水平拋出一質點，重力加速度為g，當瞬時速度自與水平夾37°的角度增至53°期間 (a)所經時間 (b)該質點下降高度 （c）速度變化量為？

2. 以4.9 m/s的水平初速拋出的小球，在空中飛一段時間後，恰好垂直地撞在傾斜角為30°的斜面上。可知該小球完成這段飛行時間為何？（重力加速度為$9.8m/s^2$）

Ans: 1. $(a)\dfrac{7v_o}{12g}$ $(b)\dfrac{175v_o^2}{288g}$ （c） $\dfrac{7v_0}{12}$ **2.** $t=\sqrt{3}/2\,s$

2.



範例三

以初速度12 *m/s*水平拋出一物，當法線加速度$a_n = 3g/5$時，下列敘述何者正確？

(A)水平速度與鉛直速度的比為 3：4　　(B)在此瞬間的速度大小為 20 m/s

(C)水平位移與鉛直位移的比為 3：2　　(D)從拋出到此瞬間需時 1.6 s

(E)位移方向與水平方向夾角53^o。　(其中g=10m/s^2)

Ans: ABCD

範例四

石子自斜角為$37°$的斜面頂端以水平初速度$10\ m/s$水平拋出，假設重力加速度為$10\ m/s^2$，最後石子落於斜面上，求：（1）經多少秒後石子落於斜面上？

（2）石子在斜面的落點與拋出點距離為何？

（3）石子著斜面時的速度？

（4）石子著斜面的瞬間，切線加速度與法線加速度若干？

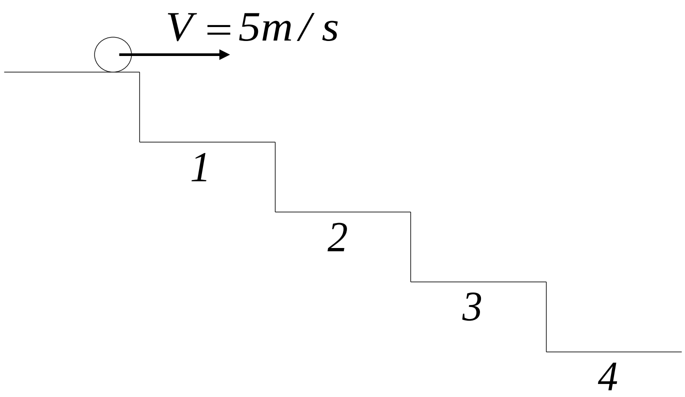
Ans:

（1）$t = 1.5$秒（2）18.75公尺（3）$v = 5\sqrt{13}\ m/s$（4）$a_T = \dfrac{30\sqrt{13}}{13}\ m/s^2$ $a_N = \dfrac{20\sqrt{13}}{13}\ m/s^2$

範例五

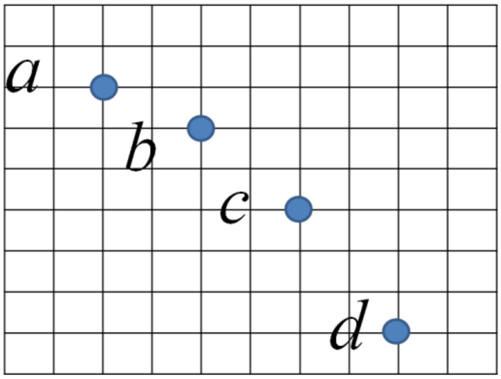
如右圖所示，一石階夠長，每階高*20.0*公分， 寬*30.0*公分，今將一物以*5* 公尺/秒之速度水平拋出，設重力加速度$g = 10\ m/s^2$，則（1）擊中第____ 階（2）經___秒擊中階梯。

ANS: （1）*12* （2）$\frac{2\sqrt{3}}{5}$



範例六

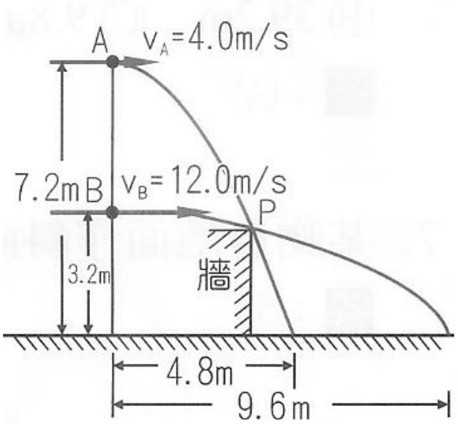
一物作平拋運動，用一張印有小方格的紙來記錄軌跡，小方格的邊長為10*cm* ，若小球在平拋運動中的幾個位置，如附圖 *a* 、 *b* 、 *c* 、 *d* 所示，其中 *a* 點並不是拋射點，若 $g=10m/s^2$ ，則小球在*b*點的瞬時速度量值為？ ***Ans:2.5m/s***



範例七

如右圖所示， 將A物體以v_A=4.0m/ s 的速度向右水平拋出， 同時在A物體位置的正下方，將B 物體以v_B=12.0m/ s 的速度向右水平拋出。兩物體的飛行軌跡在同一鉛直面， 而且都恰掠過一牆的頂端P 點。若A拋出後t_1秒通過P 點，B 在拋出後t_2秒通過P 點，則（重力加速度g=10.0 m/s²）(1) t_2 = ？ (2)牆高？ (3)牆與拋出點水平距離？

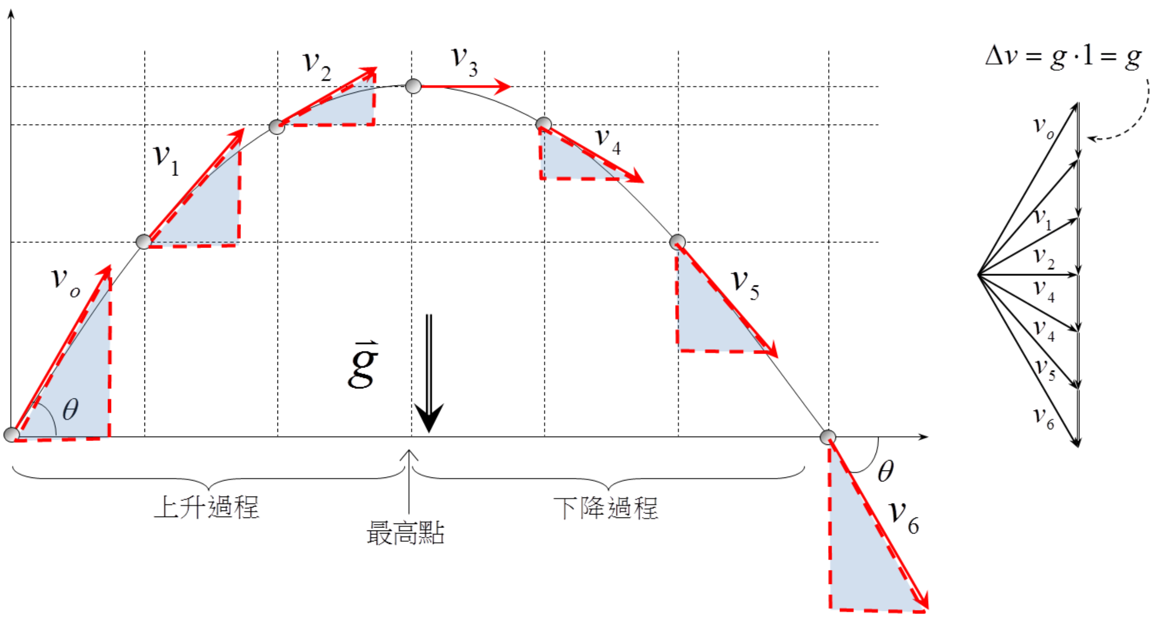
ANS:*(1)* $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\,s$ *(2)2.7m* *(1)* $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}\,m$

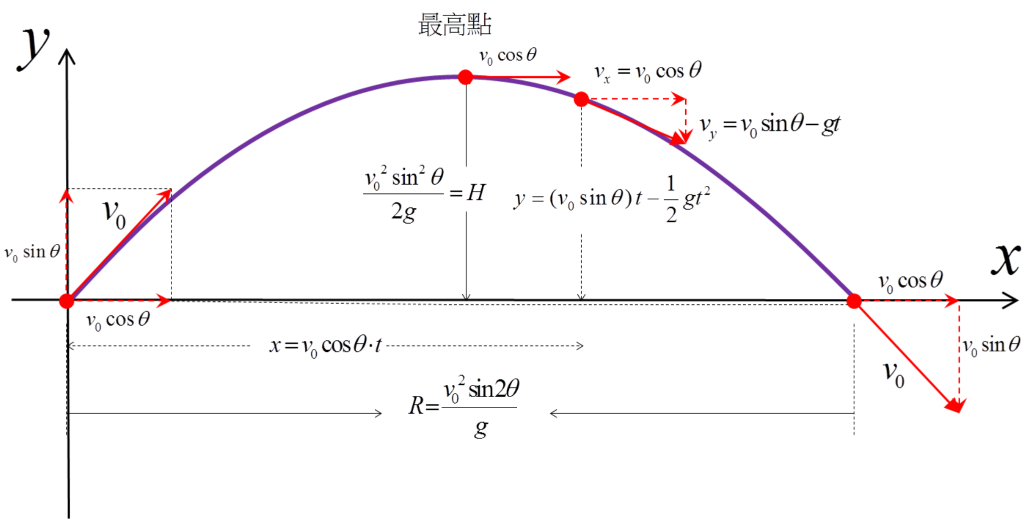


2-4 斜向拋體運動

1. 斜向拋射：物體以初速度 v_0 ，仰角 $\theta_0 \neq 0^\circ$ 拋出，作曲線等加速度運動。

斜向拋射 $\begin{cases} \text{水平方向：等速度運動} \\ \text{鉛直方向：鉛直上拋} \end{cases}$





2. 運動分析：

已知初速度 v_0 (↗)，加速度 g(↓) ，仰角 $\theta_0 \neq 0^\circ$ 拋出，求 t 秒後之 $\begin{cases} \text{加速度} a \\ \text{速度} v \\ \text{位移} r \end{cases}$

以出發點為原點，定向上、向右為正。

① 加速度：$\boxed{\bar{a} = -g\,\hat{j}}$

② 速　度：$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ $\boxed{\begin{cases} v_x = v_o\cos\theta_0 \\ v_y = v_0\sin\theta_0 - gt \end{cases}}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

(方向：與水平夾角 $\tan\phi = \dfrac{v_y}{v_x}$ ，上升過程為仰角，下降過程為俯角。)

③ 位　移：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\boxed{\begin{cases} x = v_o\cos\theta_0 \cdot t \\ y = v_0\sin\theta_0 \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

④ 軌跡方程式：$\boxed{y = \tan\theta_0 \cdot x - \dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_0}x^2}$ (開口朝下之拋物線)

3. 斜向拋射特殊資料：**抛出高度與著地高度相同時才適用**

(1) 飛行時間 (T): $\boxed{T = 2t = \dfrac{2v_o\sin\theta_0}{g}}$ (t為半程歷時)

(2) 最大高度 (H): $\boxed{H = \dfrac{{v_o}^2\sin^2\theta_0}{2g} = \dfrac{1}{2}gt^2}$

(3) 水平射程 (R): $\boxed{R = \dfrac{{v_0}^2\sin 2\theta_0}{g} = v_0\cos\theta_0 \cdot T}$

4. 上升過程與下降過程具有對稱性，似鉛直上拋。

① 時距對稱：$\Delta t_{A\to B}=\Delta t_{C\to D}$

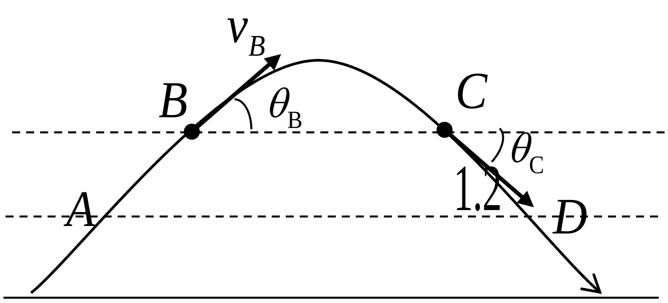
上升過程經過某段鉛直高度的時距＝下降過程經過同一段鉛直高度的時距

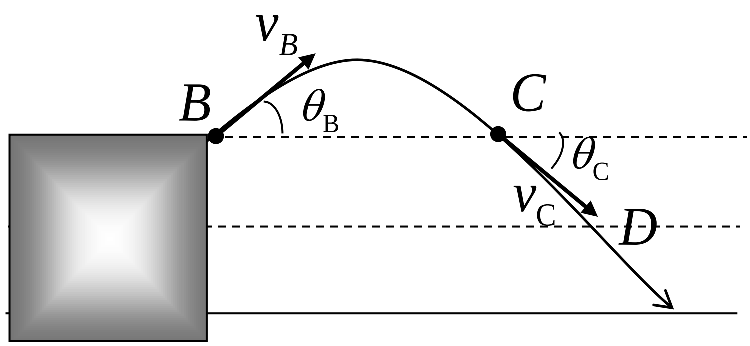
② 速率對稱；$v_B=v_C$

上升過程經過某ㄧ高度時的速度大小＝下降過程經過同ㄧ高度時的速度大小

③ 角度對稱：$\theta_B=\theta_C$

上升過程經過某ㄧ高度時速度的仰角大小＝
下降過程經過同ㄧ高度時速度的俯角大小





【思考】：

① 斜拋過程中，物體經同一高度，速度為何？

<u>**大小相等，方向與水平夾角相等，但上升時為仰角、下降時為俯角**</u>。

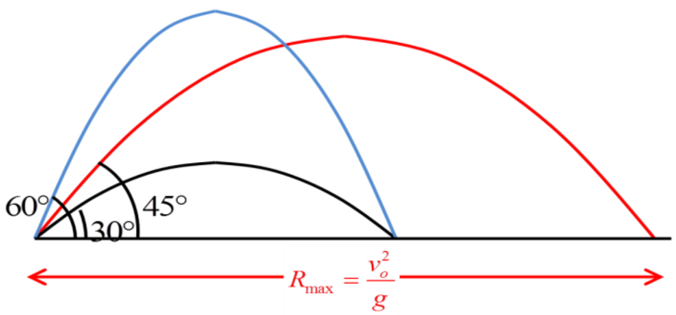
② 在何處達速度最小值? <u>**最高點**</u>，其最小速度為? <u>$v_0\cos\theta_0$</u>

5. [補充] 斜向拋射特殊資料討論 ： $\boxed{\text{拋出高度與著地高度相同時才適用}}$

(1) 當 v_0 一定，$\theta_0\nearrow \rightarrow H\nearrow$，當 θ_0=90°，則 $H=H_{\max}=\dfrac{v_o^{\ 2}}{2g}$ (即鉛直上拋運動)

(2) *a*. 若 v_0 一定，當 θ_0=45° 時，則 $R=R_{\max}=\dfrac{v_o^2}{g}$

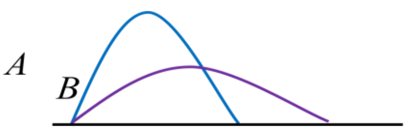
b. 當 v_0 一定，互餘的拋射角度斜向拋出，水平射程相同。



(3) 最大高度與水平射程關係 ： $\dfrac{H}{R}=\dfrac{1}{4}\tan\theta_0$

(4) **從圖形看斜拋運動各物理量的大小關係：**

$$\begin{cases} y:H\rightarrow \text{知 } t\text{，}v_{y0}\left(=v_0\sin\theta_0\right)\text{大小關係} \\ x:R\rightarrow \text{結合}\left[v_x=\dfrac{R}{t}\right]\text{ 知 } v_x\left(=v_0\cos\theta_0\right)\text{大小關係} \end{cases}$$



$\because H_A > H_B$

$\therefore v_{0A}\sin\theta_{0A} > v_{0B}\sin\theta_{0B} \quad T_A > T_B$

（最大高度越高，鉛直初速度越大，全程歷時越長）

範例一

在地面上沿仰角 37 度發射一砲彈，經過 6 秒落回地面，設重力加速度 g=10公尺/秒^2，則：

(1)自發射至最高點費時____秒。

(2)砲彈的初速為____公尺/秒，其中水平分量為____公尺/秒；鉛直分量為______公尺/秒。

(3)砲彈在最大高度時的速率為______公尺/秒。

(4)砲彈的水平射程為______公尺。

(5)砲彈所能到達的最大高度為______公尺。

Ans:.(1)3(2)50 40(3)40(4)240(5)45

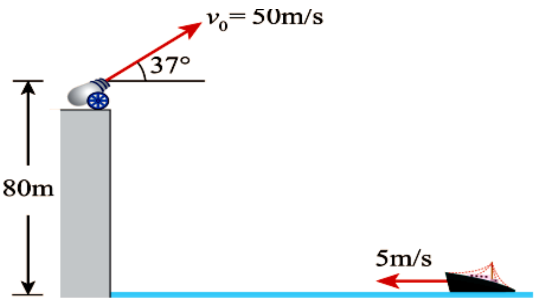
範例二

如圖所示，砲彈自岸邊海平面上方高度80公尺處，以初速50公尺/秒、仰角為37度射出，恰好擊中正向岸邊以速率5公尺/秒行駛過來之敵艦，不計空氣阻力，$g=10$公尺/秒^2，則：

(1)砲彈飛行的時間為____秒。(2)砲彈的水平射程為____公尺。

(3)發砲時艦離岸邊的距離為______公尺。

Ans (1)8(2)320(3)360



範例三

1. 某次救火行動中，消防車的水龍頭以24.5 m/s的初速將水柱噴出，水柱噴到高度14.7 m的樓頂起火點，其最高離地19.6 m，則消防車距火災點之水平距離若干？（$g=9.8m/s^2$）

2. 自地面斜向拋射一球，經 4 秒經過塔頂，再經 2 秒落回地面，則塔高多少？$(g=10\ m/s^2)$

Ans 1..44.1m　2. 40m

範例四

1.在水平地面以v_0初速斜拋一物，於軌跡上一點，其瞬時速度最小值為$v_0/3$，重力加速度g，則此物可達之最大高度為？

2.一物由水平地面上以初速v_0，仰角$60°$ 作斜向拋射，重力加速度g，當物體運動方向與水平成$45°$ 俯角時，速度及距地面之高度各為？歷時多久？

Ans:1. $\frac{4v_0^{\ 2}}{9g}$ **2.** $\frac{v_0}{\sqrt{2}}$ ， $\frac{v_0^{\ 2}}{4g}$ ， $\frac{(\sqrt{3}+1)v_0}{2g}$

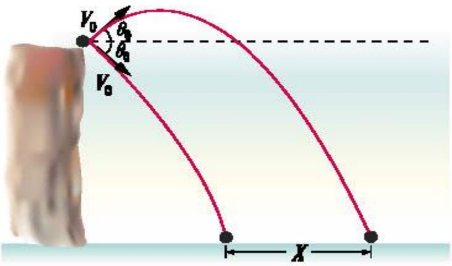
範例五

1. 如圖所示，有兩個球從同一高處以相同的初速度v_0分別拋出，但其中一球的拋出角度為斜向上的仰角θ_0，另一球則為斜向下的俯角θ_0，試求兩球落地處的水平距離為 X＝？

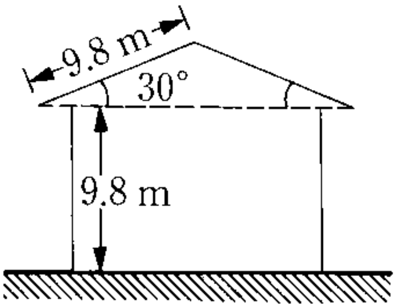
2. 一小石子自靜止由光滑屋頂頂端滑下。屋頂長*9.8 m* (如圖) ，並與水平成*30°*角，屋簷離地*9.8 m*，則(1)小石子從屋頂至落到地面時間需時？
(2)小石子從屋簷至落到地面水平距離？

Ans: 1. $\dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$ *2. (1)3s* *(2)* $4.9\sqrt{3}s$

1.



2.



範例六

1. 質點以仰角 θ_0 斜向拋出，其軌跡之最大鉛直高度為 H，則自高 $H/2$ 之 A 點飛至高 $H/2$ 之另一點 B 所行之水平位移為若干？
2. 以一定之初速作兩次斜向拋射，其最大高度分別為 h_1 及 h_2，若兩次水平射程相等，則此射程為？

Ans: 1. $2\sqrt{2}H\cot\theta_0$ ***2.*** $4\sqrt{h_1h_2}$

範例七

1. 不計空氣阻力，在水平面分別以仰角37°與53°拋出，若鉛直方向的初速度相等，有關二質點運動的敘述何者正確？(A)二質點的初速比為4：3　(B)水平射程相等

(C)最大高度相等　(D)在空中飛行時間　(E)若二質點同時同地拋出，二質點在空中相遇

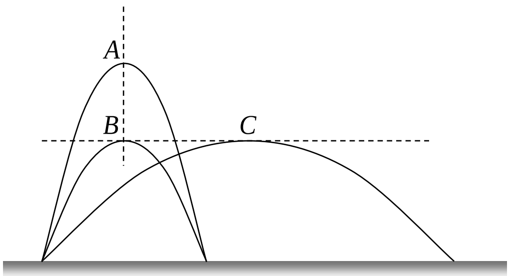
2. 圖為A、B、C三球在空中運動的軌跡。已知三球係同時拋出，則

(A) A、B兩球的水平速度相同 (B)三球初速的鉛直分量以A為最大

(C) B、C的飛行時間相同 (D) A球的飛行時間最長 (E) A、C可在空中相碰

***Ans: 1.**ACD　**2.** BCD*

2.



範例八

某物自地做斜向拋射，拋射點為原點之軌跡方程式為：$64y = 48x - 5x^2$，(SI制，$g=10\ m/s^2$)，

求(a)拋射仰角 (b)初速 (c)飛行時間 (d)水平射程 (e)最大高度 。

Ans: (a)37° (b)10 m/s (c)1.2 s (d)9.6 m (e)1.8 m

範例九

1.如右圖所示，一物自O點以53°仰角斜向拋出，欲使它恰掠過前方6公尺，高度3公尺的耶誕樹，若g =10公尺/秒^2，則:

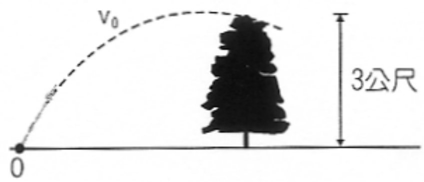
(1) 物自拋出幾秒後恰抵達耶誕樹上方？ (2) 拋出之初速v_o為若干？

2.從與一水平成*30°*角之斜面上一點*A*以v_0初速，*30°*仰角斜拋出一物體而落於斜面上*B*點，重力加速度g，求：

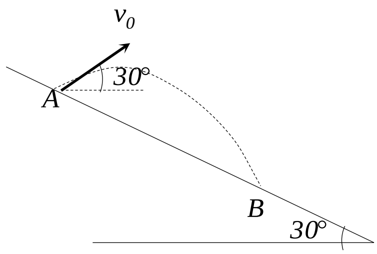
（1）物體落到*B*點所需時間？（2）*A*、*B*兩點間距離？（3）物體碰撞B點時速度量值？

Ans: 1.(1)1s(2)10m/s **2.**（1）$\frac{2v_0}{g}$ （2）$\frac{2v_0^{\ 2}}{g}$ （3）$\sqrt{3}v_0$

1.



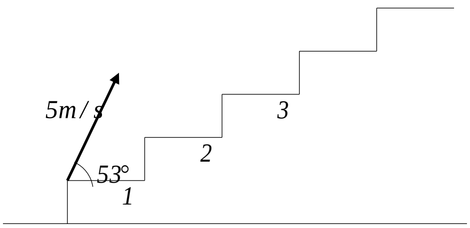
2.



範例十

有一階梯每階高$10\ cm$，寬$20\ cm$，有一小石頭由底端以$5\ m/s$，仰角$53°$拋出，如圖所示，若 $g = 10\ m/s^2$，則(1)將擊中第_____階 (2)擊中階梯歷時？

Ans　(1) 8　(2)0.54s



範例11

1. 由斜面頂左端以2 m/s的初速水平拋出鋼珠，已知$g = 10\ m/s^2$，利用圖中座標系，試求

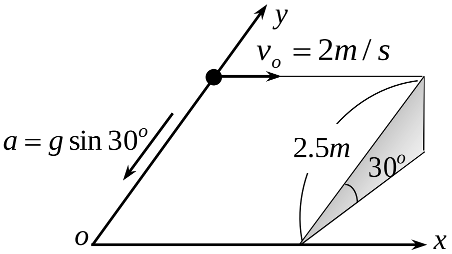
(a)抵達底邊時在 x 方向的位移？ (b)寫出鋼珠軌跡方程式？

2. 如右圖所示將一質點在斜角 ϕ 之斜面上，以初速 v_0 仰角 θ 斜向拋出，求此質點

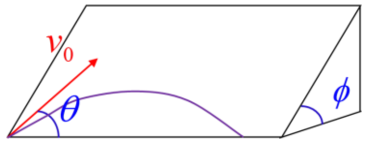
(a)飛行時間 (b)水平射程 (c)最大高度各為若干。

Ans:1. *(a) 2 m* (b) $y=\frac{5}{2}-\frac{5}{8}x^2$ **2.** (a) $T=\frac{2v_o\sin\theta}{g\sin\varphi}$ (b) $R=\frac{v_o^2\sin 2\theta}{g\sin\phi}$ (c) $H=\frac{v_o^2\sin^2\theta}{2g}$

1.



2.



範例12 挑戰題

一球由斜角37°的斜面上拋出，已知球拋出的初速為10 m/s，方向與斜面垂直。若重力加速度為10 m/s²，則根據右圖的座標分析小球運動時

(a) 初速度的x、y 分量為何

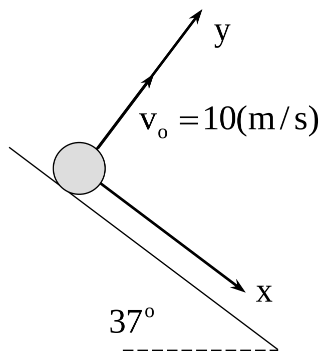
(b) 小球在空中運動時加速度的 x、y 分量為何？

(c) 小球在x、y軸的運動方程式為何？

(d) 小球在斜面上落點處的y座標為何？

(e) 小球在空中飛行時間為何？

(f) 小求知落點與出發點間的距離為何？

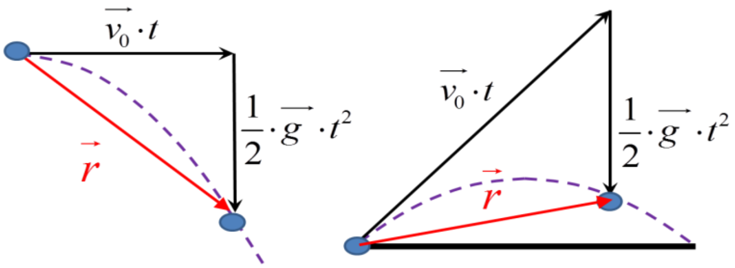


Ans: (a)v_x=0，v_y=10 m/s (b) a_x=6 m/s²，a_y=-8 m/s²

(c)$x=3t^2$ m，$y=10t-4t^2$ m (d)y=0 m (e)2.5 s (f)18.75 m

[補充] 拋體運動可視為 $\begin{cases}\text{速度為}\overrightarrow{v_0}\text{的等速直線運動}\\ \text{鉛直自由落體運動}\end{cases}$ 兩個運動的合成。

$$\boxed{\vec{r}=\overrightarrow{v_0}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{g}\cdot t^2}$$



[說明]

$$\vec{r}=(v_0\cos\theta t)\vec{i}+\left(v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

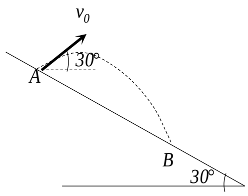
$$=(v_0\cos\theta t)\vec{i}+(v_0\sin\theta t)\vec{j}+\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

$$=\overrightarrow{v_0}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2$$

1.從與一水平成$30°$角之斜面上一點A以v_0初速，$30°$仰角斜拋出一物體而落於斜面上B點，求：

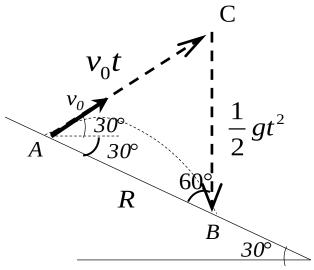
（1）物體落到B點所需的時間？（2）A、B兩點間之距離？

Ans: （1）$\dfrac{2v_0}{g}$ （2）$\dfrac{2{v_0}^2}{g}$



由比較$\left|\Delta\vec{r}\right|,\left|\vec{v_0}t\right|,\left|\frac{1}{2}\vec{g}t^2\right|$三量值關係,恰為三角形三邊長與角度關係

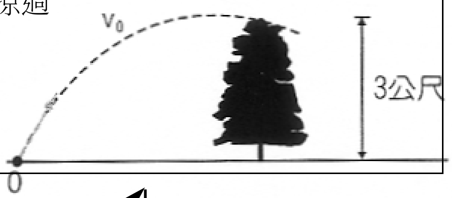
由圖知ΔABC為正三角形$\therefore R=v_0t=\frac{1}{2}gt^2\to t=\frac{2v_0}{g}$ $R=v_0\times\frac{2v_0}{g}=\frac{2{v_0}^2}{g}$



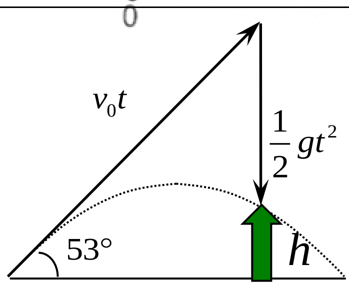
2.如圖所示，一物自O點以53°仰角斜向拋出，欲 使它恰掠過前方6公尺，高度3公尺的耶誕樹，若g =10公尺/秒²，則:

(1) 物自拋出幾秒後恰抵達耶誕樹上方？

(2) 拋出之初速v_o為若干？

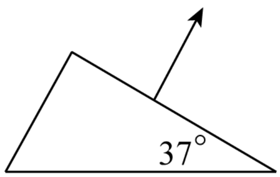


$$\begin{cases} v_0t=6\times\dfrac{5}{3} \\ 5t^2+3=6\times\dfrac{4}{3}\end{cases}\quad\therefore\ t=1[\mathrm{s}]\ \ v_0=10[\mathrm{m/s}]$$



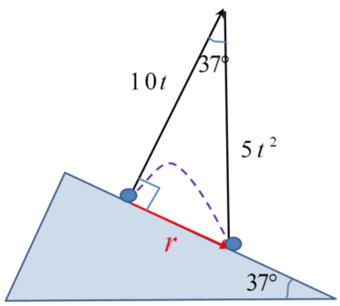
3. 一球由斜角 37°的斜面上拋出，已知球拋出的初速為 10 m/s，方向與斜面垂直。若重力加速度為 10 m/s²，則小球之落點(仍在斜面上)與出發點間的距離為何？

Ans: $\dfrac{75}{4}m$



$$\frac{10t}{5t^2}=\frac{4}{5}\to t=\frac{5}{2}$$

$$r=10t\times\frac{3}{4}=10\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$$



第三章 靜力學（討論物體在靜止時的受力情形，如何能維持平衡，仍靜止不動）

3-1 力的測量與虎克定律

一、力的基本概念

1.力對物體的效應：

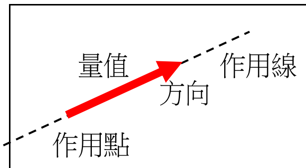
① 使物體形狀發生改變，例如：彈簧受力會伸長或縮短。

② 使物體運動狀態發生改變，例如：由牛頓第二運動定律知道物體受外力會產生加速度。

2.力的單位：SI制單位為牛頓(N)，日常生活中也常使用公斤重(kgw)或公克重(gw)。

單位換算： 1公斤重(kgw)＝9.8牛頓(N)。

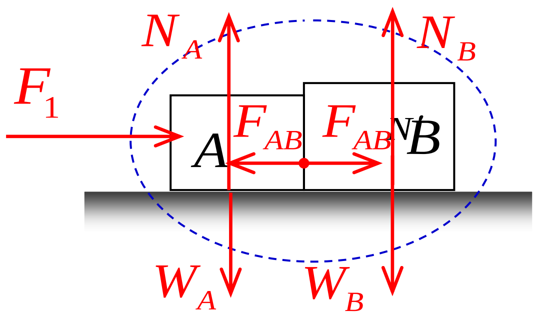
3.力的圖示法：

	① 力為向量，作圖時可用一箭矢來表示力。 ② 箭矢的長度代表力的量值，箭矢的方向代表力的方向，箭矢的起點代表力的作用點，通過力作用點和施力方向平行的延伸線稱為力的作用線。

4.力的種類：

名稱	內容	實例
接觸力	需要接觸才會發生作用的力。	推、拉物體的力或摩擦力、彈力、張力、浮力等
超距力	不需要接觸就可以作用的力。	磁力、萬有引力、靜電力等

[補充] 內力與外力

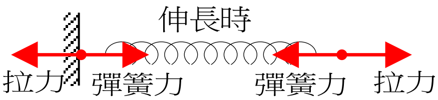
內力	系統內諸物體間相互作用之力。
外力	系統外對此系統內物體之作用力。
說明	1．一力是屬於外力或內力要看其討論的對象而定。 2．系統的內力必在系統內成對產生，互為作用力反作用力，系統內力和必為零。 

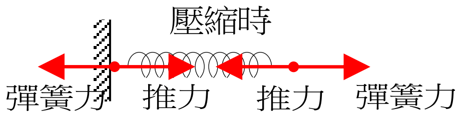
二、利用彈簧來作力的測量

1. 可利用物體受力所產生的運動狀態改變(在本冊第四章使用)或產生的形變來作力的測量。

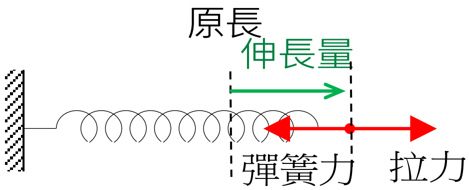
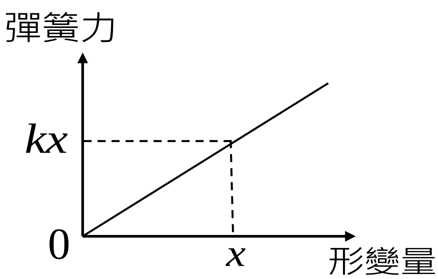
2. 當受力產生形變時，彈簧會產生欲恢復原來狀態的作用力，稱為彈簧力，也稱為彈簧的恢復力

3. 如圖所示，在有形變的彈簧兩端都有彈簧力，量值相同但是方向相反。





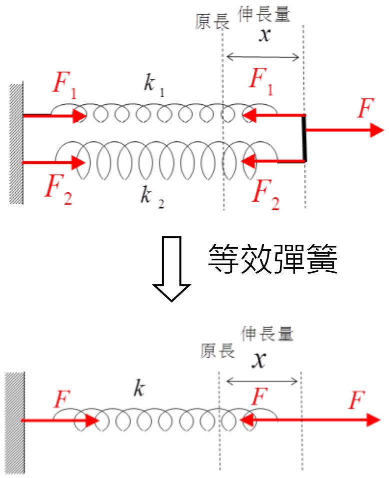
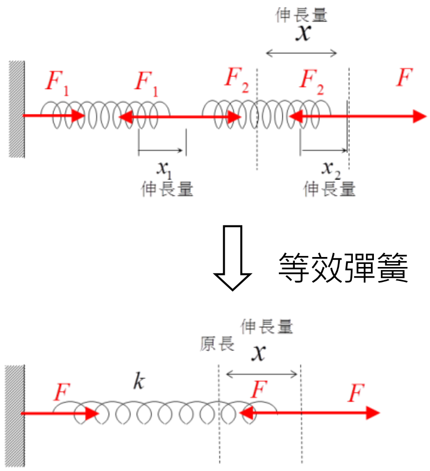
3. 虎克定律：

定義	在不產生永久形變的彈性限度內，彈簧力F_x與形變量（伸長或縮短的長度）x 成正比，彈簧力的方向與彈簧形變的方向相反。
數學式	彈簧力 $F_x=kx$
說明	1.上式中的比例常數k，稱為彈簧的力常數，其意義為將彈簧壓縮或拉長單位長度時，所需外力的量值。 2.力常數k的SI制單位為牛頓/公尺(N/m)，其他常用單位公斤重/公尺(kgw/m)、公克重/公分(gw/cm)…等。 3.力常數k 愈大，表示彈簧越難被壓縮或拉長，和彈簧的材質、長短、粗細有關 。。  

例

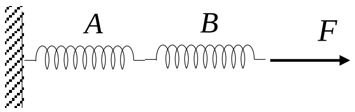
彈簧下懸*4 kgw*之物體時長為*30 cm*，若改懸以 *6 kgw*之物體，則長度為 *35 cm*，則
(1)未懸掛物體時，彈簧原長為 20cm　　(2)彈簧力常數為 0.4kgw/cm

三、彈簧的並聯與串聯

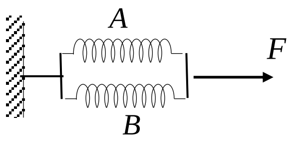
	彈簧的並聯	彈簧的串聯
圖示		
特性	①個別彈簧的形變量相同 $x=x_1+x_2$ ②組合彈簧所受的彈力等於個別彈簧的彈力和 $F=F_1+F_2$ 個別彈簧的彈力與力常數成正比 $F_1：F_2=k_1：k_2$ ③並聯後組合彈簧的等效力常數增大 $k=k_1+k_2$ 【推導】 $F=F_1+F_2 \rightarrow kx=k_1x_1+k_2x_2 \rightarrow$ $k=k_1+k_2$	①個別彈簧的彈力相同 $F=F_1=F_2$ ②組合彈簧的形變量等於個別彈簧的形變量和 $x=x_1+x_2$ 個別彈簧的形變量與力常數成反比 $x_1：x_2=k_2：k_1$ ③串聯後組合彈簧的等效力常數變小 $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 【推導】 $\mathbf{x=x_1+x_2} \rightarrow \frac{F}{k}=\frac{F_1}{k_1}+\frac{F_2}{k_2} \rightarrow$ $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

例

(1)如圖所示，輕彈簧A力常數2gw/cm、輕彈簧B力常數3gw/cm，將兩彈簧串聯，當拉力F=12N時，則A彈簧伸長量<u>6cm</u>、B彈簧伸長量<u>4cm</u>。

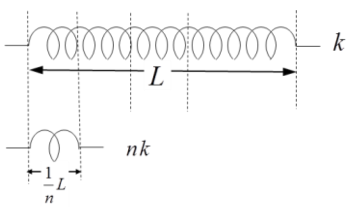


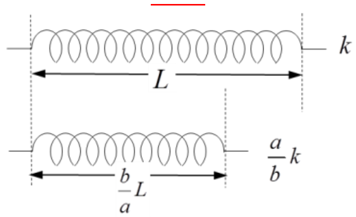
(2)如圖所示，輕彈簧A力常數2gw/cm、輕彈簧B力常數3gw/cm，將兩彈簧串聯，當拉力F=12N時，則A彈簧力量值<u>4.8N</u>、B彈簧力量值<u>7.2N</u>、AB彈簧個別形變量值 <u>2.4cm</u>。



四、彈簧的分割

1. 將力常數k的彈簧等分為n段，則每一小段彈簧的彈力常數為 <u>nk</u>。
2. 將力常數k的彈簧截成原本長度的$\dfrac{b}{a}$，則新彈簧力常數為<u>$\dfrac{a}{b}k$</u>。





【推導】

① n條力常數k的彈簧串聯，組合彈力常數$\underline{\dfrac{k}{n}}$。

② n條力常數k的彈簧並聯，組合彈力常數為$\underline{nk}$。

③ 將力常數k的彈簧等分為n段，設每一小段彈簧的力常數為k'，

將n條力常數k'小段彈簧串聯後力常數將回復成k，得 $k=\dfrac{k'}{n}$，所以$k'=\underline{nk}$。

④ 將力常數k的彈簧截成原本長度比$m:n$的兩段，設兩段彈簧的力常數各為k_m、k_n，可視為先將彈簧等分為$m+n$段，每段彈力常數為$\underline{(m+n)k}$，則將m段串聯得力常數$k_m=$ $\underline{\dfrac{m+n}{m}k}$，

將n段串聯得力常數$k_n=\underline{\dfrac{m+n}{n}k}$。

⑤ 將力常數k的彈簧截成原長度的$\dfrac{m}{m+n}$，力常數變為$\underline{\dfrac{m+n}{m}k}$。

將力常數k的彈簧截成原長度的$\dfrac{n}{m+n}$，力常數變為$\underline{\dfrac{m+n}{n}k}$。

例

將力常數為20 gw/cm的彈簧分成長度比4：5的AB兩段，則A段力常數為36gw/cm、B彈簧力常數為45gw/cm。

範例一

1.如圖為A、B兩彈簧受力F與伸長量x之關係曲線，則當二彈簧

（1）串聯（2）並聯　後，$F-x$ 圖之斜率各為何？

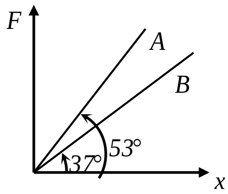
*2.*一輕彈簧原長10cm水平放置一端固定在牆壁一端施以20gw拉力彈簧長度為20cm，

若將彈黃剪成原來的 $1/3$ 長度的新彈簧，則兩端同施以20gw於新彈簧其伸長量為何？

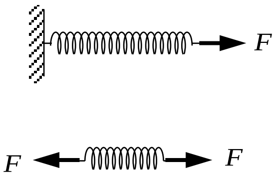
3. 圖中所示為輕質的相同彈簧組合，若 B 組伸長量為 x，則整體的伸長量為？

ANS: 1. （1）$\frac{12}{25}$ （2）$\frac{25}{12}$ **2** （1）$\frac{10}{3}cm$ （2）$\frac{5}{3}cm$ **3.** $\frac{11}{2}x$

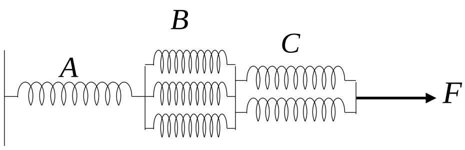
1.



2.



3.



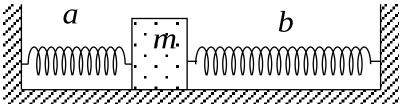
範例二

1. 長ℓ，彈簧力常數k之彈簧分成分成 $\frac{\ell}{3}$ 、 $\frac{2\ell}{3}$之 a、b 兩段聯結如圖，求：
將 m 向右移 x 距離需施力若干？（摩擦力不計）

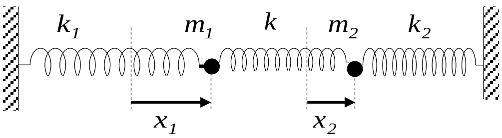
2. 二物體質量分別為m_1及m_2，以彈力常數分別為k_1，k，k_2之三個彈簧連繫起來，如圖所示。在不考 慮重力及摩擦力的情況下，設於m_1及m_2物體偏離其平衡點之位移分別為x_1及x_2（設向右位移時x為正 ），則m_1物體此時所受淨力為？

ANS: 1. $\frac{9}{2}kx$ **2.** $-k_1x_1-kx_1+kx_2$

1.



2.



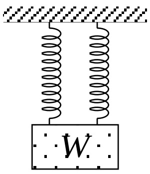
範例三

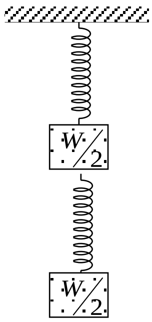
將一物重W懸吊於質量可忽略的彈簧下，在鉛垂直方向成平衡，此時彈簧的伸長量為x。今將此彈簧由中間剪斷成兩段彈簧，利用被剪斷後的二彈簧將同一重物吊起，在鉛垂方向成平衡 ，試問

（1）圖（一）所示，若懸吊連接所耗去的長度可以忽略，則彈簧被重物拉長了？

（2）圖（二）所示，若懸吊連接所耗去的長度可以忽略，則彈簧被重物拉長了？

Ans:（1）x/4（2）上：x/2　下：x/4





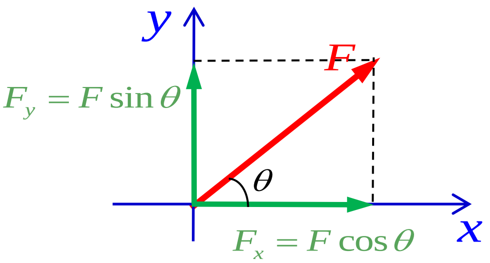
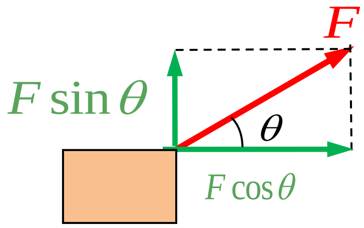
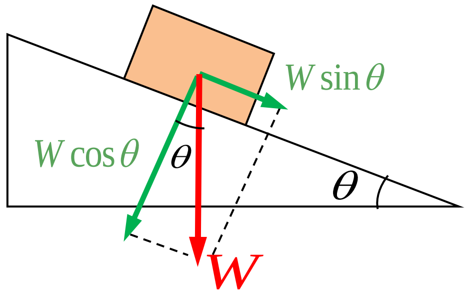
3-2 力的合成與分解

三、力的合成與分解

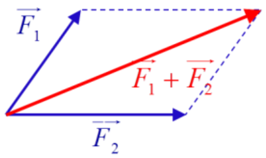
遵守向量合成及分解的法則，物理上常用為**幾何法、直角座標解析法**。

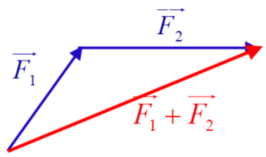
1. 力的分解

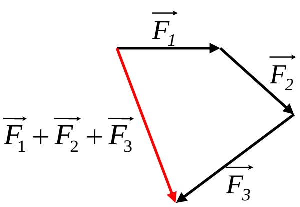
如圖所示，在物理上最常用的力分解方法是將一個力分解為互相垂直的二個分力。

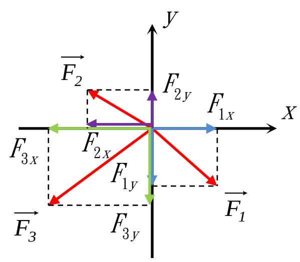
力的分解圖示	實例
	 

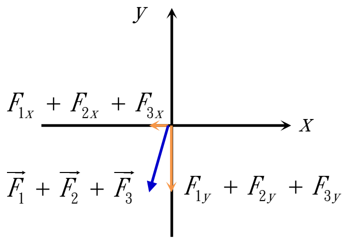
2. 力的合成

<table>
<tr><td></td><td>幾何法</td><td>直角坐標解析法</td></tr>
<tr><td>說明</td><td>①平行四邊形法：將兩力向量箭尾接箭尾，形成平行四邊形的相鄰兩邊，對角線為合力。
②三角形或多邊形法：將力向量箭頭箭尾相接後，由第一個向量箭尾連接至最後一個向量箭尾的向量即為合力。</td><td>先將各力分解在平面直角坐標上形成分量再作運算。</td></tr>
<tr><td>圖示</td><td>。


平行四邊形法


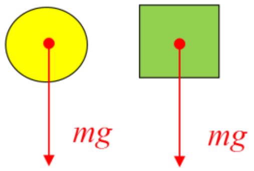
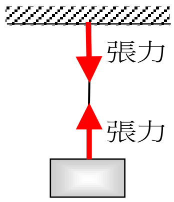
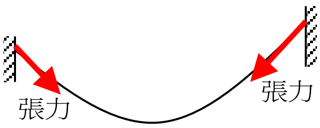
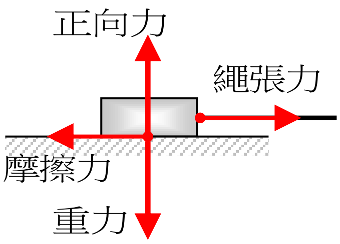
三角形法


多邊形法</td><td>



$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$
$=\left(F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}\right)\vec{i}+\left(F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}\right)\vec{j}$</td></tr>
</table>

3. 常見的力

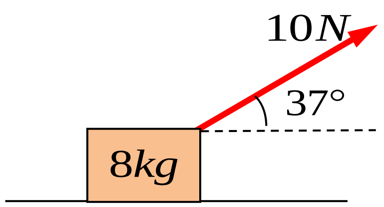
	性質	圖示
重力	①重力的大小=重量=質量×重力加速度 數學式 $W=mg$ ②重力的方向： 鉛直向下。 ③重力的作用點：重心（將在3-4詳細討論，大部分材質均勻的物體位於幾何中心）	
繩子張力	當繩子被外力拉緊時，沿繩子方向會有與外力相反方向的繩子張力。 ①繩子張力的方向指向繩子縮回的方向 。 ②繩子張力的大小只能由其它的力來決定。 ③同一條忽略質量的輕繩各點張力量值相等。	 
正向力	兩個接觸物體在垂直於接觸面方向的接觸力，其方向為將物體推離接觸面的方向。	
摩擦力	兩個接觸物體在平行於接觸面方向的接觸力，其方向與物體相對運動的方向相反。 (本冊4-4會再做詳細討論)	

範例一

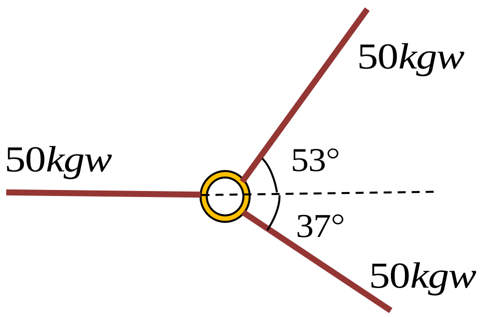
1. 如圖所示，質量 8*kg* 的物體靜止於粗糙的水平地面上，受一繩子拉力 10N 方向與水平夾角 37°，重力加速度 10m/s^2，則 (1) 物體受重力為____牛頓
 (2) 物體受地面的正向力為_____牛頓。
2. 一小圓環在水平面上被三條細繩拉著，繩子拉力的量值與方向如圖所示，請問此小圓環受三條細繩的拉力和為何？
3. 如圖所示，在光滑水平面上，甲、乙兩人利用纜繩拉動一台拖車，已知甲施力$400\sqrt{2}$牛頓，甲乙纜繩方向如圖所示，若要使滑車沿軌道線(圖中虛線)移動請問：
 (1) 乙施力F=________牛頓。
 (2) 拖車受甲乙施力的合力=________牛頓。

ANS: 1.(1)80N (2)74N 2.$10\sqrt{5}kgw$ 3. (1)500 (2) 700

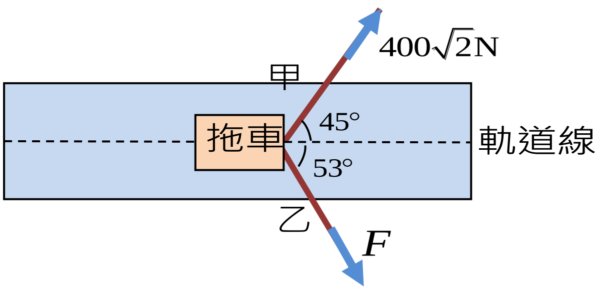
1.



2.

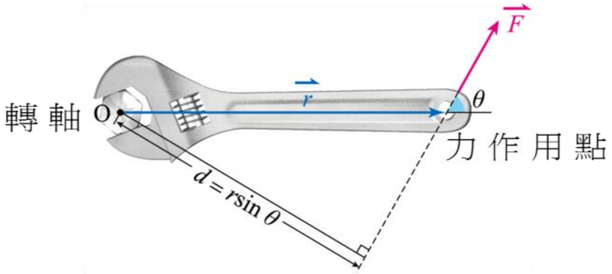


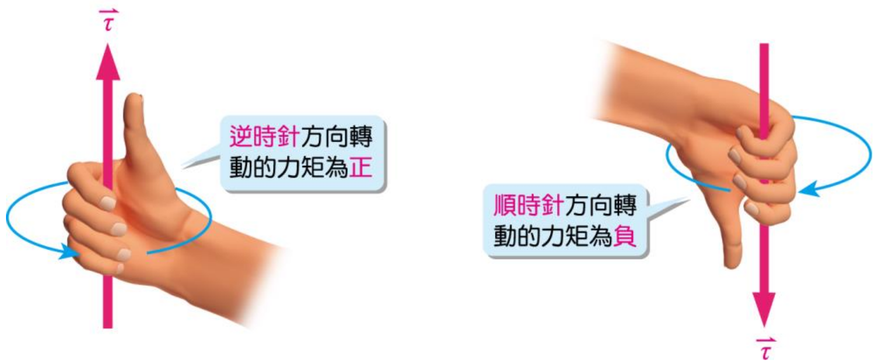
3.



3-3 力矩

一、力矩 τ：

<table>
<tr><td>定義</td><td>力矩為改變物體的轉動狀態的物理量，是一種向量。
(力為改變物體的移動狀態的物理量)</td></tr>
<tr><td>數學式</td><td>1.力矩的量值：$\tau=rF\sin\theta=Fd$
2.力矩的單位： SI單位為牛頓・公尺（N・m），
生活中也常用公斤重・公尺（kgw・m）為單位。
3.力矩的方向：由右手螺旋定則判斷。通常若選取逆時針方向轉動的力矩為正，
則順時針方向轉動的力矩為負。</td></tr>
<tr><td>說明</td><td>1. 如圖所示，轉軸通過O點垂直紙面，r 是由轉軸到力作用點的距離，
θ 是 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 夾角，$d=r\sin\theta$ 為力臂，就是力的延長線與支點的垂直距離。


2.右手螺旋定則：如圖所示，以四指彎曲表示轉動方向，伸直的拇指即為力矩方向。

</td></tr>
</table>

註

①力矩的計算要先知其轉軸（或稱支點、參考點）在何處才有意義 。

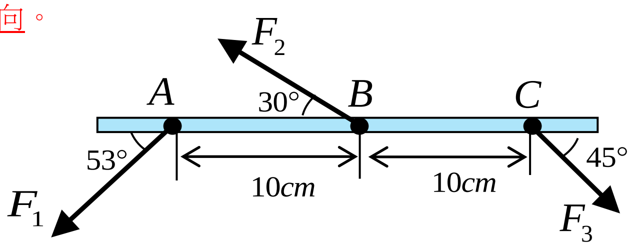
同一個力，對不同的轉軸，可能有不同的力臂，故造成的力矩就不同。

②力矩三要素：轉軸、作用力、力作用點。

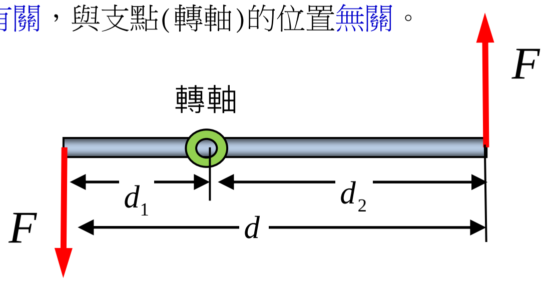
例

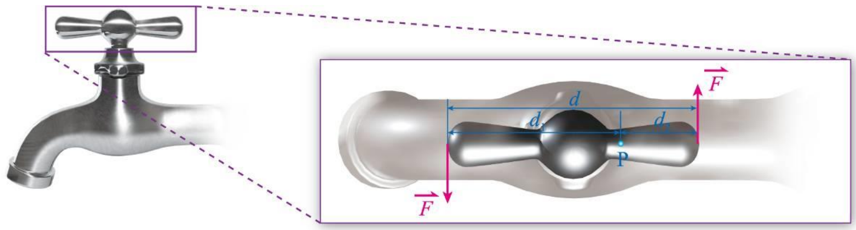
如圖有三個作用力F_1=10N力作用點A ，F_2=20N力作用點B，F_3=30N力作用點C，則對通過A點垂直紙面的轉軸而言，F_1的力矩=0 ，F_2的力矩=100N · cm逆時針方向

，F_3的力矩=$300\sqrt{2}$ [N · cm]順時針方向。



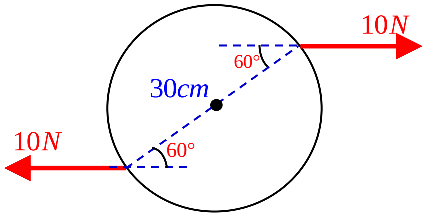
二、力偶與力偶矩

定義	1.一對量值相等、方向相反、但不作用在同一直線上的兩個平行作用力，稱為力偶。 2. 物體受一對力偶作用造成的力矩=Fd ，稱為力偶矩。
說明	1.力偶的合力=0。 2.力偶的合力矩=$Fd_1+Fd_2=F(d_1+d_2)$=Fd，式中d為兩平行力垂直距離，稱為力偶臂。 3.力偶矩只與兩平行力的距離有關，與支點(轉軸)的位置無關。 

應用	水龍頭、機(汽)車方向盤… 

例

如圖有一對10牛頓的力偶作用於直徑30cm的圓盤，力與通過力作用點的直徑夾角60°，則此對力偶的力偶矩為 $10\times30\times\sin60^\circ=150\sqrt{3}$ N，cm

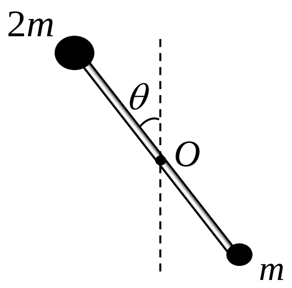


範例一

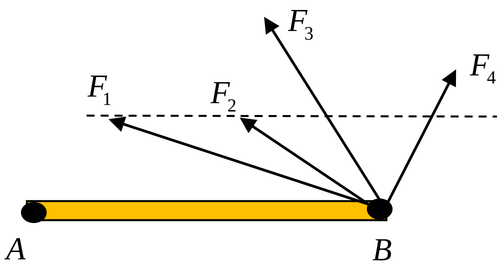
1. 一長度為d，質量可忽略不計的細桿，其中心點O固定，兩端各置有質量為m及$2m$的質點，細桿與鉛垂方向夾角為θ，設重力加速度為g，則重力對O點所產生的力矩為若干？
2. 如圖所示，圖中的虛線與木桿AB平行，有四個作用力F_1、F_2、F_3、F_4，力的作用線與木桿在同一個平面上，力作用點均為B點，則對通過A點垂直紙面的轉軸而言，各力對轉軸A點所產生的力矩量值分別是τ_1、τ_2、τ_3、τ_4，請問各力矩量值的關係為？

ANS:1. $\frac{1}{2}mgd\sin\theta$ 逆時針方向　2. $\tau_1=\tau_2<\tau_4<\tau_3$

1.



2.

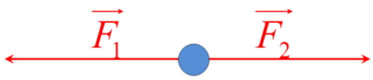
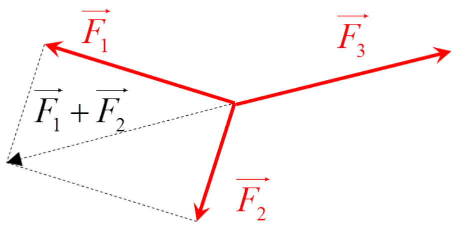


3-3 力學中的平衡概念

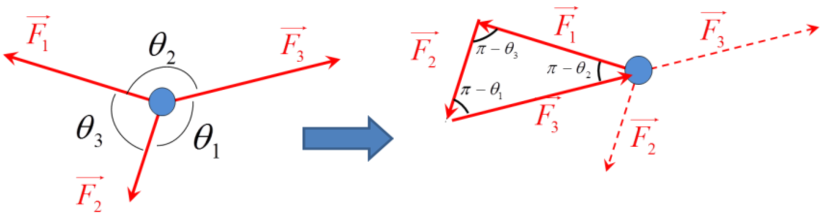
一、平衡概念

平衡種類	定義	平衡條件
平移平衡	物體**移動狀態**不變，原本靜止的維持靜止，原本有速度的維持等速度。	合力=0
轉動平衡	物體**轉動狀態**不變，原為靜止的物體不會轉動，原本轉動的物體不改變轉動的狀態。	合力矩=0 (順時針力矩=逆時針力矩)
靜力平衡	若物體處於力學平衡，並且是靜止的狀態。	1.合力=0 2 合力矩=0 3.受力物靜止。

二、常見的靜力平衡

分類	性質
二力平衡	1.合力=0 ($\vec{F_1}+\vec{F_2}=0 \to \vec{F_1}=-\vec{F_2}$) ：此二力必量值相等，方向相反， 2.合力矩=0：此二力必作用在同一直線上 。 
不平行之三力平衡	1.合力=0 ($\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=0 \to \vec{F_1}=-\left(\vec{F_2}+\vec{F_3}\right)$)： 任兩力的合力與第三力之間，量值相等、方向相反。 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
2．合力=0（$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$三力可圍成封閉三角形滿足「拉密定理」(正弦定理)：$\dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$。

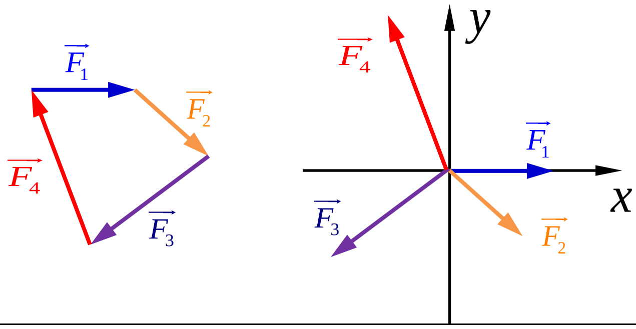


【推導拉密定理】：由三角形的 **正弦定律**

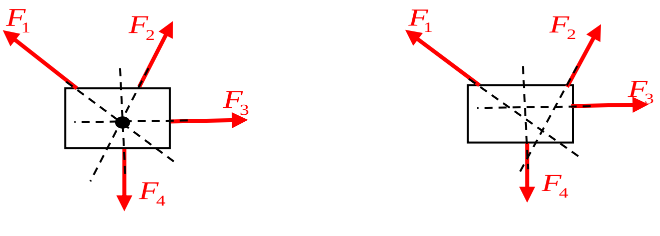
$$\Rightarrow\ \frac{F_1}{\sin(\pi-\theta_1)}=\frac{F_2}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{F_3}{\sin(\pi-\theta_3)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

3．合力矩=0：三個力的作用線必共平面且相交同一點（為共點力，否則會構成力偶）。
</td>
</tr>
<tr>
<td>四力以上的平衡</td>
<td>
1.不一定需要共平面或共點。
2.任一力必與其餘諸力的合力大小相等，方向相反。力圖必構成封閉的多邊形，多以直角座標系解析法解題。



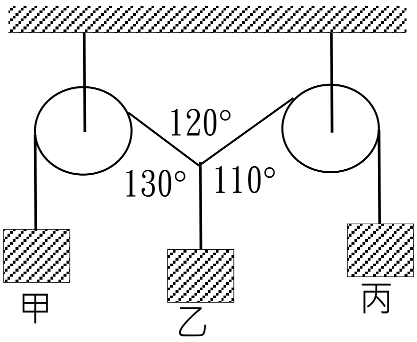
</td>
</tr>
</table>

共點力的平衡	1. 如圖所示，力的作用線（或延長線）通過同一點，稱為「共點力」。 2. 共點力靜力平衡的條件： 合力等於零（∵共點且合力=0時，合力矩必為零）。  (1)共點力　(2)不共點力

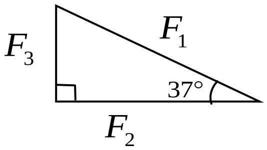
例

(1)如圖甲、乙、丙三個物體在懸線下成靜力平衡，三力的夾角如圖所示，則它們的重量大小關係為

甲>乙>丙



(2)經過三力平移後，如圖所示，形成直角三角形，則 $F_1:F_2:F_3=$5：4：3，若 $F_3=9\ N$，則F_1 ＝15 N，F_2 ＝12 N。



三、靜力平衡的解題步驟

確認受力物體

⇨ 確認受力物體的所有外力並且畫力圖

⇨ 列出方程式並且求解

（1）鎖定欲討論之對象 ⇒ 單一物體 或 系統

（2）分析受力情況 ⇒ 依超距力、接觸力

(沿討論對象繞一圈，大小、方向、作用點)

（3）列出靜力平衡方程式：

$$\sum \vec{F}=0 \rightarrow \begin{cases} \text{幾何法} \begin{cases} \text{直角三角形三邊關係} \\ \text{拉密定理(正弦定理)} \\ \text{相似形} \end{cases} \\ \text{直角座標解析法}: \sum F_x \vec{i}+\sum F_y \vec{j}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x=0 \\ \sum F_y=0 \end{cases} \end{cases}$$

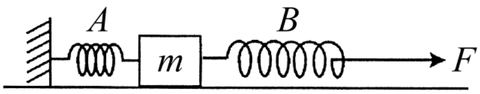
範例一

1. 將力常數為 $6N/cm$，長 $40cm$ 的彈簧分割成 A、B 兩部份，長度比為 $1:3$，如圖示，今施力 F 使 m 的物體向右移 $1cm$，則 (1) F 的值多大？ (2) B 彈簧伸長多少？

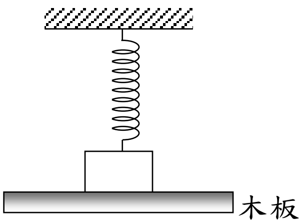
2.一彈簧長 $20\ cm$，彈力常數為 $10\ kgw/m$，一端懸於天花板，另一端懸掛 $3\ kgw$ 之重錘，如圖所示，當系統達平衡時，彈簧長為 $30\ cm$，則木板作用於重錘之力大小為多少？

Ans: *1. .(1)24N (2)3cm* **2.** *2 kgw*

1.



2.



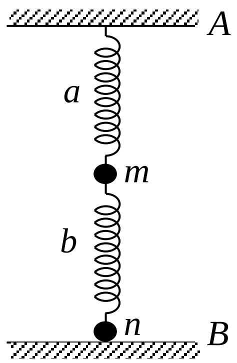
範例二

如圖，長*20* cm，力常數k = *2.0* gw / cm之完全相同彈簧兩條a、b（質量不計），重量*10* gw之重物m、n兩個（大小不計），如圖連接，彈簧a之上端固定於A，重物n放在平臺上，全體保持鉛直，試問：

（1） 平臺由靜止緩緩下移使 AB 之距離為 *50* cm，則 a 彈簧長為若干 cm？

（2）承上題，此時平臺對 n 之作用力為若干 gw？

***Ans:*　（1）27.5　（2）5**



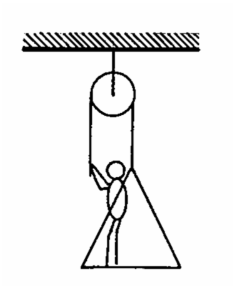
範例三

1.一人重60公斤站在一重30公斤之平台上，垂直拉下一繞過滑輪之繩索 (如圖) ，滑論重15公斤重。設滑輪及繩索之摩擦與繩索質量可略而不計，試分別求出在(1)圖(一)與(2)圖(二)狀況下，此人需施力多大才能在平台上維持靜止？此時人與平台作用力？

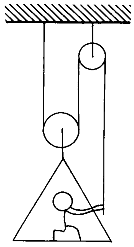
2. 如圖(三)，已知W_1=2kgw，若滑輪重不計，且不考慮摩擦，試求(1) W_2=________ (2)最上端的張力 T =_________ 。

ANS::1.(1) 45kgw 15kgw (2) 35kgw 25kgw 2.(1)6kgw (2)8kgw

1.

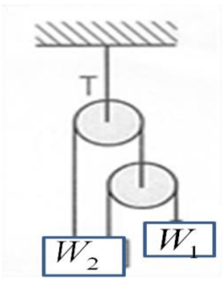


(一)



(二)

2



(三)

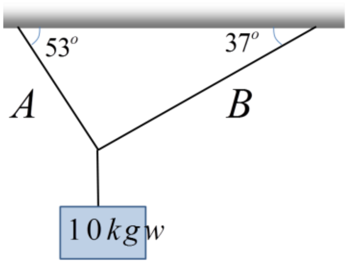
範例四

1. 如圖，一重為10公斤重的物體掛在一繩上某點，恰可使之靜止不動，則繩作用於A、B兩點的張力各為多少公斤重？

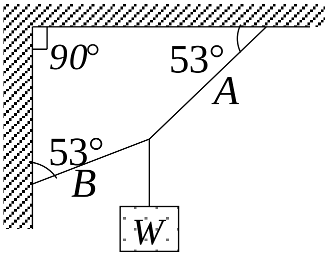
2.如圖之A、B兩繩吊一重物（ 重量為W=350gw）而成平衡。設繩上之張力大小各為T_A及T_B，則T_A =________　T_B =__________。

ANS: 1. 8kgw 6kgw　2.1000gw；750gw

1.



2.



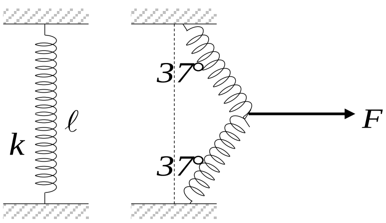
範例五

1.長ℓ，彈力常數k之輕彈簧，固定其上、下兩端，今於其中點處施一力F彈簧各段與鉛直線成$37°$ 角，則F為？

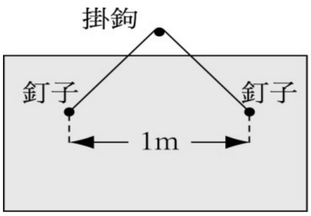
2.<u>小軒</u>要在客廳裏掛上一幅 1 公斤重的畫(含畫框)， 畫框的背面有兩個相距 1 公尺、位置固定的釘子。他將畫對稱的掛在牆壁的掛鉤上，掛繩最大可以承受 1 公斤重的張力，掛好後整條細繩呈緊繃的狀態(如圖)。假設細繩可以承受的最大張力與繩長無關，則細繩最少需要幾公尺才不至於斷掉?

Ans: 1. $\frac{3}{10}k\ell$ **2.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

1.



2.



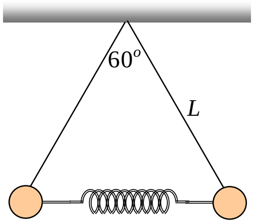
範例六

1. 質量均為m的A、B兩球，用兩根長度均為L的輕繩懸掛，兩球之間夾一力常數為K的輕彈簧，平衡後夾60^o，如圖所示，則輕彈簧被壓縮的長度是多少？（重力加速度 g）

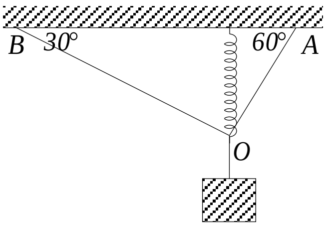
2. 物重*10*仟克重，以細繩及彈簧吊起平衡如圖。設彈簧原長*1.5*厘米，彈力常數為*7840*牛頓／米，細繩較長者長度為*4*厘米，則較長細繩之張力為若干公斤重？

Ans:1. $\dfrac{\sqrt{3}mg}{3K}$ ***2.*** ***3公斤重***

1.



2.

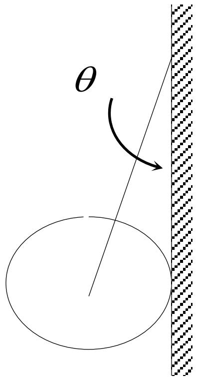


範例七

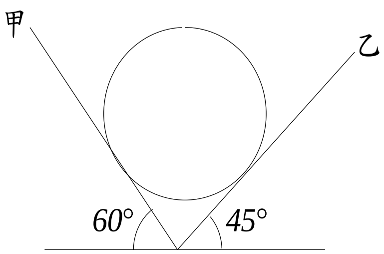
1.球之重量為 W 懸掛於光滑垂直牆上，繩與牆夾角 θ ，如圖，則：
(A) 繩張力？ (B) 牆作用於球正向力？ (C) 若繩減短，則平衡時張力變大還是小？
2.一重量為W之均勻圓球，架在底緣相靠之甲、乙兩光滑平板上，甲板與水平面成$60°$角，乙板與水平面成$45°$角(如圖)。設板與球間無摩擦力，則甲板施於球的作用力量值為？

ANS:1.(A) $\dfrac{W}{\cos\theta}$ (B) $W\tan\theta$ (C) 變大 2.$\left(\sqrt{3}-1\right)W$

1.



2. [關鍵]斜面正向力與鉛直線夾角=斜面傾斜角(斜面與水平夾角)



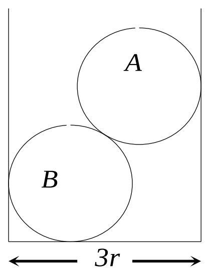
範例八

1. 如圖所示AB兩球均重W置於底邊$3r$ (r為A，B兩球之半徑)之容器中，則：
(A)容器底作用於B球之力為？
(B) A，B間之作用力？
(C) 左右容器壁對球之力各為？

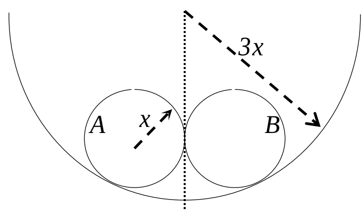
2.重量W，半徑x之兩球A、B置於半徑$3x$之半球形碗內(如圖)，則：
(A) B對A之作用力為？
(B) 碗壁對B之作用力為？。

ANS: 1. (A) 2W (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}W$ *(C)* $\frac{\sqrt{3}}{3}W$ *2.***(A)** $\frac{\sqrt{3}}{3}W$**(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}W$

1.



2.

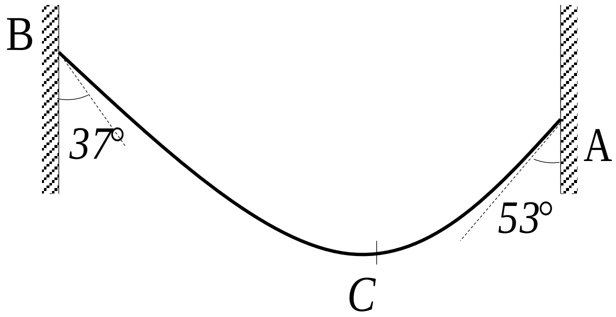


範例九

如圖，一柔軟均勻質量鐵鍊，懸吊於二牆之間，鍊重W，A點切線與牆夾角$53°$，B點切線與牆夾角$37°$，C為最低點，則

（A）A點之張力為？（B）B點之張力為？（C）C點之張力為？（D）AC段重與BC段重比？

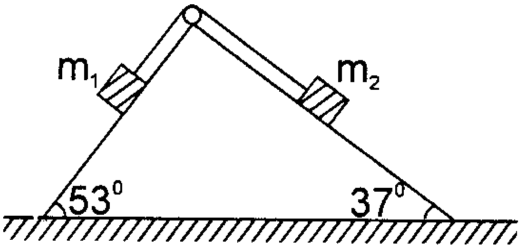
Ans: （A）$\frac{3}{5}W$（B）$\frac{4}{5}W$（C）$\frac{12}{25}W$（D）9：16



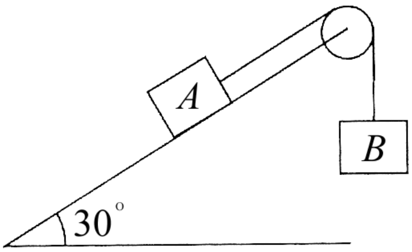
範例10

1. 考慮如圖所示系統，設各接觸面均無摩擦，若此質量系統保持平衡，則 m_1 及 m_2 的比值如何?
2. 圖重量 2.4 公斤的物體 A，置於斜角 30°的光滑斜面上，以細線連接物體 B，跨過無摩擦的滑輪，若物體能靜止於斜面上，則 B 的重量應為______kgw
Ans:1. 3/4　2. 1.2

1.



2.



範例11

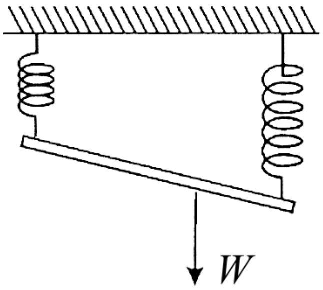
*1.*一非均勻的木棒 *AB*，長 4*m*，欲將 *A* 端提起，至少需力 60*kgw*，欲將 *B* 端提起，則最少需力 80*kgw*，則木棒重多少？

2.重 19.6*N* 的木棒，用 k=400*N*/*m* 的兩相同彈簧吊起，棒的重心在一端 $\frac{1}{3}$ 長度處，則兩彈簧的伸長量約相差相多少厘米？

Ans:1.140kgw　2. 1.6cm

1.

2.



範例 12

欲將一半徑*50cm*，重*30kgw*之圓筒滾上高出地面*20cm*之階梯上，圓柱筒與階梯的接觸點不互相滑動，請問：

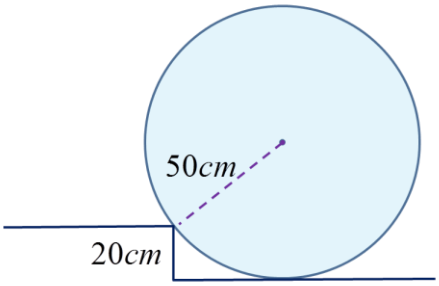
（1）若圓柱筒與階梯的接觸點為轉軸，則圓柱筒所受重力的力矩為_______ 。

（2）當施加通過圓柱筒軸心的水平力，要使圓柱筒離開地面，則施力量值最小為_____

（3）當施加水平力且作用點可任意改變，要使圓柱筒離開地面，則施力量值最小為_____

（4）當施力方向與作用點可任意改變，要使圓柱筒離開地面，施力量值最小為_____

ANS: (1) 2400 kgw．cm　(2) 80kgw　(3) 30kgw　 (4) 24kgw



範例 13

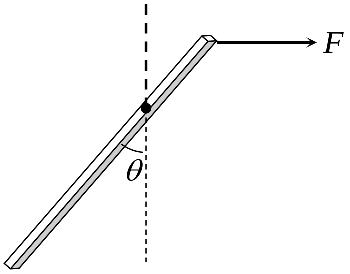
1.一均勻細桿，長*1*公尺，重量為*W*，在距離其上端*25*公分處以一釘子將此細桿釘在鉛直牆面上，使細桿可繞此釘子無摩擦地轉動。今施一水平力F於其上端，使細桿偏離鉛線θ角($\theta < 90°$)，如圖所示，則在平衡時F量值為何？釘子作用在細桿上之力量值為？(均以*W*、θ表示)

2.如圖：OP為一均勻木棒，可繞通過O點的水平軸自由轉動。若以水平拉力F作用於P點，將木棒從鉛直下懸狀態($\theta=0$)緩慢地拉起，但$\theta<90°$，則在拉起的過程，水平拉力F的大小及其對轉軸的力臂、力矩將會隨θ之逐漸增大而作何種變化?

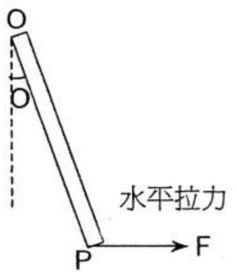
(A)三量皆變大　(B)力變大，力臂變小，力矩變大　(C)力變大，力臂變小，力矩變小　(D)力變小，力臂變大，力矩變小　(E)三量皆變小。

ANS:1.Wtanθ　W secθ　2.B

1.



2.

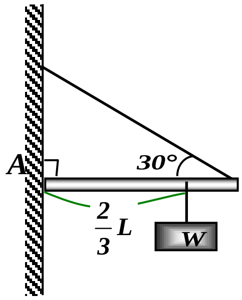


範例 14

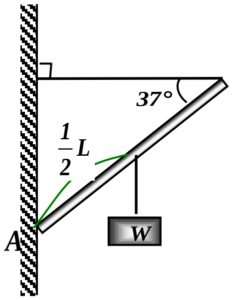
求下列三圖情形下，棒重不計長度L，棒上所掛物體重量W，木棒平衡時圖中繩的張力T及牆作用於棒的作用力F，分別為若干？(均以W表示)

Ans.(1)$T=\frac{4}{3}W$　$F=\frac{\sqrt{13}}{3}W$　(2)$T=\frac{2}{3}W$　$F=\frac{\sqrt{13}}{3}W$　(3)$T=\frac{5}{12}W$　$F=\frac{\sqrt{97}}{12}W$

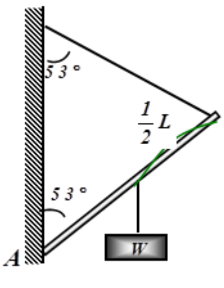
(1)



(2)



(3)



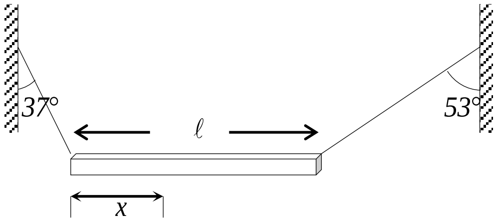
範例 15

1.一不均勻之桿重*W*，由二輕繩懸掛於水平位置，如圖，一繩與牆之夾角*37°*，另一角度為*53°*，若桿長 ℓ= *20*公分，則重心到左端之距離*x*為多少？

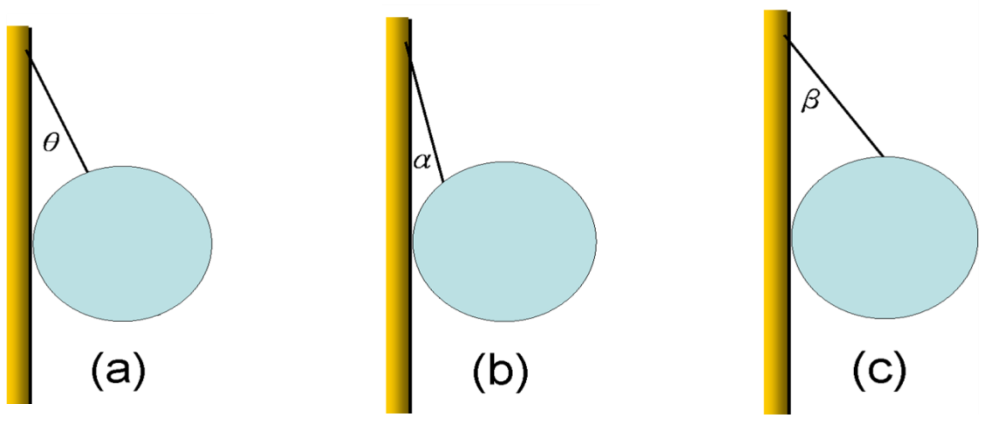
2.圖中，三均勻的球重 W，各以細線懸吊於牆壁上，線與牆壁的夾角各為 θ、α 和 β，(a)圖中的細線方向通過球心，(b)和(c)圖則否，問：三圖中，牆壁與球之間有摩擦力嗎？方向向哪裡？

Ans:1.7.2 公分　***2.(1)(a)無摩擦力(b)磨擦力方向向下(c)磨擦力方向向上***

1.



2.



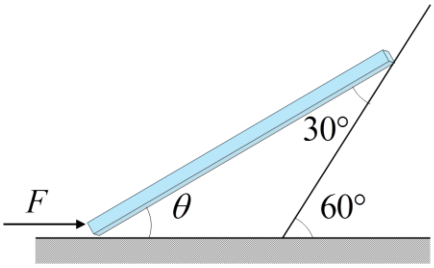
範例 16

1. 重W的均勻木棒斜靠在光滑的牆及地面上，欲保持靜止不動，則水平施力F（作用於木棒最下端）的大小為多少？地面與木棒作用力？

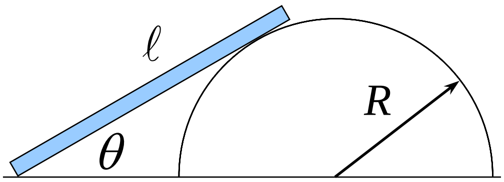
2. 圖中，一均勻木棒重W，長度為ℓ，斜靠在半徑為R的光滑固定半球面上，棍與粗糙地面的夾角θ為30°，若$\ell=2R$則，(a)球面對木棍的作用力？(b)地面對木棍的正向力？

***Ans*：1.** $\frac{\sqrt{3}}{4}W$ **2.(a)** $\frac{1}{2}W$ **(b)** $(\frac{4-\sqrt{3}}{4})W$

1.



2.



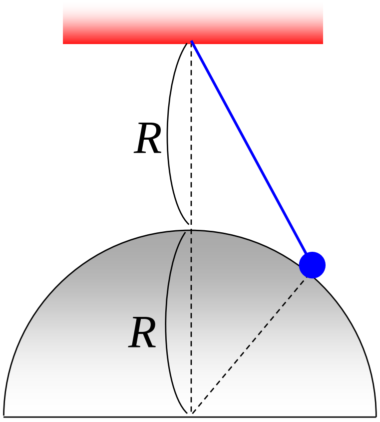
範例 17【挑戰題】

1. 圖示，用長為 L 的細繩吊一重量為 W 的小球(可視為質點)，放在表面光滑半徑為 R 的半圓柱上；細繩的懸點在柱面中心的正上方，距柱面頂點為 R，則平衡時柱面對球的正向力量值？

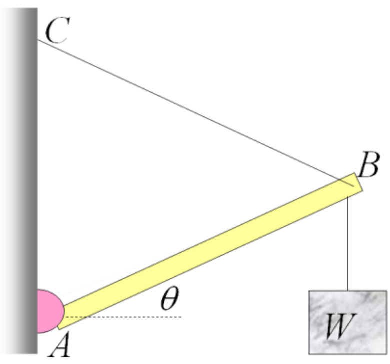
2. 圖中，一質量可忽略不計的木棒以 A 點作為樞紐可繞鉛直面轉動，另一端頂住懸掛重物 W 的細繩。系統平衡時，木棒與水平方向之夾角為 θ，若木棒長度為 L，圖中樞紐 A 到 C 點的長度為 a，則細繩對木棒的作用力為何？

***Ans*：1.** $\frac{W}{2}$　　**2..** $T=\frac{\sqrt{a^2+L^2-2aL\sin\theta}}{a}W$

1.



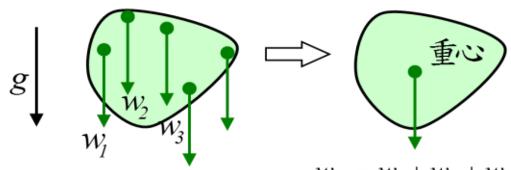
2.[提示]　可使用相似形比較三力大小關係。



3-5 重心與質心

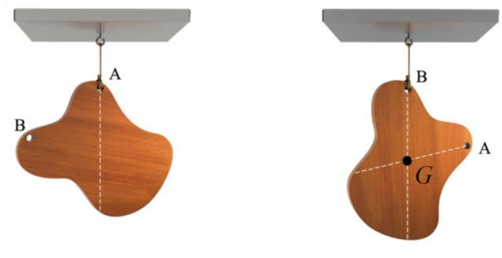
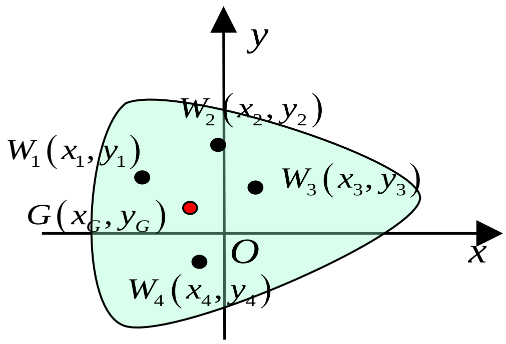
一、重心 G

1. 物體可視為由許多質點組成，每個質點都受到重力作用，如圖所示，如果要用一合力來表示此物體所受的重力，其對物體產生移動與轉動的效果不變，此合力的作用點就稱為重心。



$w_G = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots =$ 物體總重量

2, 重心位置的求法： 以重心為轉軸，則重力的力矩必須為零。

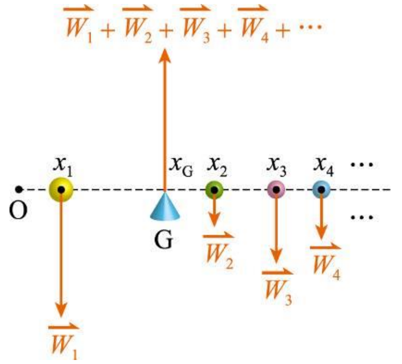
	定義	說明
懸吊法	將物體懸吊於 A 點，此物體的重心必位於通過懸點的鉛垂線上，另懸一點B，得另一鉛垂線，而重心亦應位於此線上某點，此二次所得之鉛垂線之交點 G，即為此物的重心位置。	
座標法	多質點系統重心的位置座標 $\begin{cases} x_G = \dfrac{W_1x_1 + W_2x_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} \\ y_G = \dfrac{W_1y_1 + W_2y_2 + \ldots}{W_1 + W_2 + \ldots} \end{cases}$	

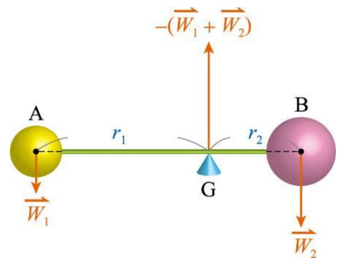
[說明] 設有 n 個質點，各重 W_1、W_2 ... ，在 x 軸坐標為 x_1、x_2 ...，

<u>**對重心 G 的力矩和＝0**</u>。

即以逆時針方向為正，$W_1\times(x_G-x_1)+W_2\times(x_G-x_2)+W_3\times(x_G-x_3)+\ldots=0$

$\boxed{x_G=\dfrac{W_1\times x_1+W_2\times x_2+W_3\times x_3+\ldots}{W_1+W_2+W_3+\ldots}}$ 同理：$\boxed{y_G=\dfrac{W_1\times y_1+W_2\times y_2+\ldots}{W_1+W_2+\ldots}}$ 、





3. 重心性質：

(1). 兩個質點重量W_1 和W_2，其重心與 W_1 及 W_2 距離為 r_1 和 r_2，則：

① 以重心G為支點計算，合力矩為零 $r_1W_1-r_2W_2=0$

$\therefore\ \dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{W_2}{W_1}$ 重心的位置到兩物距離和兩物重量成<u>反</u>比。

② 兩質點與重心必連成一直線。

(2). 重心坐標和原點位置 有關， 但<u>重心相對於物體的位置</u>和原點位置 無關 。

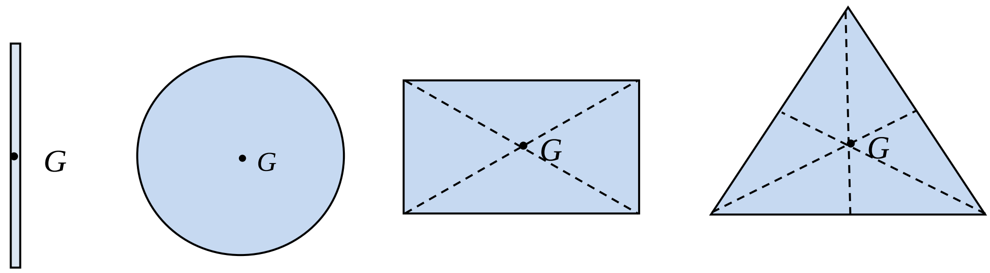
（均勻重力場中，剛體的重心不因剛體位置或方向的改變而變更其位置）

(3). 在均勻重力場下，密度均勻、形狀規則物體其重心處在 幾何中心 處，

如：長棍重心在中間、圓球重心在球心上、矩形重心在對角線交點上、三角形重心在三中線交點.... . 。

(4). 在重心位置處 不一定 存在有物質。

(5). 在無重力場處，物體的重心無意義。



例

(1)如圖，三質點重量與座標分別為W(0,0) 、3W(0,4)、4W(4,0)的重心位置座標為$\left(2,\dfrac{9}{8}\right)$。

[解析]

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{W\times 0+3W\times 0+4W\times 4}{W+3W+4W}=2 \\ y_G = \dfrac{W\times 0+3W\times 3+4W\times 0}{W+3W+4W}=\dfrac{9}{8} \end{cases}$$

(2) 有三隻均勻細木桿排列如圖(a)所示，重心位置座標為$\left(\dfrac{3}{2},1\right)$。

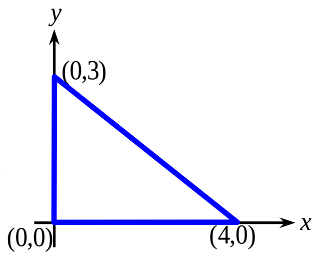
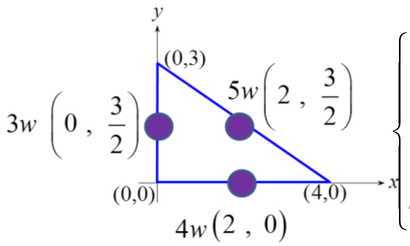


圖 (a)

[解析]

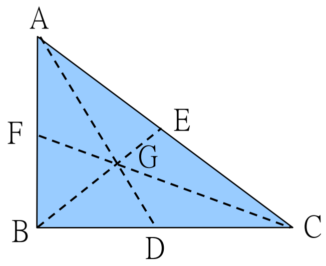


$$\begin{cases} x_G = \dfrac{5w\times 2+4w\times 2+3w\times 0}{5w+4w+3w}=\dfrac{3}{2} \\ y_G = \dfrac{5w\times \dfrac{3}{2}+4w\times 0+3w\times \dfrac{3}{2}}{5w+4w+3w}=1 \end{cases}$$

你應該知道　均勻三角形板的重心位置

如圖均勻平板三角形ABC ，$\overline{AD}$ $\overline{BE}$ $\overline{CF}$ 為三中線，三中線交點G為均勻三角形平板的重心位置。重心G位於任一中線的三等分點上，幾何關係為

$\overline{AG}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}$　$\overline{BG}=\dfrac{2}{3}\overline{BE}$　$\overline{CG}=\dfrac{2}{3}\overline{CF}$ 。



例

有一塊均勻的直角三角薄板如圖(b)所示，重心位置座標為$\left(\dfrac{4}{3},2\right)$。

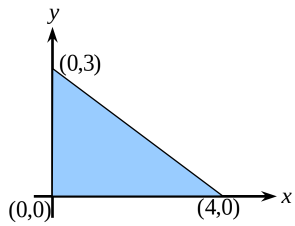
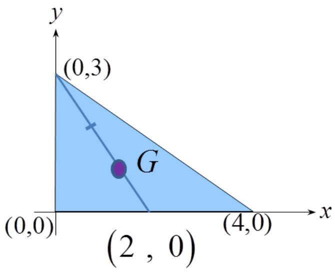


圖 (b)

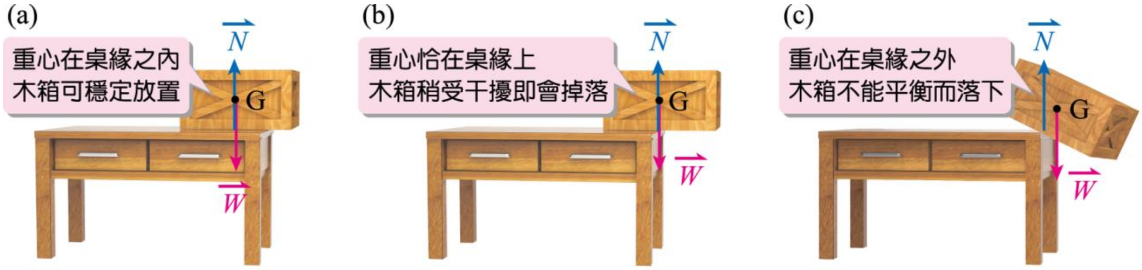
[解析]



$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3}\times 2=\dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}\times 3=2 \end{cases}$$

二、重心與平衡 ：

1. 如圖，物體的重心位置在桌面範圍之內，才可保持平衡。

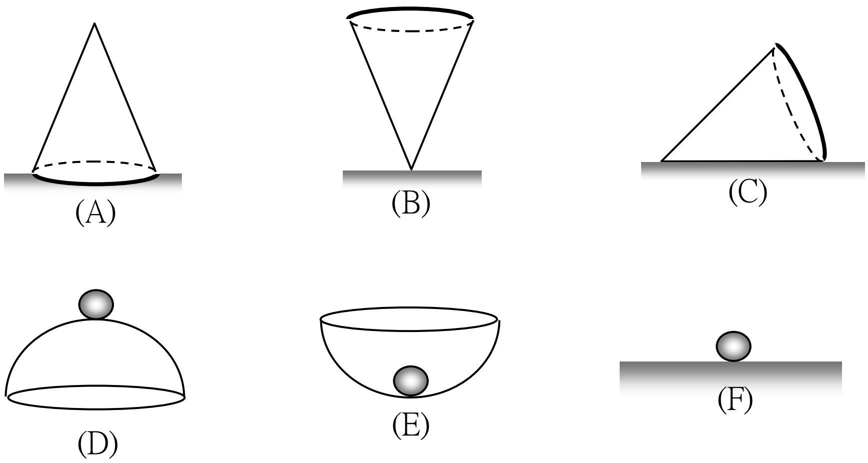


2. 平衡的種類：如圖所示。
   (1) 穩定平衡：平衡狀態的物體受一小擾動仍可回復到原來的平衡狀態。(微擾後，重心高度上升)
   (2) 不穩定平衡：平衡狀態的物體受一小擾動即破壞原平衡狀態。(微擾後，重心高度下降)
   (3) 隨遇平衡：平衡狀態的物體受一小擾動隨即達另一平衡狀態。(微擾後，重心高度不變)

穩定平衡　　不穩定平衡　　隨遇平衡

例

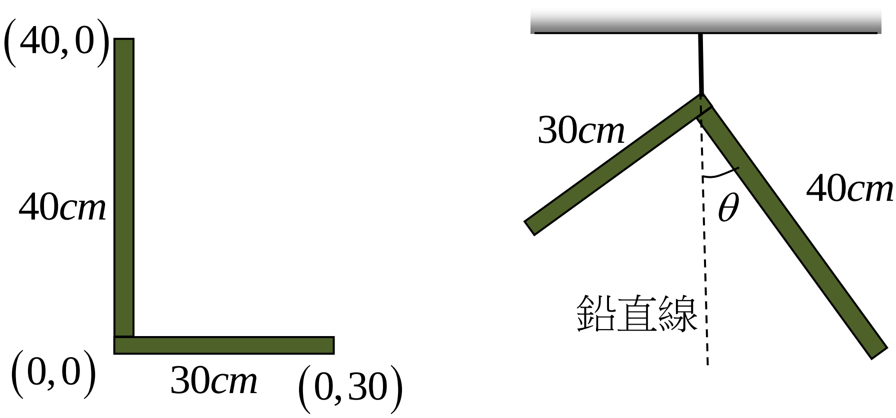
下列 9 個平衡圖示，屬於穩定平衡的有__AE__，不穩定平衡的有__BD__，隨運平衡的有__CF__。



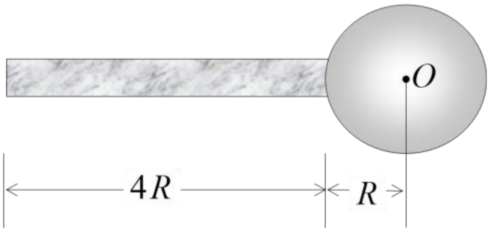
$\boxed{\text{範例1}}$　　　重心與懸吊

1.有一隻厚度及密度皆均勻的 L 型尺。兩邊的邊長分別為 30 公分和 40 公分，忽略寬度，請問：(1) 依圖(1)上的座標，L 型尺的重心坐標為_____ 。
(2) 依圖(2)以細線將該尺的兩邊交接處懸吊起，平衡時，tanθ=______ 。
2.重量為W_1，長$4R$ 之均勻木棒，質量為W_2，半徑為R 之圓球，緊密接合，如圖，則此系統之重心與球心O之距離為？
ANS:1. (1)$\left(\frac{45}{7},\frac{80}{7}\right)(2)\frac{9}{16}$ 2. $\frac{3W_1}{W_1+W_2}R$

1.



2.



範例2　　切割後的重心與懸吊

1.一均勻薄圓板半徑為R，若挖去半徑為$\frac{1}{2}R$的一個內切圓如圖，直徑AB與直徑CD垂直相交於薄圓板圓心O，挖去內切圓圓心E，請問：

(1)薄圓板剩餘部分之重心距圓心O多遠的距離？

(2)將剩餘部分以細繩自 A 點吊起，平衡時鉛直線與$\overline{AB}$直徑夾角為θ，則$\tan\theta$之值為何？

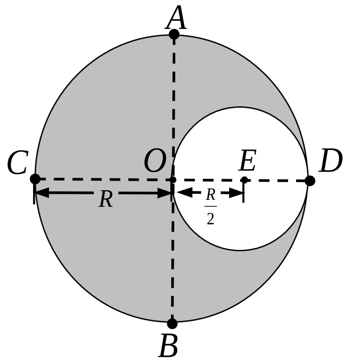
2.質料均勻的正方形薄紙板，邊長ℓ：

(1)若將其右上角斜線部分除去，則剩餘部分的重心位置距O點？

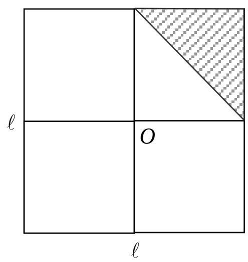
(2)若將右上角摺至圖中O點時，則重心位置距O點？

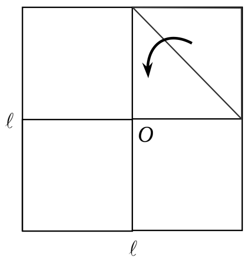
ANS:1.　(1) $\frac{R}{6}$　(2) $\frac{1}{6}$　　2.(1) $\frac{\sqrt{2}}{21}\ell$　(2) $\frac{\sqrt{2}}{24}\ell$

1.



2.



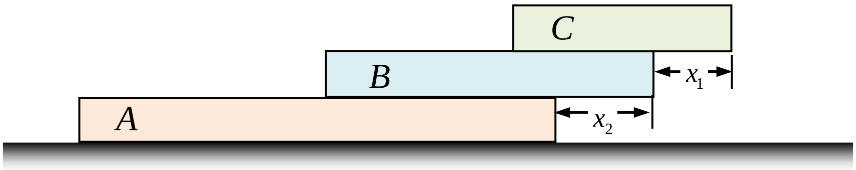


$\boxed{\text{範例3}}$　　重心與平衡

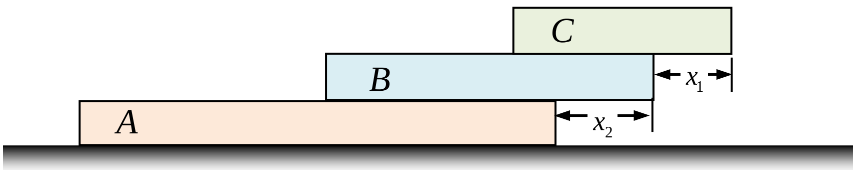
1.有三條密度均勻截面積相等之長木條A、B、C，長度分別為12.0公分、10.0公分、6.0公分，靜置如圖所示，木塊B、C右側相距x_1=2cm，木塊A、B右側相距x_2，若木塊不傾倒，請問x_2最大值為多少公分？
2.一密度均勻截面積相等之長木條，切成A、B、C三塊，長度分別為10.0公分、8.0公分、4.0公分，靜置如右圖所示，木塊B、C右側相距x_1，木塊A、B右側相距x_2，若木塊不傾倒，而x_1、x_2皆為最大值，則x_1+x_2為多少公分？

ANS: 1. 3.5cm　　2. $4\frac{2}{3}$ cm

1.

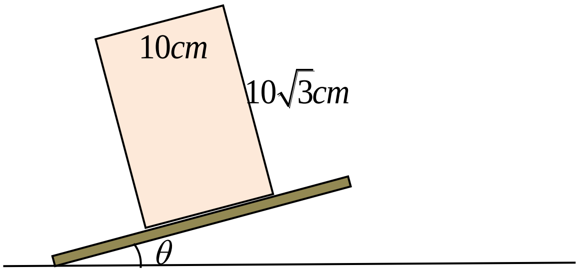


2.

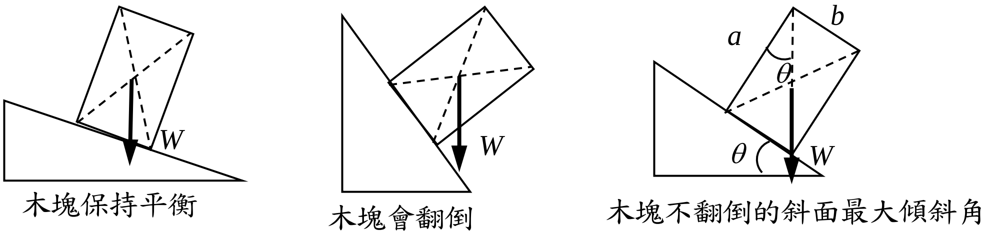


$\boxed{\text{範例4}}$　　斜面上物體的翻倒

如圖所示，一高度為 $10\sqrt{3}$ 公分的密度均勻長方體，其正方形底面之邊長為 10 公分，靜置於一斜面上。當傾斜角 θ 由 0 度開始慢慢增加，若長方體不會滑動，要維持平衡不翻倒時，請問傾斜角 θ 最大值為多少？
ANS:　30°



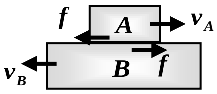
[解題觀念]



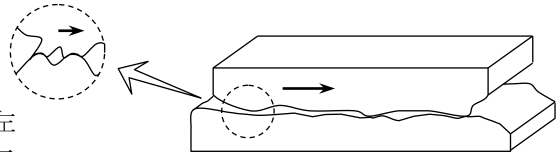
1.物體受外力作用而略微傾斜時，通過重心之鉛垂線落於底面積之範圍內，物受到重力之力矩作用仍可恢復原狀；但是通過重心之鉛垂線超出底面積之範圍時，物體即傾倒。
2.斜面上的長方體不翻倒的最大傾斜角時，通過重心的鉛直線恰為對角線 ：

3-6 靜摩擦力：

一、摩擦力： 因兩物體間的**接觸面（點）**<u>**有相對運動**</u>或<u>**欲產生相對運動**</u>時，因分子間彈變形而在<u>**平行於接觸面的方向**</u>產生<u>**阻止**</u>此相對運動而產生之力。通常其方向<u>**和企圖相對運動的方向相反**</u>。

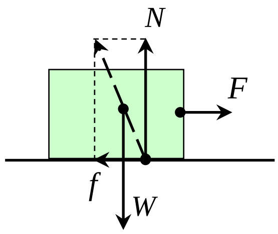


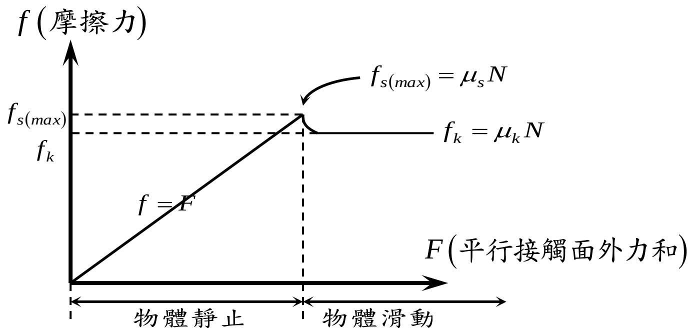
A相對於B向右移動 $\rightarrow$ A受B的磨擦力向左
B相對於A向左移動 $\rightarrow$ B受A的磨擦力向右



註: 物體所受摩擦力的方向，不一定與其相對於地面的運動方向相反。

二、種類：





（1）靜摩擦力 f_S ：

①當物體受外力 F 作用時，仍保持靜止，依靜力平衡原理，此時<u>**靜摩擦力的量值必等於外力**</u> F **，**<u>**方向與**</u> F <u>**相反**</u>。

②當物體受外力 F 作用而恰好開始移動時，此時外力恰好克服靜摩擦力，而此時之摩擦力為靜摩擦力之中的最大值，稱為<u>**最大靜摩擦力**</u> $f_{S(max)}$

③**最大靜摩擦力**的量值與<u>**正向力的大小**</u>及<u>**接觸面的性質**</u>有關 $\boxed{f_{S(max)} = \mu_S N}$

μ_S:靜摩擦係數（**接觸面的性質**）。

④最大靜摩擦力<u>**與接觸面積無關**</u>**。**

（2）動摩擦力 f_K：

①物體開始滑動後，**動摩擦力比最大靜摩擦力為小且為定值**，此時的摩擦力稱為動摩擦力。

②動摩擦力的量值與**正向力的大小**及**接觸面性質**有關 $\boxed{f_K = \mu_K N}$，μ_S:靜摩擦係數（**接觸面的性質**）。。

③動摩擦力**與接觸面積、相對速度大小**無關。

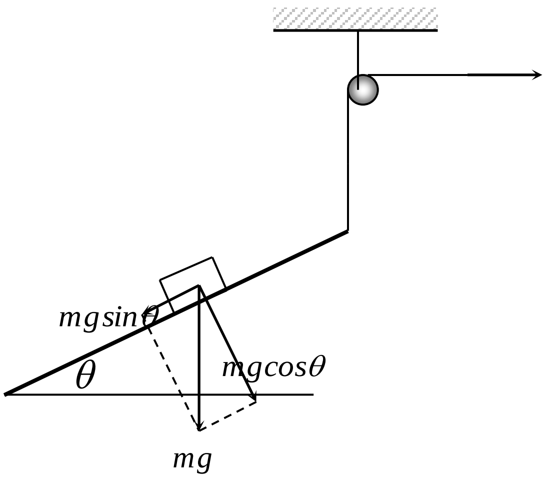
（3）摩擦係數 μ_S、μ_k的測定：

1. μ_S、μ_k只與**兩個接觸面的性質（粗糙程度）**有關。摩擦係數**無單位**。

2. 測量方法：如右圖所示，重$W = mg$ 的物體置放於斜面上，**逐漸增加θ角**。

①μ_S：若當$\theta = \theta_s$時，物體**恰好移動**，則此時 $f_{S(max)} = mg\sin\theta_s$、$N = mg\cos\theta_s$，由 $f_{S(max)} = \mu_S N \Rightarrow \boxed{\mu_S = \tan\theta_s}$

②μ_k：若當$\theta > \theta_s$時，物體將加速度下滑，此時角度調小為$\theta = \theta_k$，使物體**等速度下滑**，則此時 $mg\sin\theta_k = \mu_k mg\cos\theta_k \Rightarrow \boxed{\mu_k = \tan\theta_k}$



範例一

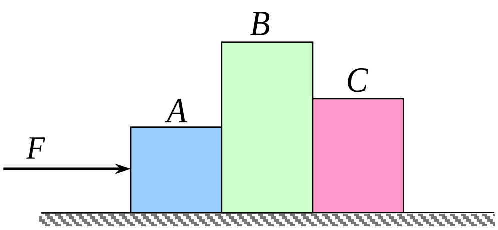
1.水平桌面上有A、B、C三木塊，其重量分別為2 kgw、6 kgw、4 kgw。已知木塊與水平面間的靜摩擦係數皆為0.5，今施一水平推力5 kgw於木塊A上，則

(a)地面與各個木塊間的摩擦力為何？(b)木塊兩兩間的作用力為何？

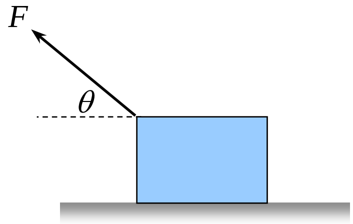
2.如圖所示，以細繩拉重W的物體，繩與水平的夾角為θ，當拉力為F時，物體將要開始運動，則物體與桌面間的靜摩擦係數為？

***Ans*：1. (a) f_A=1 kgw、f_B=3 kgw、f_C=1 kgw (b) N_{AB}=4 kgw、N_{BC}=1 kgw　2.** $\dfrac{F\cos\theta}{W-F\sin\theta}$

1.



2.



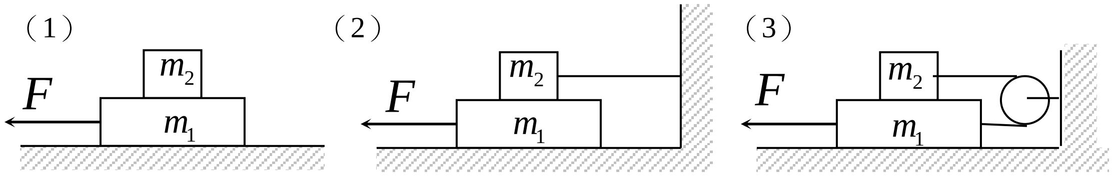
範例二

1. 如圖所示，兩物體之質量各為m_1與m_2，m_1物體均受F之拉力作用，假設各接觸面間之摩擦係數均為μ ，欲使m_1物體移動，在三種情況中，所需之拉力最小為若干？

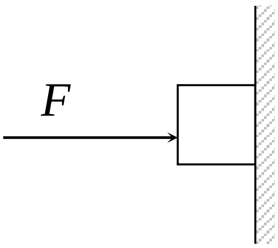
2. 如圖，重量W的物體，靠於鉛直牆上與牆間之靜摩擦係數為 μ_S，今施一水平力F於物體，使物體不滑下，則（A）$F = W$ （B） $W=\mu_S F$（C）牆與物體間之摩擦力為W（D）牆施於物體之淨力為 $F\sqrt{1+\mu_S{}^2}$ （E）若物體與牆無摩擦，則F無論多大均不能平衡。

Ans: 1. *（1）* $\mu(m_1+m_2)g$ *（2）* $\mu\left(m_1+2m_2\right)g$ *（3）* $\mu\left(m_1+3m_2\right)g$ **2.** CE

1.



2.



範例三

1. 將重量為 W 的物體靜置於與水平面成 θ 角的斜面上，當 θ 增至 37 度時，物體恰開始下滑，如圖(a)所示。則物體與斜面間的靜摩擦係數為________。

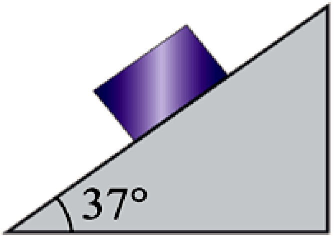
2.如圖一小蟲重量 W，在半徑為 R 之碗壁沿壁上爬，若蟲與碗壁間摩擦係數為 $\sqrt{3}$，則：

（1）此蟲可爬升距碗底之最大鉛直高度為若干？

（2）小蟲達最大高度時碗壁對小蟲之作用力為若干？

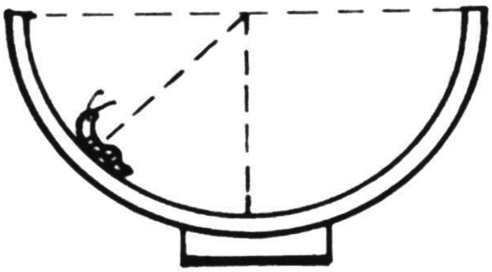
Ans:1.0.75　2.（1）$R/2$（2）W

1.



▲圖 (a)

2.



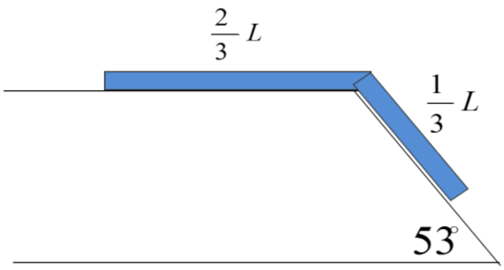
範例四

1.如圖，一均勻柔軟的細繩總長度L，$\frac{2}{3}L$在水平面上，$\frac{1}{3}L$在傾斜角53°的斜面上。若水平面及斜面的靜摩擦係數均為μ，此時細繩恰將下滑，則靜摩擦係數$\mu=$？

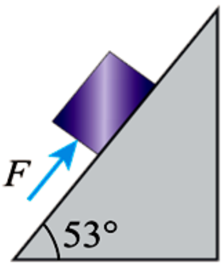
2. 將重量為 W的物體靜置於與水平面成θ角的斜面上，當θ增至 37 度時，物體恰開始下滑，現將 θ 增至 53 度，如圖(b)所示，欲使物體靜止於斜面上，沿斜面所施之力 F，則 F 的最小值為____，最大值為____。

Ans:1. $\frac{1}{4}$　**2.** $\frac{7}{20}W$　$\frac{5}{4}W$

1.



2.



▲圖 (b)

範例五

一梯子上端斜靠鉛直光滑牆面，梯與牆之夾角為θ，梯的下端在水平地面上。梯長為L，其質量不計。重量為W的人，直立於梯下端量起$\frac{L}{3}$處，此系統平衡如圖示，試問：

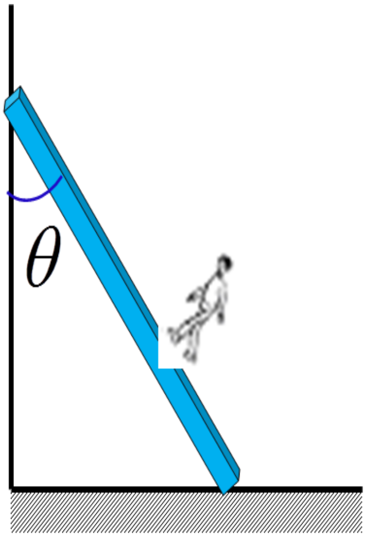
(A) 牆施於梯的力量值為？

(B) 地面施於梯的力量值為？

(C) 地面作用於梯之力的方向與地面所夾的角度的正切值為？

(D) 地面與梯子間的靜摩擦係數至少為何？

Ans： ***(A)*** $\frac{\tan\theta}{3}W$ ***(B)*** $\frac{\sqrt{9+\tan^2\theta}}{3}W$ ***(C)*** $\frac{3}{\tan\theta}$ *(D)* $\frac{\tan\theta}{3}$



範例六

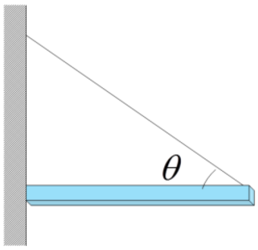
1.圖中均勻長棒的一端垂直頂在一鉛直牆上，另一端以輕繩繫於牆，棒與牆的靜摩擦係數為 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，欲使棒保持水平，繩與棒夾角 θ 的最大值為何？

2.一梯長15 m、重45 kgw，靠在牆和地面上，其頂端離地面*h=12m*，梯子的重心與其底端距離為4 m；若牆面光滑，一重75 kgw的消防隊員立於梯子6 m處(沿梯自下端量起)成平衡狀態，試問：（*a*）梯子和牆面及地面的作用力各為若干？

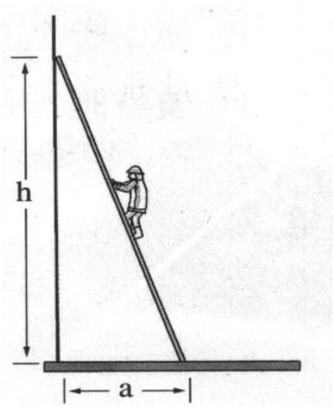
（*b*）若梯子與地面間的靜摩擦係數為 0.5，則此消防隊員最高可爬到哪裏？

Ans*：*1.* *30°　　***2.***(*a*)$N_{地}$=120 kgw、$N_{牆}$=31.5 kgw (b)18/5

1.



2.



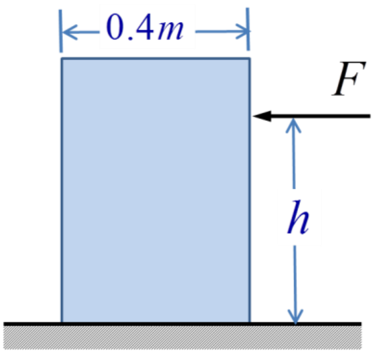
範例七

1.如圖，一木箱置於水平面上，已知木箱重60公斤重，箱與地面間的靜摩擦係數為0.2。今施一水平力推此木箱，木箱恰要同時發生移動與翻倒現象，試問：
(A)地面對木箱的正向力量值為？ (B)地面的摩擦力量值為？
(C)水平力的量值為？ (D) P點離地的高度為？

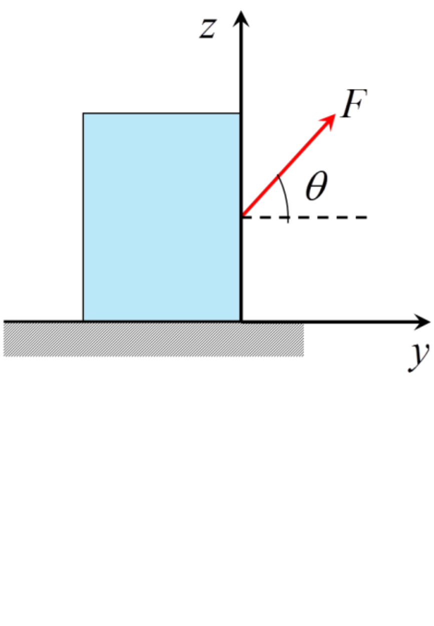
2.水平桌面上有一邊長為 L 的正立方體，今在此立方體的某垂直面($x-z$ 平面)的正中央繫一繩，以此繩拉立方體，繩在 $y-z$ 平面且與水平的 y 方向成 θ 角，如圖所示。當拉力 F 逐漸增大時，發現在立方體開始滑動的同時，亦開始以 x 軸為轉軸發生轉動。設桌面與立方體間的靜摩擦係數為 μ_s，則 μ_s 之值為？

Ans*：*1. (A) 60公斤重 (B) 12公斤重 (C) 12公斤重 (D) 1.0公尺 ***2.*** $\dfrac{1}{1-\tan\theta}$

1. **【提示】$\boxed{\text{恰轉動：正向力通過轉軸。}}$**



2.



第四章 牛頓運動定律

4-1 慣性與牛頓第一運動定律　4-2 牛頓第二運動定律　4-3牛頓第三運動定律

一、牛頓三大運動定律：

（1）牛頓第一運動定律：（慣性定律）

物體不受外力作用或合外力0時，靜者恆靜、動者恆沿直線作等速度運動。

（2）牛頓第二運動定律：

物體受外力作用時，必沿力的方向產生加速度，此加速度的大小與力的大小成正比，與質量的大小成反比。

《公式》：$\boxed{\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}}$

$\sum \overrightarrow{F}$ ：代表外力的合力，其單位為牛頓（N）

m ：表示研究對象（加速度相同的系統）的質量，單位為公斤（kg）

a ：表示研究對象（系統）的加速度，單位為公尺/秒^2 [m/s^2]

（3）牛頓第三運動定律：（作用與反作用）

物體間的作用力和反作用力，總是大小相等、方向相反、作用在一條直線上。

①作用力與反作用力分別作用在不同的物體上，其效果不能抵消。

②作用力與反作用力是同性質的力。

③作用力與反作用力，同時發生，同時結束。

《討論》

1. **慣性**：物體不論在運動或靜止，均有維持其原有狀態的特性

※ 慣性的大小＝物體質量大小。

【實例】①自由落體著地點，會在原鉛直線下的稍偏東方處。

②向東或向西跳遠的距離相等。

2. **慣性座標系**：滿足牛頓第一運動定律的座標系。

以靜止或等速度運動的觀察者為原點所定義的參考座標系

【加速度為零的參考座標系】

※ 牛頓第一運動定律的意義在於對慣性座標系下定義。

3. **牛頓運動定律**只適用於慣性座標系。慣性座標系為牛頓第一運動定律能成立的座 標系。一般的題目中，取靜止於地面上的座標系為慣性座標系。

※ 在非慣性座標系中，需加入假想力（虛設力）（非真實的超距力與接觸力）的概念。

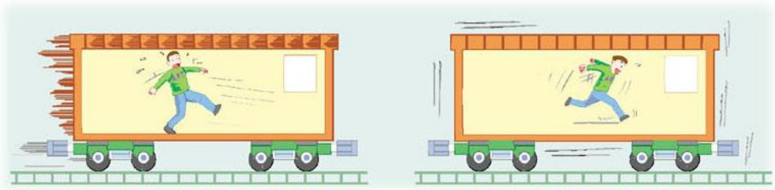


圖 4－5　(a)車子突然前進，人因慣性而向後仰；
(b)車子突然煞車，人因慣性而向前衝。

4. 力的單位：

(1) 絕對單位：牛頓（N）＝使1公斤物體產生1m/s^2加速度的力（由$F=ma$）。

(2) 重力單位：公斤重（kgw）＝1公斤的物體在重力加速度g=9.8m/s^2下的重量。

（由$W=mg$ ∴ $1kgw=1kg\times 9.8m/s=9.8N$）。

5. 重量和質量的比較 ：

(1) 質量m：物體慣性的大小，由天平測量（比較值），以公斤kg為單位。

重量W：物體所受的萬有引力，由彈簧秤測量，以公斤重kgw或N為單位。

(2) 質量與重量的關係：$\boxed{W=mg}$。

二、牛頓第二運動定律的解法：

（1）確定受力物（確定m）

（2）畫受力圖與加速度（確定F，a）：

重力、彈力、張力、正向力、摩擦力、浮力等。

若為加速坐標系，則需加入假想力。

（3）列出運動方程式 $\begin{cases}\text{沿加速度方向}:\sum\vec{F}=m\vec{a}\\ \text{沿垂直加速度方向}:\text{合力}=0\end{cases}$

（4）由方程式解未知數

範例一

1.如圖，*A*、*B*為相同兩繩，*W*為物體重量，用手拉*B*繩，則：

(*a*)力量逐漸加大，則何繩先斷 (b)用手猛拉B繩，則何繩先斷？

2.在北半球的長程大砲往正北方目標發射，則砲彈落地時會落於何方？

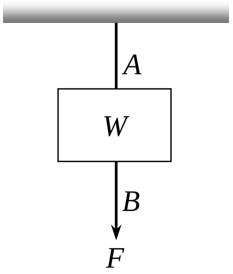
3.在等速運動的火車中，向後水平拋射一物體，試問

（1）由站在車外地面上的人來看，其運動軌跡可能為？

（2）由站在車內地面上的人來看，其運動軌跡可能為？

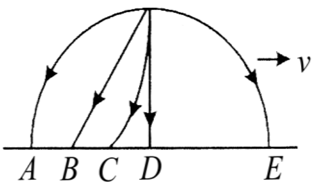
Ans: 1.(a)A繩 (b)B繩　2.東方　3.(1)ADE(2)A

1.



2.

3.



範例二

1. 一質量 4 公斤的物體，原以 8m/s 的速度向東運動，若施以向西偏北 37°，10N 的作用力，，則該物體受力 (1) 2 秒後其速度多少？(2) 2 秒內的位移多少？

2. 熱氣球載有沙包2包時，以加速度$2a$上升；載有沙包8包時，則以加速度a下降。

若不計氣球本身的重量及沙包的浮力，而欲使熱氣球以 $\frac{1}{3}g$ 的加速度上升時，應載沙包幾包？

Ans: 1. (1)5m/s (2) $\sqrt{153}m$ ***2.3***

範例三

1.一人（質量*60kg*）沿著繩子（質量*5kg*）上爬，繩子掛在秤下，如圖所示。

（*a*）當人以等速上爬時，秤的讀數為何？

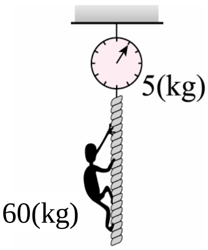
（b）當人以加速度$1m/s^2$上爬時，秤的讀數為何？($g=10m/s^2$)

2.某人重*980*牛頓，此人緣繩下滑，若繩僅能負擔*755*牛頓之重量，此人下滑最小加速度若干，繩不致斷裂？

3.猴子質量*4kg*、物體質量*5kg*，重力加速度$10m/s^2$，若猴子以等加速度$5m/s^2$，沿繩子向上爬，試問：（1）此段期間內物體的加速度為？（2）猴子應做何種運動可使物體保持靜止？

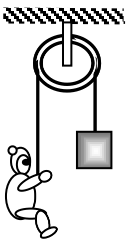
Ans:1.(a)650N(b)710N　　2. 2.25 m/s^2　***3.（1）向上2*** m/s^2***等加速度運動（2）向上2.5***m/s^2***等加速度運動***

1.



2.

3.



範例四

1. 圖不計滑輪的質量與摩擦力，重力加速度$g = 10$ m / s ^{2}，質量*60* kg的人站在質量*30* kg的平臺上，整個系統向上運動，則（A）當人以等速度*2* m / s運動時，人必須施力？

（B）當系統以加速度2 m / s^{2}運動，則人必須施力？

（C）人所受的淨力為？

2. 一人質量*60 kg*站在一質量*30 kg*之平臺上，垂直拉下一繞過滑輪之繩索，設滑輪及繩索之摩擦與質量可略去不計，則（g=9.8m/s^{2}）

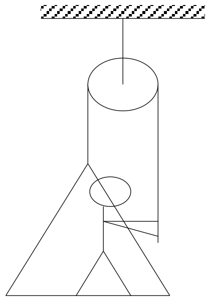
（A）此人至少要施力多少kgw始能將平臺拉起？

（B）若人施力*50 kgw*拉平臺，則平臺上升之加速度為？

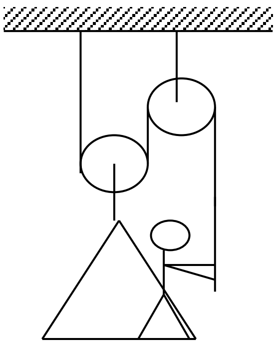
（C）承上題，人與平臺間之作用力為多少牛頓？

Ans:1. (A) 45 kgw(B) 54 kgw (C) 120 N　2.(A) 30 kgw (B) 6.5m/s^{2} (C) 488　牛頓

1.



2.



範例五

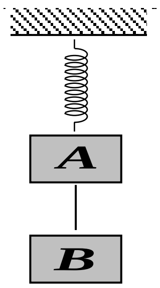
1.彈簧尾端繫有一物體在水平面上運動，當其伸長量變小時：(A)加速度量值變小 (B)加速度量值變大 (C)速度量值變小 (D)速度量值變大 (E)以上皆不能確定。

2.如圖，兩物體A、B的質量均為*2kg*，彈簧質量不計，彈力常數*200N/m*，重力加速度$g = 10$ m/s^2，將A、B間細繩剪斷的瞬間，試求：(1)A的加速度？(2)B的加速度？

Ans:1.AD 2.(1)10m/s²向上(2)10m/s²向下

1.

2.



範例六

1.如圖所示，F_1為手拉繩子之力， F_2 為繩子拉物體之力，F_3為繩子作用於手之力，F_4為物體作用於繩子之力。試問(*a*)F_1的反作用力為? (b)F_4的反作用力為?
(c)繩子若處於靜止平衡時，則其受哪兩力而平衡?

2.質量為65 kg及80 kg的甲、乙兩人，鉛直向上施力的最大值為50 kgw及60 kgw重，今兩人站立在各自獨立的兩磅秤上，同時盡力欲將對方舉起，則：

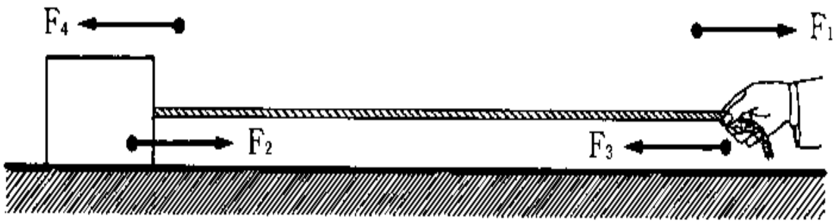
(*a*)甲在磅秤上呈現的視重為?

(b)若兩人改為站立在同一大磅秤上，當兩人同時盡力互舉對方的瞬間，大磅秤上呈現的視重為?

3.A、B兩人立於冰上，質量各為100 kg及40 kg，若A之推力為100 N，B為200 N，二人互推，則A、B之加速度各為?

Ans: 1. **(a)F_3 (b)F_2 (c)F_1與F_4** ***2.*** **(a)55 kgw (b)145 kgw** ***3.*****3 m/s^2，7.5 m/s^2**

1.

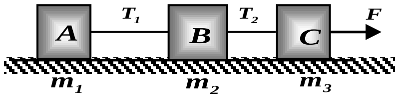


牛頓第二運動定律的應用

一、連體運動：

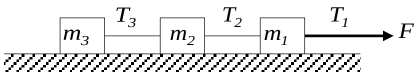
1.先求系統的加速度（系統中每一物體加速度相同）。
2.再隔離受力物，以 $F = ma$ 解。

圖中，施一定力F於C，桌面光滑，A、B、C 物體質量各為 m_1、m_2、m_3，則繩張力比 $\boxed{T_1 : T_2 = m_1 : m_1 + m_2}$



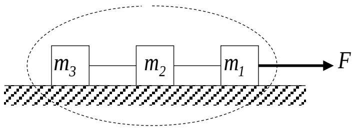
【說明】

如圖所示，光滑地面上三物體受外力F向右拉動



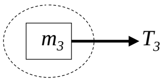
（1）取大系統（$m_1 + m_2 + m_3$）

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

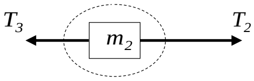


（2）取小系統

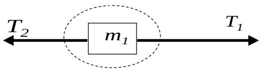
對m_3而言 $\Rightarrow$ $T_3 = m_3 a$



對m_2而言 $\Rightarrow$ $T_2 - T_3 = m_2 a$



對m_1而言 $\Rightarrow$ $T_1 - T_2 = m_1 a$



（3）聯立解得$T_1 = F$，$T_2 = \dfrac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F$ ，$T_3 = \dfrac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F$

範例一

1.如圖所示，光滑水平面上有兩個並排的木塊，其質量各為2 kg、4 kg，將水平定力F從右邊作用於木塊時（F指向左），兩木塊間的作用力為F_R，將水平定力F改從左邊作用於木塊時（F指向右），兩木塊間的作用力為F_L，則F_R：F_L之比為何？

2.承上題，若兩木塊與地面之間的動摩擦係數μ＝0.2，且F力可以推動兩木塊，則F_R：F_L之比為何？

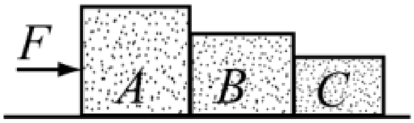
3.不計摩擦力，以一力F水平推物體A，A、B兩物體間的作用力為T_1，而B、C兩物體間的作用力為T_2，若m_A：m_B：m_C＝3：2：1，則T_1和T_2之比為？

Ans:1. 2：4　2. 2：4　3.3：1

1.

2.

3.



範例二

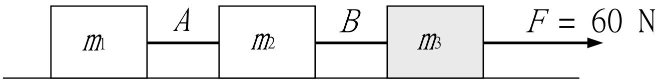
1.右圖中，m_1=2 kg、m_2= 3 kg、m_3 = 5 kg，以60 N的力拉此系統，地板光滑，*A*、*B*兩繩重量不計，則施力後：(*a*) 加速度=？(b) *B*繩的張力=？(c) *A*繩的張力=？

2.圖所示，甲、乙兩木塊置於光的水平面上，以繩連接，在甲木塊上拖依水平方向之力*F*。若甲、乙兩木塊的質量分別為*1 kg*、*3kg*，繩重為*2 kgw*，施力為*12 kgw*，重力加速度g =10 m/s^2。則 (*a*) *a*、*b*兩點張力相差若干？

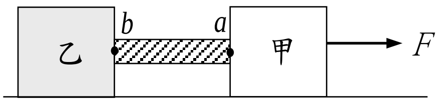
(*b*) 若以相同之力*F*將此連結體鉛直上提，則*a*點張力為若干*kgw*？

Ans: 1. (a)6 m/s^2 (b)30 N (c)12 N　2. (a)40 N (b)100 N

1.



2.



範例三

1. 圖為均勻細繩長*40* cm，靜置於光滑水平桌面上，有*10* cm垂下，用手固定；若繩重*4* kg，當放手後，至下垂部分長*30* cm之瞬間，繩子中點(離底端*20* cm)處之張力為？(g = *10* m/s^2)

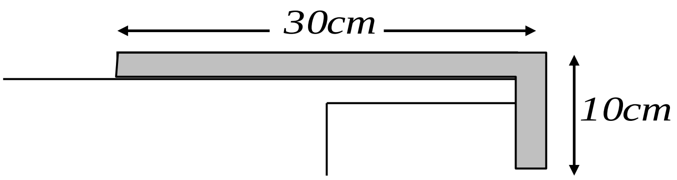
2. 圖表示一木塊置於水平桌面上，木塊質量m＝5公斤，施力F＝25牛頓，且$\vec{F}$與水平成53°仰角。木塊與桌面間的靜摩擦係數μ_s＝0.8、動摩擦係數μ_s＝0.5，則（設重力加速度g＝10公尺/秒^2）

(1) 當F=*25*牛頓時，桌面施於木塊的正向力＝______牛頓。木塊所受的摩擦力＝____牛頓。

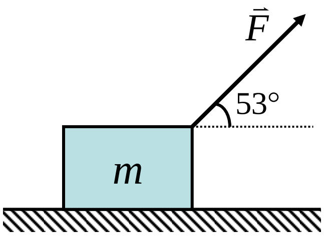
(2) 若施力F增為50牛頓，則木塊所受的摩擦力＝______牛頓，加速度＝_____m/s^2。

Ans：1. 5 N　2. (1)30，15　(2)5，5

1.



2.



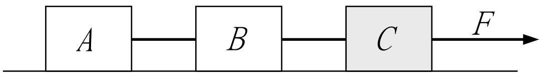
範例四

1.水平桌面有三個物體A、B、C， 其質量分別分別為$1\ kg$、$2\ kg$、 $3\ kg$、已知物體與桌面之靜摩擦係數均為0.6，動摩擦係數均為0.4，另重力加速度為$10\ m/s^2$，今施力F於C物體上，則 (A) 當$F=32\ N$時，B與地面之摩擦力為？
(B) 當$F=32\ N$時，B、C間之繩子張力為？ (C) 當$F=32\ N$時，A物體之摩擦力為？
(D) 當$F=54\ N$時，A、B間之繩子張力為？ (E) 當$F=54\ N$時，B所受之合力為？

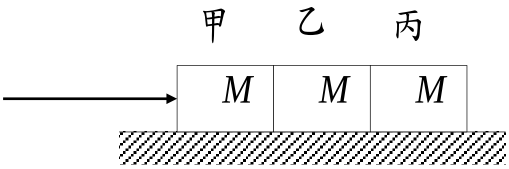
2.甲、乙、丙三物體質量均為M，並以一水平力F 施於甲物體，如圖所示。設甲、丙兩物體與桌面之摩擦可忽略，而乙物體與桌面之靜摩擦係數為0.7，動摩擦係數為0.6，則：
（A）當$F = 0.5\ Mg$時，甲物體施於乙物體之力為？
（B）當$F = 0.5\ Mg$時，乙物體施於丙物體之力為？
（C）當$F = 3\ Mg$時，甲物體施於乙物體之力為？
（D）當$F = 3\ Mg$時，乙物體施於丙物體之力為？

Ans:1.(A)12N(B)14N(C)2N(D)9N(E)10N 2.(A）0.5 Mg(B)0(C)2.2 Mg(D)0.8 Mg。

1.



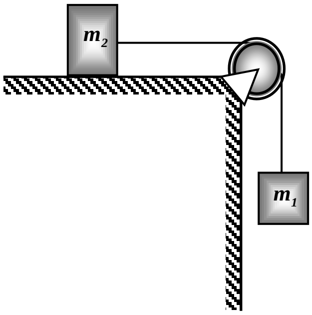
2.



單元二：牛頓第二運動定律的應用

一、阿特午機與滑輪組

1 定滑輪（1）



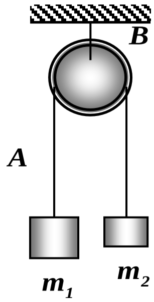
如右圖，重力加速度g，桌面光滑，兩物質量各為m_1、m_2，繩子質量不計，試求：

(1) 若繩子質量不計，則同一條繩子各點的張力皆 相同 。

(2) m_1、m_2的加速度 $\boldsymbol{a=\dfrac{m_1 g}{m_1+m_2}}$

(3) 繩子張力 $\boldsymbol{T=\dfrac{m_1 m_2 g}{m_1+m_2}}$

2 定滑輪（2）：阿特武德機



如右圖，重力加速度g，兩懸吊物質量各為m_1、m_2（$m_1>m_2$），繩子質量不計，試求：

（1）m_1的加速度 $\boldsymbol{a_1=\dfrac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}(\downarrow)}$

（2）m_2的加速度 $\boldsymbol{a_2=\dfrac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}(\uparrow)}$

（3）A繩子所受的張力 $\boldsymbol{T=\dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1+m_2}}$

（4）B繩子所受的張力 $\boldsymbol{2T=\dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1+m_2}}$

3 滑輪組

如右圖，重力加速度g，若定滑輪與繩子質量不計，$m_1 > 2m_2$，試求：

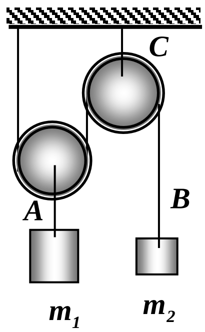
(1) 動滑輪上物體m_1和物體m_2加速度關係：$\boxed{2a_1 = a_2}$

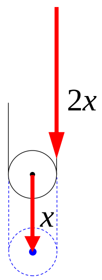
(2) A繩與B繩張力關係：$\boxed{T_1 = 2T_2}$

(3)①m_1的加速度 $a_1 = \dfrac{(m_1 - 2m_2)g}{m_1 + 4m_2}(\downarrow)$ ②m_2的加速度 $a_2 = 2\dfrac{(m_1 - 2m_2)g}{m_1 + 4m_2}(\uparrow)$

③A繩的張力為 $T_1 = \dfrac{6m_1m_2g}{m_1 + 4m_2}$ ④B繩的張力為 $T_2 = \dfrac{3m_1m_2g}{m_1 + 4m_2}$

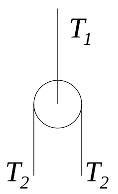
（4）C繩的張力為 $2T_2 = \dfrac{6m_1m_2g}{m_1 + 4m_2}$

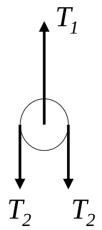




【討論】

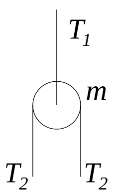
（1）若滑輪質量不計

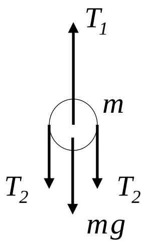




$T_1 = 2T_2$

（2）若滑輪質量為m





(1)$T_1 > 2T_2 + mg \Rightarrow T_1 - 2T_2 - mg = ma \uparrow$

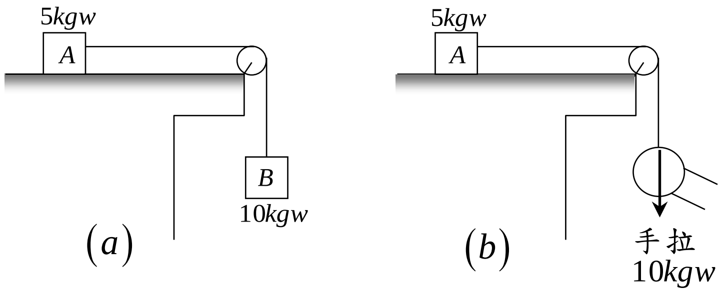
(2)$T_1 = 2T_2 + mg$滑輪靜止

(3)$T_1 < 2T_2 + mg \Rightarrow 2T_2 + mg - T_1 = ma \downarrow$

範例一

1. 如圖(*a*)與(b)，物體*A*的加速度分別為 a_1 及 a_2 ，若不計繩重及各阻力，則 $a_1 / a_2 = ?$
2. 甲、乙兩物體的質量各為*1.0 kg* 和*4.0 kg*，以細繩連接，跨過質量可不計的滑輪，置於兩個斜角均為30° 的光滑長斜面上，如右圖所示。若兩物體自靜止釋放，
（1）加速度大小（2）經過*1.0 s*，乙物體沿斜面移動多少？（設重力加速度為*10 m／s²*）
Ans:1. $\frac{1}{3}$ **2.（1）*3.0m／s²*（2）*1.5m***

1.



2.

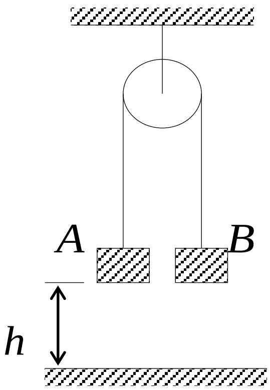
範例二

1. 圖所示，有兩質量分別為*5kg*及*3kg*之物體*A*、*B*跨過一定滑輪，且兩者均由距地高$h=8m$處釋放，（1）當A未著地前固定定滑輪與天花板的繩子張力為何？
（2）當*A*著地後*B*可上升之最大高度距地高若干？（設重力加速度為$10\ m/s^2$）

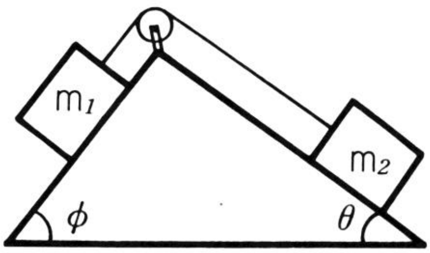
2. 兩木塊質量m_1及m_2分別為100 kg及50 kg，以細繩相連，細繩跨過無摩擦的滑輪，兩木塊可分別在 斜角為$\phi=37^\circ$及$\theta=53^\circ$的斜面上滑動，若斜面與木塊間的動摩擦係數為0.1(假設可滑動)，試求： (*a*)木塊的加速度大小？ (b)細繩中的張力？

Ans: 1. (1) 75N (2) 18m 2. (a) $\frac{3}{5}$ ***m/s²(b)460N***

1.



2.



範例三

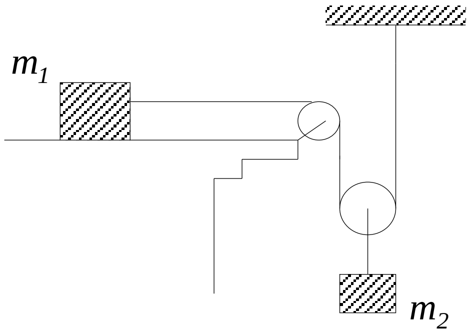
1. 兩物質量分別為m_1與m_2，若不計摩擦及滑輪重，求：

(1)物體m_1及m_2之加速度。(2)物體m_1之右端繩子的張力。（重力加速度g）

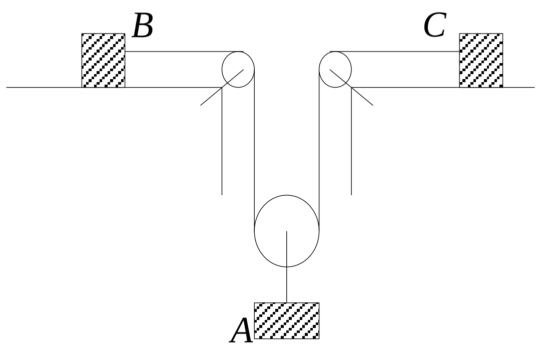
2. A、B、C之質量分別為$3kg$，$2kg$，$1kg$（動滑輪及繩重不計），求三物體之加速度？（重力加速度g）

Ans:1. $a_1=\dfrac{2m_2}{4m_1+m_2}g$ $a_2=\dfrac{m_2}{4m_1+m_2}g$ $T=\dfrac{2m_1m_2}{4m_1+m_2}g$ **2.** $a_A=\dfrac{9}{17}g\downarrow$，$a_B=\dfrac{6}{17}g\rightarrow$，$a_C=\dfrac{12}{17}g\leftarrow$

1.



2.



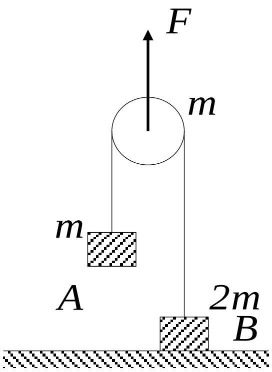
範例四

1. 圖示，滑輪及*A*物體質量均為*m*，而*B*物體質量為2*m*，施一力*F*使滑輪加速上升，而*B*仍著地不動，則*F*的最大值為何？（重力加速度g）

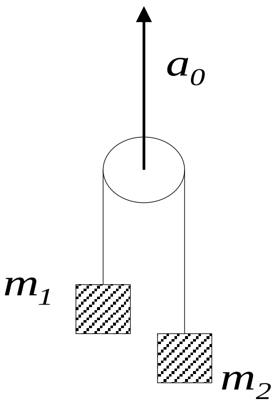
2. 圖示，一滑輪（質量不計），且無摩擦，質量極輕微之細繩跨於輪上，兩端分別繫以$m_1 = 2$ kg及$m_2 = 3$ kg兩物體。整個系統以$a_0 = 3$ m/s^{2}向上作等加速度運動，則（1）m_1與m_2之加速度？（2）繩之張力？（g=10m/s^2）

Ans:1. 5.5mg　　2.（1）$a_1 = 5.6$ m/s^2，$a_2 = 0.4$ m/s^2（2）31.2 N

1.



2.



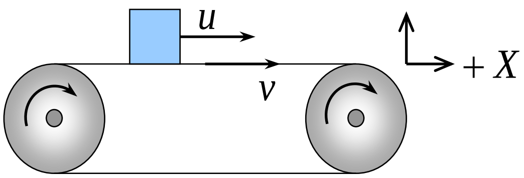
範例五

1. 一水平傳送帶恆以等速度v，沿+X方向移動，將一質量為m的箱子以水平速度u=0，置於傳送帶上，如圖所示，若箱子與傳送帶間的靜摩擦係數為 μ_s ，動摩擦係數為 μ_k ，重力加速度為g，則：(a)在時刻t = 0，箱子所受的淨力？
(b)當箱子的速度等於傳送帶的速度時，箱子所受的摩擦力為何？
(c)需經過多少時間，箱子的速度會等於傳送帶的速度？

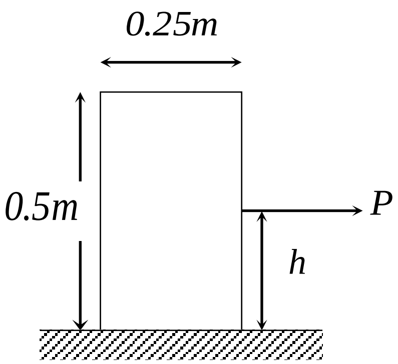
2. 如圖所示，有一水平力P，將一個高$0.5\ m$，寬$0.25\ m$的方形物體，以等速率拖向水平面的右方。若滑動摩擦係數是0.4，物體重$25\ N$且重心在其中心點上。試求：
(1) P的大小。(2) 若$h = 0.125\ m$，則水平面施於物體的正向力N的作用線的位置如何？
(3) 能使物體傾倒的h是多大？

Ans: 1. (a) $\mu_k mg$ ***(+X)　(b)0　(c)*** $\dfrac{v}{\mu_k g}$　***2.***

1.



2.



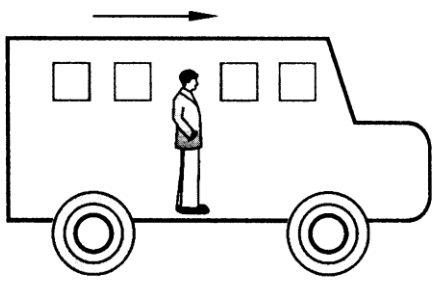
範例一

1. 曾同學站在行駛中的車內，當煞車時，他的身體會向前傾。依據右圖，下列哪一項是造成曾同學身體向前傾的主要理由？　(A)車輪給曾同學一向前的力　(B)車內空氣給曾同學一向前的力　(C)車的地板給曾同學一向後的摩擦力　(D)車在煞車時，改變了曾同學重力的方向。

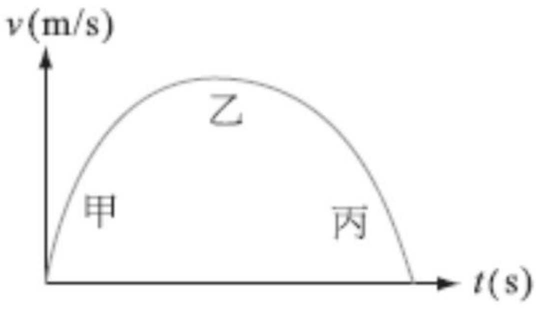
2 小明靜止站立於磅秤上量體重時，磅秤的讀數為W，在時刻$t=0$時，他開始曲腿下蹲。若以垂直向下為速度的正方向，他的質心速度v隨時間t的變化如圖所示，其中乙點代表最大速度，則下列敘述，何者正確？　(A)在甲點時，磅秤的讀數小於W　(B)在甲點時，磅秤的讀數大於W　(C)在乙點時，磅秤的讀數小於W　(D)在乙點時，磅秤的讀數大於W　(E)在丙點時，磅秤的讀數小於W。

Ans:1.C 2.A

1.



2.



範例二

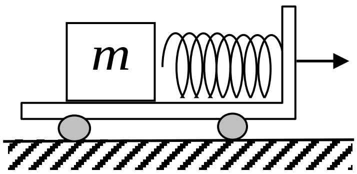
1. 質量m的物體懸掛於鉛直輕質彈簧的下端，伸長量為x，今將此裝置 放置在底面光滑的台車上，如附圖所示，若台車以$\frac{1}{2}$g的等加速度向右加速運動，則彈簧的形變量為？

2一彈簧秤懸吊於一電梯之天花板下，當電梯以向上$\frac{1}{3}g$之等加速度垂直上升時，彈簧秤之伸長量為*s*，則當電梯以向下$\frac{1}{3}g$之等加速度垂直下降時，彈簧之伸長量為？

3. 在車上之天花板繫一線，線下端懸一質量為*m*之小球，當車加速度前進時，懸線與鉛直成*30* °角，求車之加速度及繩線之張力。

Ans:1.*伸長*$\frac{1}{2}$x　2. $\frac{s}{2}$　**3.** $\frac{g}{\sqrt{3}}$ ，$\frac{2mg}{\sqrt{3}}$

1.



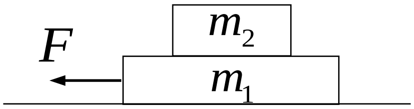
範例三

1.質量m_1、m_2的兩物堆疊置於光滑水平面上，已知兩物間的最大靜摩擦係數為μ_s，動摩擦係數為μ_k，今以水平力F拉動m_1，若欲使兩物不相對滑動，試求：在圖(1)(2)最大水平力各為何？(重力加速度g)

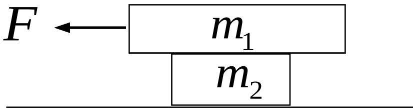
2.兩個物體質量分別為M、m，放置如圖，若M與地面無摩擦，M與m間動摩擦係數μ_k，靜摩擦係數μ_s，則使m緊貼M最小力為F為？

Ans: 1. 圖(1)$(m_1+m_2)\mu_s g$ 圖(2)$(m_1+m_2)\mu_s\left(\frac{m_2}{m_1}\right)g$ **2.** $\frac{(M+m)}{\mu s}g$

1.

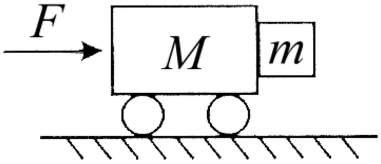


圖(1)



圖(2)

2.



【補充概念】加速座標系與假想力：

1. 加速座標系：觀察者有加速度。

2.（慣性）假想力：在加速坐標系內才有。

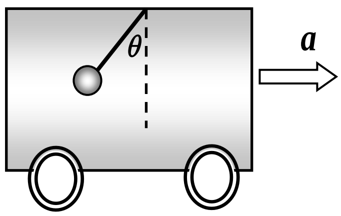
（1）定義：為了使加速座標系中觀察到的物體運動也能遵守牛頓第二運動定律，而創造出來的<u>**虛擬力**</u>，<u>**方向與加速度相反**</u>。

（2）公式：假想力＝－(被觀測物的質量)×(觀測者的加速度)→ **假想力**$\boxed{F=-ma}$。

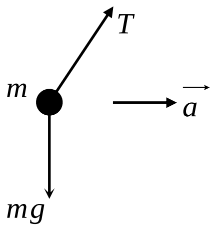
3.【應用】加速車廂中擺錘的運動：

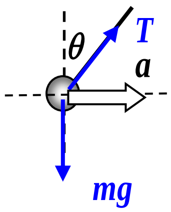
設一車子以加速度a前進，重力加速度g，擺錘質量m，當車中懸掛的擺錘達穩定時，試問：(1)擺錘繩子與鉛直線夾角的正切值？_________

(2)擺錘繩子張力？_____________



[解一]在車外，慣性坐標系來看：





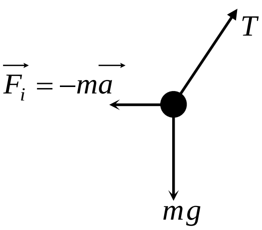
在車外觀察者，擺錘與車廂同以加速度a前進

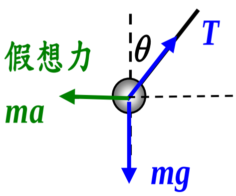
$$\text{擺錘:}\begin{cases}\text{水平:}\left(\sum F=ma\right)T\sin\theta=ma....(1)\\ \text{鉛直:}\left(\sum F=0\right)T\cos\theta=mg....(2)\end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}:\tan\theta=\frac{a}{g}$$

$$(1)^2+(2)^2:T=m\sqrt{a^2+g^2}$$

[解二]在車內，加速坐標系來看：





在車外觀察者，擺錘靜止

$$\text{擺錘：合力}=0\begin{cases}\text{水平:}T\sin\theta=ma....(1)\\ \text{鉛直:}T\cos\theta=mg....(2)\end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}:\tan\theta=\frac{a}{g}$$

$$(1)^2+(2)^2:T=m\sqrt{a^2+g^2}$$

4.視重：物體與磅秤間的正向力N。

質量為m的人站在磅秤上，而磅秤在升降梯中的地板上：

當升降機作如下所述之運動時，磅秤的指數N各為：

（1）靜止：$N = mg$

（2）等速度v上升或下降：$N = mg$

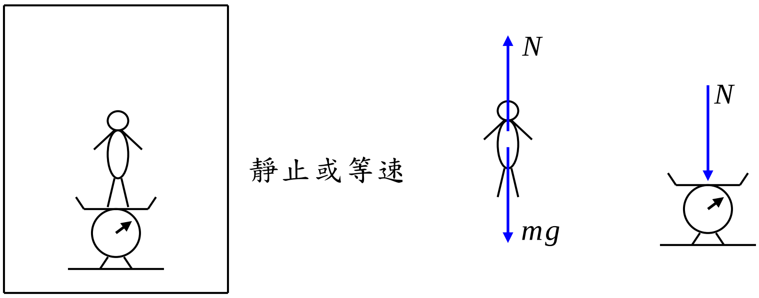
（3）等加速度a上升：$N = m(g + a)$

（4）等加速度a下降：$N = m(g - a)$

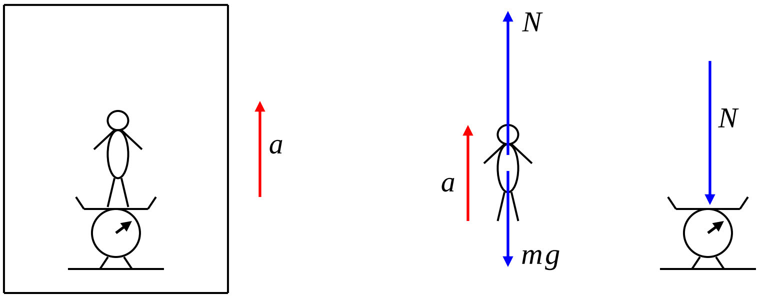
（5）繩索斷裂：$N = 0$

《討論》當升降梯以加速度a上升時，人感受到的重力加速度為$(g + a)$

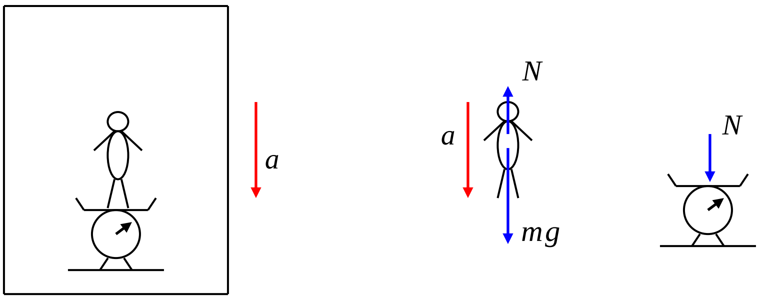
當升降梯以加速度a下降時，人感受到的重力加速度為$(g - a)$



$$N = mg$$



$$N - mg = ma$$
$$N = m(g + a)$$

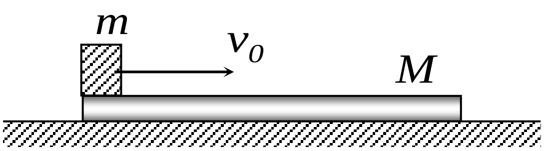


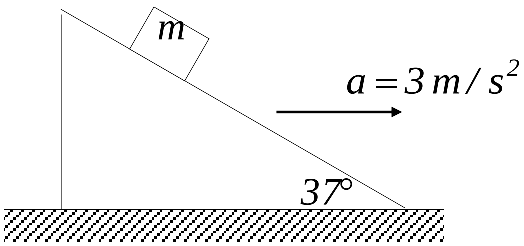
$$mg - N = ma$$
$$N = m(g - a)$$

範例四[挑戰]

1.光滑平面上，質量M的靜止木板上，有一木塊以初速v_0向右衝出，如下圖所示。
已知木塊質量為m，木板與木塊間的動摩擦係數為μ，試問：
（1）若M夠長m不會離開M，則當木塊與木板移動的速度相同時木塊的末速為？
（2）若忽略m的長度，則M至少要多長m才不會離開M？
2.質量10公斤的物體置於三角形塊的斜面上，三角形塊以3公尺／秒^{2}之加速度向右前進，如圖。則 (1) 欲使物體不沿斜面滑動，物體與斜面間的摩擦力？
(2) 此時最小的靜摩擦係數μ_s應為？（$g=10$ m/s^2）

Ans: 1.（1）$\dfrac{mv_0}{M+m}$　（2）$\dfrac{1}{2}\dfrac{M}{M+m}\dfrac{v_0^{\,2}}{\mu g}$　**2.（1）36 *N*（2）**$\dfrac{18}{49}$



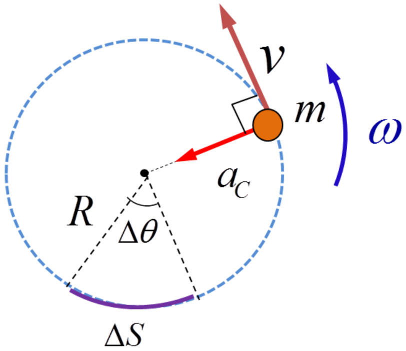


第五章　週期性運動

5-1 等速率圓周運動

一、等速率圓周運動：（平面運動） 等角速度圓周運動、變速度、變加速度運動

相關物理量：質點以等速率v，半徑R，作週期T，頻率f 之圓周運動



（1）角位移$\Delta\theta$： 角位移$\Delta\theta = \dfrac{路徑長\Delta S}{半徑R}$，單位為弳或弧度（$rad$ ）。

路徑長（弧長）$\Delta S = R\,\Delta\theta$

轉一圈的角位移 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi = 360°$

（2）角速度ω：（描述物體轉動快慢的物理量）單位時間內質點轉過圓心角。

① $\boxed{\begin{cases} 平均角速度\ \bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ 瞬時角速度\ \omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \end{cases}}$（單位：弳秒，$rad/s$）

② 等速率圓周運動為等角速度轉動（平均角速度＝瞬時角速度）：

$\boxed{\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f}$ 【角速度，又稱角頻率】

註　轉/分(rpm)　　轉/秒(rps)

（3）速率v：$\boxed{v = R\omega}$

[說明] $v = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = R\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$

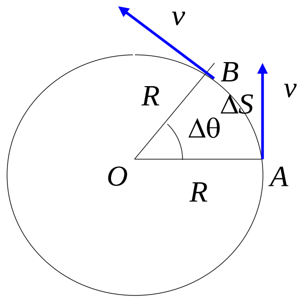
（瞬時）速度：大小＝ v，方向**切線**

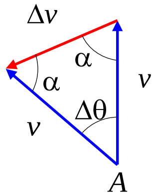
（4）週期T：$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi R}{v}}$　　＊ $\left.\begin{array}{l} 週期T：每轉T秒 \\ 頻率f：每秒f轉 \end{array}\right\}\ T = \dfrac{1}{f}$

（5）向心加速度a_C：（等速率圓周運動的瞬時加速度）

瞬時加速度＝向心加速度 $\boxed{a_C=\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2=\dfrac{4\pi^2R}{T^2}=\dfrac{2\pi v}{T}}$ 【方向恆指向<u>圓心</u>】

《說明》$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\begin{cases}大小：a_c=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}=v\cdot\omega=\begin{cases}\omega^2R\\ \dfrac{v^2}{R}\end{cases}\xrightarrow{等速率圓周運動}=\begin{cases}\dfrac{2\pi\cdot v}{T}\\ \dfrac{4\pi^2R}{T^2}\end{cases}\\ 方向：當\Delta\theta\to 0時，\alpha\to 90°，即\ \vec{a_c}\perp\vec{v}\ (指向圓心)\end{cases}$

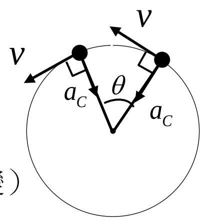


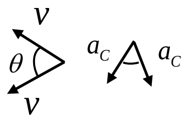


當$\Delta t\to 0$時，Δv可視為以v為半徑的小圓弧對應的圓心角為$\Delta\theta$

$*$ 等速率$\Rightarrow\begin{Bmatrix}無切線加速度\\ 只有法線加速度\end{Bmatrix}\Rightarrow$加速度指向圓心(向心加速度)

《性質》：等速率圓周運動的性質





①變速度運動（速度大小不變、但方向改變）

②變加速度運動 （加速度大小不變、但方向改變）

③只有法線加速度、無切線加速度

④當質點轉過θ角，則速度與加速度的方向均轉θ角。

二、向心力F_C：

（1）定義：作等速率圓周運動的物體必受一<u>**指向軌道圓心的**</u>**<u>合力</u>**，

此<u>合力</u>稱為<u>向心力</u>。

（2）公式：$\boxed{等速率圓周運動牛二：\sum F=F_C=ma_C}$

（3）$\boxed{F_C=ma_C=m\dfrac{v^2}{R}=mR\omega^2=m\dfrac{4\pi^2R}{T^2}=m\dfrac{2\pi v}{T}}$

註：①向心力並不是另有一力，而是作用在物體上，所有外力指向圓心的<u>合力</u>。

②**【補充】**離心力：隨*物*一起圓周運動的觀察者（加速坐標系），見*物*靜止不動，處於平衡狀態。故必有一假想力抵消向心力，此假想力的大小等於向心力但方向相反，故稱為「離心力」。$\overrightarrow{F_{離心力}}=-m\overrightarrow{a_c}$（離心力是加速座標系上的觀察者所感覺的一種假想力）

三、常見等速率圓周運動的問題：

等速率圓周運動計算概念：	$\begin{cases}\text{圓軌道面方向(沿半徑指向圓心)：合力}\sum F=ma_C\\ \text{垂直圓軌道面方向：合力}=0\end{cases}$

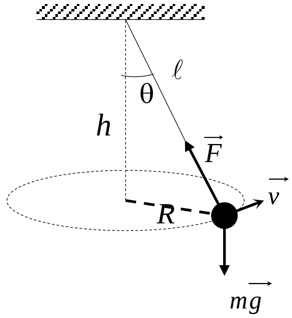
1. 錐動擺

如圖所示為一錐動擺，擺錘在水平面上作等速率圓周運動，擺線長 ℓ，擺角 θ，

（1）擺錘受兩個外力重力 $m\vec{g}$ 與張力 $\vec{F}$ 作用。

（2）迴轉半徑 $R=\ell\sin\theta$

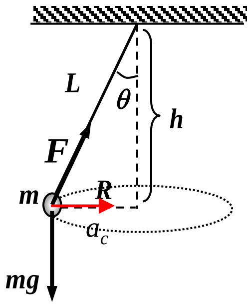
（3）$\begin{cases}\text{水平方向(等速率圓周運動)}: F\cdot\sin\theta=m\cdot a_c=m\omega^2R=m\cdot\dfrac{v^2}{R}=m\cdot\dfrac{4\pi^2R}{T^2}\\ \text{鉛直方向(靜止)}: F\cdot\cos\theta=mg\end{cases}$

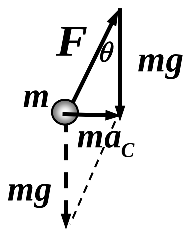


（4）⇒張力 $F=\dfrac{mg}{\cos\theta}$

（5）⇒軌道速率 $v=\sqrt{gR\tan\theta}=\sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}$

（6）⇒週期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g\tan\theta}}=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\theta}{g}}=2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

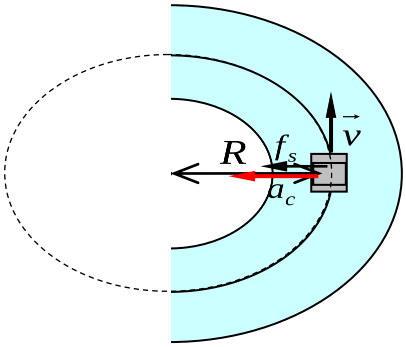


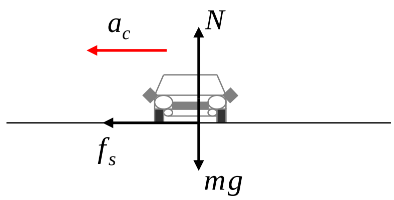


2. $\boxed{\text{車子轉彎}}$

（1）粗糙水平路面： 向心力由靜摩擦擦力提供 $m\dfrac{v^2}{R}=f_s\le f_{s(max)}=\mu_s mg$

⇒ 最大行車安全速度 $v\le\sqrt{\mu_s gR}$





（2）光滑傾斜路面：原理同錐動擺**（彎道須傾斜，外高內低，汽車才能安全通過）**

車子受重力 $\overrightarrow{mg}$ 與正向力 $\vec{N}$ 作用，作水平面上的等速率圓周運動

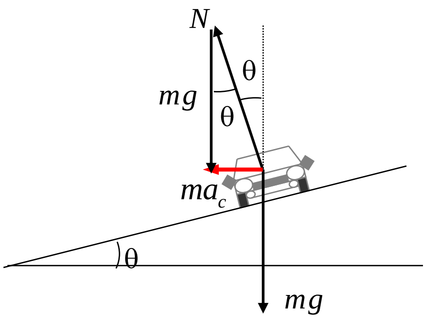
＜a＞ 水平方向：（等速率圓周運動）

$$N\sin\theta=m\cdot\frac{v^2}{R}$$

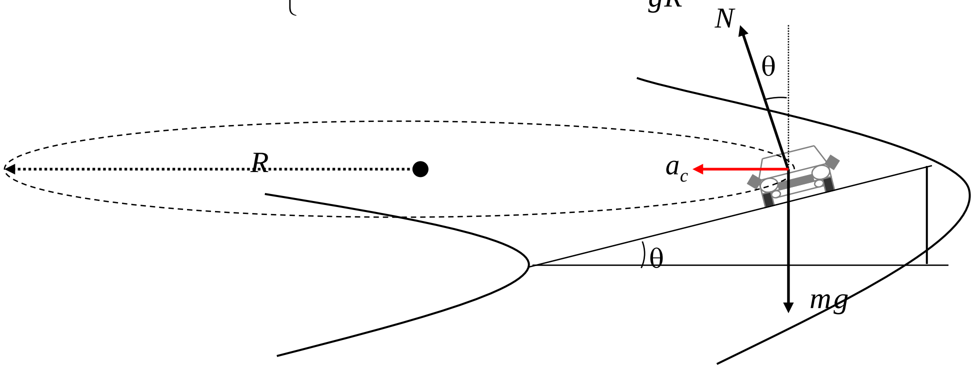
＜b＞ 鉛直方向：（靜止）

$N\cos\theta=mg$ （鉛直方向合力為零）

⇒ 正向力 $N=\dfrac{mg}{\cos\theta}$ ，速率 $v=\sqrt{gR\tan\theta}$



$$\Rightarrow\text{行車的安全速率}\begin{cases}\theta\text{一定時之安全速率}\ v=\sqrt{gR\tan\theta}\\ v\text{一定時之路面傾角}\ \tan\theta=\dfrac{v^2}{gR}\end{cases}$$



四、[補充] 曲線運動與曲率半徑：

（1）當物體做曲線運動時，在一段極短時間Δt內，其運動可視為圓周運動的一小部分，此圓的半徑就是曲線上該位置的**曲率半徑R**，路徑越彎曲曲率半徑越小。**（直線：R無窮大）**

（2）曲線運動的物體其法線加速度a_N必不為零。

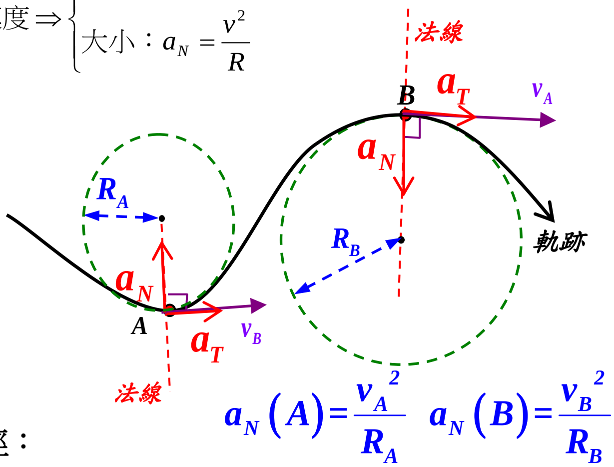
《公式》$\boxed{a_N=\dfrac{v^2}{R}}$，當中R為軌跡的曲率半徑，v為切線速率。

註：a_N不一定等於$\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$或$\dfrac{2\pi v}{T}$，除非是等速率圓周運動。

（3）運動物體的加速度可用$\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$來表示：

⇒ $\vec{a}_T$：切線加速度 ⇒ 和速度同方向，可以改變速度大小。

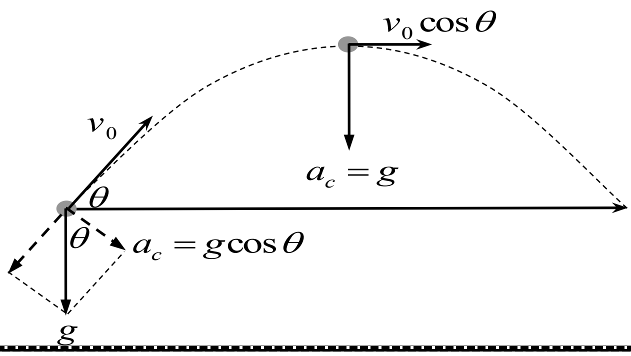
⇒ $\vec{a}_N$：法線（向心）加速度 ⇒ 方向：指向曲率中心，且和速度垂直，可以改變運動方向。大小：$a_N=\dfrac{v^2}{R}$



（4）斜拋運動的曲率半徑：

拋出瞬間 (或落地瞬間) 的曲率半徑 ： $R_{max}=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta}$ (此處曲率半徑最大)

達最高點的曲率半徑 ： $R_{min}=\dfrac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$ (此處曲率半徑最小)



範例一

1.質點以等速率 v 在半徑為 r 的圓周上運動，下列敘述何者正確？（A）切線加速度為零（B）法線加速度量值 $\frac{v^2}{r}$（C）經 $\frac{1}{4}$ 圓周的平均速率為 v（D）經 $\frac{1}{4}$ 周平均速度量值 $\frac{v}{4}$（E）經 $\frac{1}{4}$ 周的平均加速度量值為 $\frac{2v^2}{\pi r}$。

2.地球半徑為 6.4×10^6 公尺，求：（1）地球自轉之角速度？（2）赤道上自轉之切線速率及向心加速度量值？（3）緯度 $60°$ 處自轉之切線速率及向心加速度量值？

Ans:1.ABC　2.（1）7.3×10^{-5} 弧度/秒（2）4.7×10^{2} 公尺/秒，3.4×10^{-2} 公尺/秒^2（3）2.3×10^{2} 公尺/秒，1.6×10^{-2} 公尺/秒^2

範例二

1. 原長 5/3 米，力常數為 300N/m 的彈簧，置在光滑水平面上，一端繫 2kg 之物，另一端固定，令物作速率為 10m/s 的等速圓周運動，則旋轉半徑為（$g=10m/s^2$）？

2. 一質量m置於無摩擦的桌面上以線通過桌面中央一小洞與質量M相連，欲使M靜止不動如圖，則 *(a)* m旋轉速率v與半徑R的關係為何？

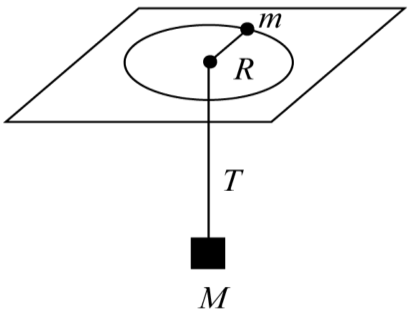
(b) 若m速率減半，則M應減少若干方能使m作原半徑的圓周運動？

3. 如圖，一銅板質量為m，放在水平轉盤上，與轉盤中心點O的距離為r，銅板與轉盤間的摩擦係數為μ_s，欲使銅板能在轉盤上穩定地跟著旋轉，則轉盤最大的角速度ω 為？

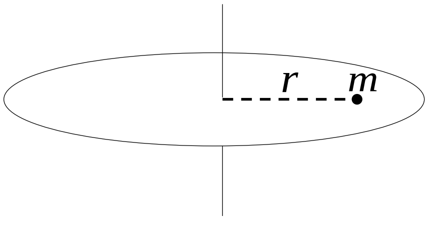
Ans:1. $2m$ **2.** $(a)v=\sqrt{\dfrac{MgR}{m}}$ $(b)\dfrac{3}{4}M$ **3.** $\sqrt{\dfrac{\mu_s g}{r}}$

1.

2,



3.



範例三

1. 三小球 A、B、C，其質量皆為 m，用三條長度均為 L 的細繩按順序由內向外連接之，一端固定以 O 為中心，在光滑水平面上作等速圓周運動，若 A 的速率為 v，則

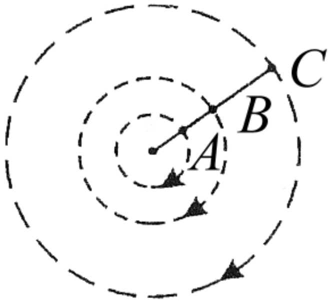
(A) B 所受的向心力為？ (B) ABC 三球的向心力比為？

(C) 連接 BC 間繩的張力為？(D) 由圓心起向外，各段繩張力為？

2. 設地球的半徑為R，地表重力加速度為g，欲使赤道上的物體作用於地面上的力為 0，此時地球自轉的週期為？

Ans:1.(A)2mv²/L (B)1：2：3 (C)3mv²/L (D)6：5：3 2. $2\pi\sqrt{R/g}$

1.



2.

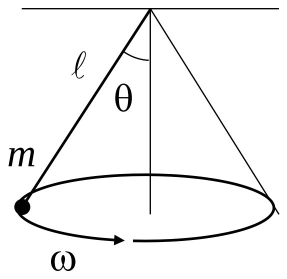
範例四

1. 單擺擺長ℓ，擺錘質量m。當擺錘在一水平面上以等角速度ω繞鉛直線旋轉時（見圖所示），如擺線與鉛直線的夾角為θ，則$cos\theta=$？

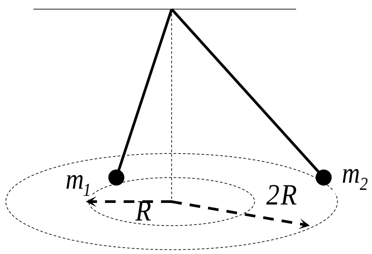
2. 質量m_1、m_2在同一水平面作錐動擺，即m_1、m_2繞同一鉛垂線在同一水平面作等速率圓周運動。m_1的旋轉半徑R，m_2的旋轉半徑$2R$。下列何者正確？（A）m_1、m_2週期相等（B）m_1的週期為m_2週期的一半（C）m_1、m_2速率相等（D）m_1、m_2向心加速度相等（E）m_1、m_2角速率相等。

Ans: 1. $cos\theta=\dfrac{g}{\ell\omega^2}$　***2.AE***

1.



2.

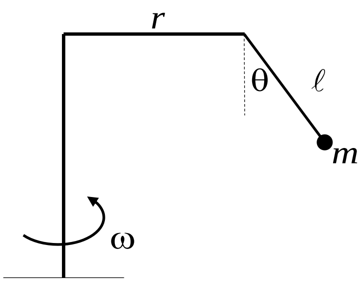


範例五

1.長 ℓ 之彈簧，下懸質量為m之物體，靜止時之長為1.5ℓ，使此裝置作錐動擺使用。
當幅角為$60°$時，此彈簧之長度變為若干？週期為若干？
2.如圖之裝置，若懸線與鉛直方向夾角 $37°$，則 ω 為若干？
Ans:1.（1）2ℓ　（2）$2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$　**2.** $\sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{\ell\sin\theta+r}}$

1.

2.



範例六

1. 如圖，一錐頂角2θ 的圓錐形漏斗內面光滑，有一質量為m的小球在內部與錐頂相距h高處作水平圓周運動。設重力加速度為g，試求：（1）小球受淨力以m、θ、g表示？（2）小球速度以g、h表示？（3）小球受正向力以m、θ、g表示？（4）小球週期以g、h、θ 表示？

2. 如圖，在一個固定的光滑圓錐形桶內，兩個質量都為m的小球A、B緊貼著內壁分別在不同水平面內作等速率圓周運動，下列判斷正確的是？

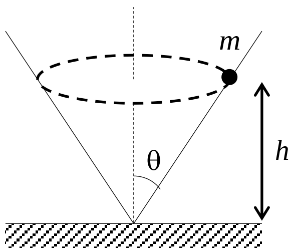
(A)A球線速度必大於B球線速度。(B)A球角速度必大於B球角速度。

(C)A球運動週期必大於B球運動週期。(D)A球對桶壁作用力必大於B球對桶壁作用力。

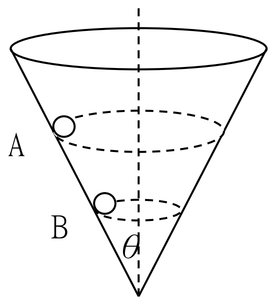
(E)A球加速度大小一定大於B球之加速度大小。

Ans:1. $(1)mg\cot\theta(2)\sqrt{gh}(3)mg\csc\theta(4)2\pi\sqrt{\dfrac{h\tan^2\theta}{g}}$ ***2.AC***

1.



2.



範例七

1. 公路圓形轉彎是以*72*公里/小時之速率設計，則

（1）若圓弧半徑為*300*公尺，此公路正確傾斜角為若干？

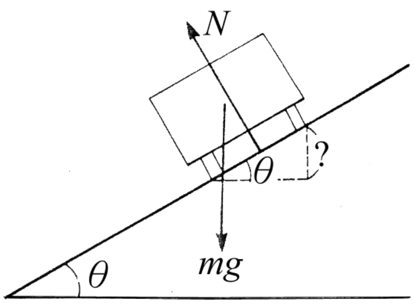
（2）若公路不傾斜，欲使以此速率行駛之車輛不致滑動，路面與輪胎間之靜摩擦係數最小值為何？（$g = 10$ 公尺/秒^2）

2. 以***36km/h***的速度在半徑***200m***的彎路上行駛之火車，欲使鐵軌不受側壓，則外側鐵軌應較內側鐵軌高出若干？**(**但二鐵軌之間距離為***120cm***，而***g=10m/s²*****)**

Ans:1.（1） $tan^{-1}\dfrac{2}{15}$ ***（2）*** $\dfrac{2}{15}$ ***2. 6cm***

1.

2.



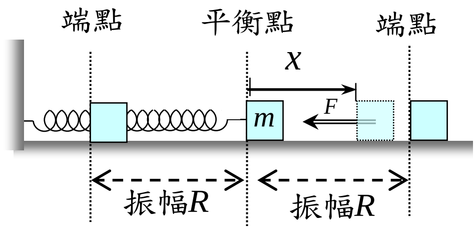
5-2 簡諧運動（*Simple Harmonic Motion* ： *S.H.M*）

一、簡諧運動：最簡單的週期性規律的來回振動，為直線運動。

1. 定義：以平衡點為原點，物體運動時，若所受合力和位置向量量值成正比 ，而合力方向恆和位置向量方向相反【合力方向指向原點】時之運動。

2. 公式：$\boxed{\vec{F}=-k\vec{x}}$，$k$：力常數（單位：N/m）

【型式】物體運動以平衡點為中心，在兩端點間做來回對稱的往復週期性運動，如：彈簧的振動。



3. 名詞定義 :

(1) 平衡點(O)：簡諧運動體所受合力為零之點。

(2) 位置向量(x)：以平衡點為原點運動體之位置。

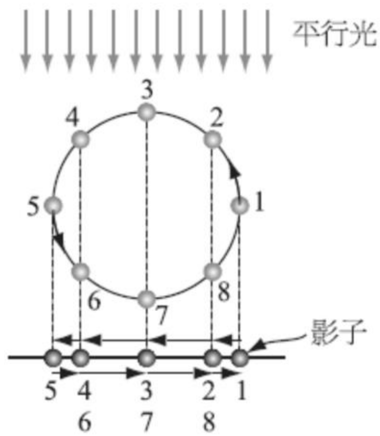
(3) 端點：簡諧運動體速度為零的位置：

(4) 振幅(R)：由平衡點到端點之距離。

(5) 週期(T)：在直線上往返一次所需的時間。

註：簡諧運動為直線運動、變速度運動、變加速度運動、變力運動。

二、簡諧運動的分析：利用等速率圓周運動的“參考圓” 在直徑方向上的投影來分析簡諧運動。



1. **簡諧運動的"參考圓"**：等速率圓周運動在直徑方向上的投影，就是簡諧運動。

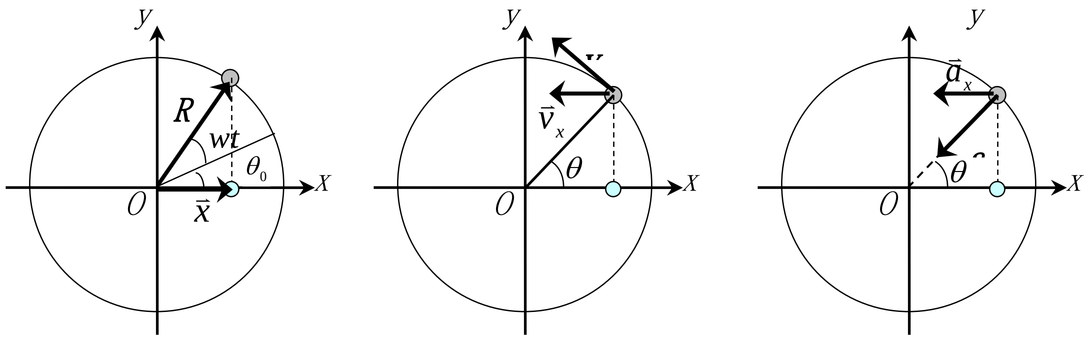
① 若一作簡諧運動的物體質量m，以O點(平衡點)為中心，振幅R，週期T。

② 則其"參考圓"的半徑R（＝振幅R）、週期T、(角速率$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$、速率

$v=R\omega=\dfrac{2\pi R}{T}$)、做**<u>逆時針旋轉</u>**，以圓心$O$為座標原點。

③ **<u>相位角</u>**θ：時間t時，物體對應圓周運動位置向量與+x軸夾角，

<u>初始相位角</u>θ_0：時間$t=0$時，物體對應圓周運動位置向量與+x軸夾角，又稱為<u>相位常數</u>）∴時間t時的<u>相位角</u>$\theta=\omega t+\theta_0$。



（a）$\vec{x}=R\cos\theta\vec{i}=R\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i}$

（b）$\vec{v_x}=-v\sin\theta\vec{i}=-R\omega\sin\theta\vec{i}=-R\omega\sin(\omega t+\theta_0)\vec{i}$

；$\boldsymbol{\theta=90°,270°}$（平衡點）有最大值$v_m=R\omega$。

（c）$\vec{a_x}=-a_C\cos\theta\vec{i}=-R\omega^2\cos\theta\vec{i}=-R\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)\vec{i}$

；$\boldsymbol{\theta=0°,180°}$（端點）有最大值$a_m=R\omega^2$。

（d）由(a)(c) $\vec{a_x}=-\omega^2\vec{x}$

由牛頓第二運動定律：$F=ma\rightarrow F=-m\omega^2x=-kx$，$m$、$\omega$、$k$為常數，

∴ 為S.H.M。

2. 簡諧運動的特性：:

（1）$\boxed{\vec{a}=-\omega^2\vec{x}=-\frac{4\pi^2}{T^2}\vec{x}}$

（2）$\boxed{\vec{F}=-m\omega^2\vec{x}=-k\vec{x}}$　(k為力常數 ：$\boxed{k=m\omega^2}$)

（3）簡諧運動的週期：

簡諧運動的週期即為“參考圓”的週期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$。

找到簡諧運動的受力 F 與位移 x 的比例常數 k，即可得週期：

$$\vec{F}=-m\omega^2\vec{x}=-k\vec{x} \quad\Rightarrow\quad k=m\omega^2\Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

得簡諧運動的週期公式：$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$　$(\vec{F}=-k\vec{x})$

3. 其他關係：

（1）位移與速度關係：$\frac{x^2}{R^2}+\frac{{v_x}^2}{R^2\omega^2}=1$【 x-v_x 關係圖為軌跡橢圓】

（2）速度與加速度關係：$\frac{{v_x}^2}{R^2\omega^2}+\frac{{a_x}^2}{R^2\omega^4}=1$【 v_x-a_x 關係圖軌跡為橢圓】

（3）作用力與時間關係：$F=-kx=-kR\cos\left(\omega t+\theta_0\right)$

【 F-t 關係圖軌跡為正(餘)弦函數圖， F-x 關係圖軌跡為通過原點斜直線】

4. 討論：

（1）SHM的平衡點：（ $\theta=90°$或$180°$ ）位移為零、速度最大$\boxed{v_{max}=\frac{2\pi R}{T}=R\omega}$、

加速度為零、受合力為零。

（2）SHM的端點：（ $\theta=0°$或$180°$ ）位移最大R、速度為零、加速度最大

$\boxed{a_{max}=\frac{4\pi^2R}{T^2}=R\omega^2}$、受合力最大 $f=kR=m\frac{4\pi^2R}{T^2}=mR\omega^2$

（3）SHM的振福：等於“參考圓”的<u>半徑</u>。

SHM的周期：等於“參考圓”的<u>週期</u>。

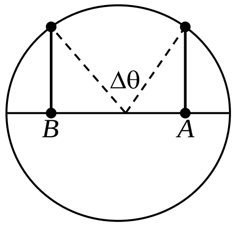
SHM的角頻率：等於“參考圓”的<u>角速度</u>。

（4）SHM合力或加速度方向恆指向原點。

$\boxed{\text{註}}$：（1）解簡諧運動題目，先想辦法找出力與位移關係，求出 k 值。

（2）畫"參考圓"瞭解各物理量的關係：$\begin{cases} \text{對應圓半徑}R=\text{振幅}R \\ \text{對應圓角速度}\omega\left(k=m\omega^2 \rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right) \\ \text{週期}T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$

（3）求時間: $t=\dfrac{\Delta\theta[rad]}{\omega[rad/s]}$ 或 $t=\dfrac{\Delta\theta[rad]}{2\pi}\times T=\dfrac{\Delta\theta[°]}{360}\times T$



$\boxed{\text{註}}$：$\begin{cases} \sin\theta=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\theta=\sin(\theta+\pi) & -\cos\theta=\cos(\theta+\pi) \end{cases}$

範例一

1.在簡諧運動中 (A)速度最大時，加速度亦最大 (B)速度最大時，加速度為零(C)速率為零時，加速度亦為零 (D)速度為零時，加速度為最大 (E)位移最大時，加速度亦最大。***Ans:*** BDE

2.下列有關簡諧運動的敘述，何者是正確的？ (A) 平衡點受力為零，但速度最大 (B)端點加速度最大，但速度為零 (C)速度恆與加速度方向相反 (D)愈接近平衡點，加速度愈小 (E)除平衡點外，受力的方向與速度同方向。***Ans:*** ABD

範例二

1.一物體作簡諧運動（*S.H.M.*），其位置與時間的關係為 $X(t)=2\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，其中*X*與*t*的單位為公尺與秒，則：（A）此簡諧運動的週期為？振幅為？
（B）*2*秒末物體的位置為？物體的速度為？
（C）物體最大加速度的量值為？
（D）若物體的質量為*1*公斤，則受力與位置關係為？

2.一質點作簡諧運動，位置與時間關係為 $x=10\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$（$x$：cm；$t$：$s$），則此質點：（A）振幅為？振動的週期為？　（B）振動的最大速率為？最大加速度為？
（C）速度與時間關係為？　（D）加速度與時間關係為？

Ans: 1.（A）1s、2m（B）1m、 $-2\pi\sqrt{3}$ ***m/s（C）*** $8\pi^2$ ***m/s³（D）*** $\overrightarrow{F}=-4\pi^2\overrightarrow{X}$

2.（A）10cm、10s（B） 2π ***cm/s、*** $\dfrac{2\pi^2}{5}$ ***cm/s²（C）*** $v=-2\pi\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

（D） $a=-\dfrac{2\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

範例三

1.某質點作*S.H.M.*，其振幅為*15* cm、週期為*4 s*，求：（1）速度及加速度之最大值？（2）質點由平衡位置移至*12* cm處之最短時間？（3）質點離開平衡位置*9* cm處時之速度及加速度量值？（4）質點由平衡位置歷$\frac{1}{8}$週期時之速度值？

2.一物作簡諧運動，週期為T，其速率由最大值變為最大值的一半時可能費時：

（A）$\frac{T}{12}$（B）$\frac{T}{8}$（C）$\frac{T}{6}$（D）$\frac{T}{4}$（E）$\frac{T}{3}$。

Ans:1. ***（1）$\frac{15}{2}\pi$ cm/s，$\frac{15}{4}\pi^2$ cm/s²　（2）$\frac{53}{90}$s（3）6 π cm / s，$\frac{9}{4}\pi^2$ cm/s²***

（4）$\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$ cm/s　2.CE

範例四

1. 某物作簡諧運動，週期為 6 秒，振幅 R，當 $t = 0$ 時，位移為 0，而速度為正，則在何時其位移為 $-\frac{\sqrt{3}}{2}R$？（A）3（B）4（C）5（D）7（E）10。

2. 一質點作 S.H.M.當距平衡點 4 m 時其速率為 6 m / s，距平衡點 3 m 時其速率為 8 m / s，求：（1）振幅（2）週期（3）最大加速度量值（4）自距平衡點4 m運動至3 m所歷之最短時間？

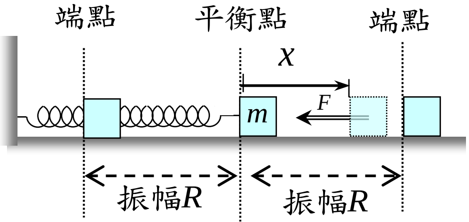
Ans:1.BCE　2.（1）5 m（2）π s（3）20 m/s^2（4）$\frac{2\pi}{45}$ s

三、常見的簡諧運動：

1. 彈簧的簡諧振盪－<u>水平彈簧</u>：

已知理想彈簧力常數 k，一端繫於牆壁上，另一端繫一質量物體 m 之物體，置於光滑無摩擦的桌面上。

當物體於平衡點位移 $x(\rightarrow)$，則彈簧產生恢復力 $F(\leftarrow)$，依虎克定律 $F=kx$，且方向相反 $\Rightarrow \vec{F}=-k\vec{x}$，得証為 $S.H.M.$，比例常數恰為彈簧力常數。



2. [補充] 彈簧的簡諧振盪－<u>鉛直彈簧</u>：

已知理想彈簧彈力常數 k，一端繫於天花板上，另一端繫一質量物體 m 之物體。

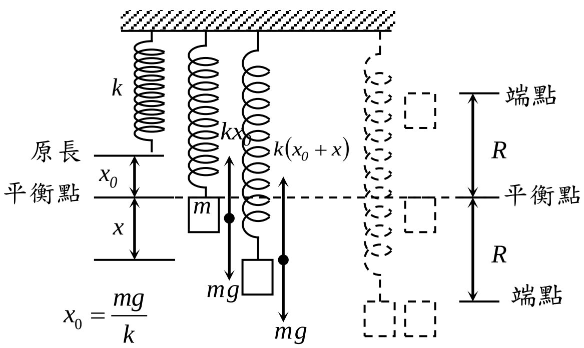
a. 物體靜置於平衡點處，其形變量為 x_o:

平衡點合力為零：$\boxed{mg=kx_o \Rightarrow x_o=\dfrac{mg}{k}}$

b. 當物體由平衡點移 $x(\downarrow)$，則其受合力:

$$\vec{F}_{x_2}=mg(\downarrow)+k(x_o+x)(\uparrow)=\underbrace{mg(\downarrow)+kx_o(\uparrow)}_{mg=kx_o}+kx(\uparrow)=kx(\uparrow)$$

c. 由b，物體所受合力 $F\propto x$，且反向 $\Rightarrow \boxed{\vec{F}=-k\vec{x}}$，得証鉛直彈簧系統作 $S.H.M.$。



【結論】接著彈簧物體的振動：（不論水平彈簧或鉛直彈簧、斜面彈簧均是）

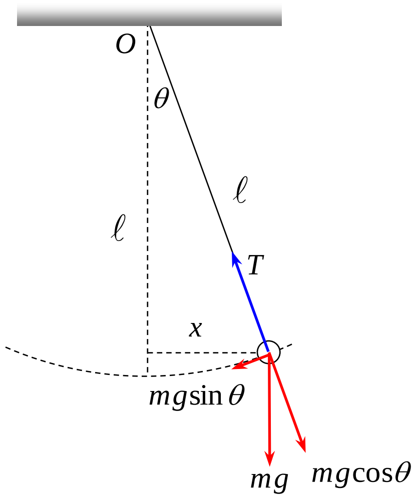
（1）物體受合力與位移的關係：$\boxed{\vec{F}=-k\vec{x}}$（$\boxed{\vec{x}$ **：以平衡點為原點**$}$），為SHM

（2）對應圓的角速度 $\boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

（3）物體振動週期 $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$【只與m , k有關與振幅無關】

3. 小角度的單擺振盪：（擺幅 $\theta<5°$）

設一單擺懸掛於天花板上一點 O，擺長 L，擺錘質量 m，對通過 O 點的鉛垂線作小擺角的往復運動。



若單擺的擺幅 $\theta<5°$ 時，

單擺的週期只與擺長有關，與擺錘重量無關。

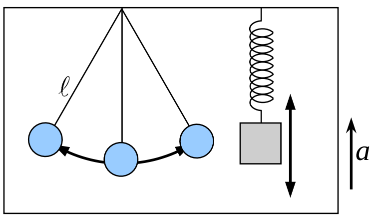
擺角很小，m 可視為在水平方向作直線運動，

其所受的水平方向恢復力

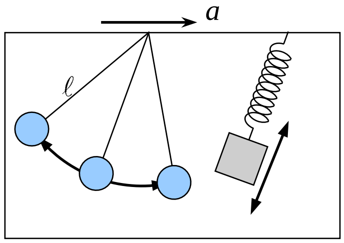
$$f=-mg\sin\theta\approx-mg\frac{x}{\ell}=-kx$$；（$k=\frac{mg}{\ell}$）為簡諧運動

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$；g 為重力加速度

註：[補充] 討論以下情況的振盪週期：



$g'=g+a$



$g'=\sqrt{g^2+a^2}$

◎ 若作用於擺錘的力有沿切線方向的分量，則此力會改變單擺的週期

◎ 若作用於擺錘的力永遠在法線方向，則此力不會改變單擺的週期

◎ 在加速座標系中，單擺的週期 $\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}}}$（$g'$ 為等效重力場強度）

◎ 在加速座標系中，彈簧振動的週期 $\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$，不受重力與加速座標影響。

範例一

1.有一物體連接於彈簧的一端，在光滑水平面做簡諧運動，若欲使其週期變為原來的兩倍，則應（A）將物體的質量變為原來的兩倍（B）將同樣的彈簧四條加以並聯（C）將同樣的彈簧四條加以串聯（D）將振幅變為原來的兩倍。

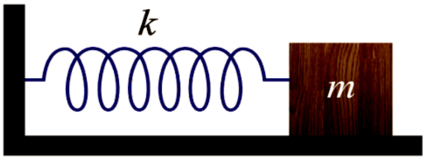
*2.*地震時，如果地面運動的加速度太大，地面上的建築物會被破壞，某建築物可以承受的最大地面水平加速度為$0.32\ g$（g為重力加速度=$9.8m/s^2$），假設地震時，該建築物基地的運動可視為水平簡諧運動，則角頻率為*5.6*弧度/秒的地震發生時，此建築物可承受的最大地面水平振幅為_____cm。

Ans:1.C 2.10 cm。

範例二

如圖，在光滑水平面上，將彈性常數 $k=400$ 牛頓/公尺的彈簧左端固定於牆上，右端連接質量 $m=25$ 公斤的物體，於平衡位置將彈簧壓縮 100 公分後釋放，則此物體作簡諧運動，求：(1)週期為____秒。
(2)角頻率為____弧度/秒。
(3)物體自平衡點向左移動______公分，所需時間為____秒。
(4)當物體速率為 2 公尺/秒時，彈簧回復力為____牛頓。

Ans:(1) $\frac{\pi}{2}$ (2)4 (3) $\frac{\pi}{16}$ (4) $200\sqrt{3}$



範例三

1. 一單擺之長為1.00公尺，週期為2.0秒。以此等數據算出的重力加速度為____公尺/秒^2。（設 $4\pi^2=39.4$）

2. 圖中，擺長 L 的單擺，當擺自最低點的水平位移為 x 處釋放，且 x 遠小於 L 時，擺錘至最低點處的速度為？（重力加速度 g）

Ans: 1.9.85　2. $\dfrac{x\sqrt{g}}{\sqrt{L}}$

1.

2.