2014年第15屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第45屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2013年11月09日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器。

2014 年第 15 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 45 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、某砲兵營進行實彈射擊，分別以不同初速和仰角發射五發砲彈。假設任何飛行中的阻力可以忽略不計，砲彈飛行軌跡(A, B, C, D, E) 如圖 1 示。請依砲彈在空中飛行時間由長到短排序____(1)____；依砲彈發射之初始速度量值由大到小排序____(2)____。（作答時，請以 >、= 之符號進行排序）。

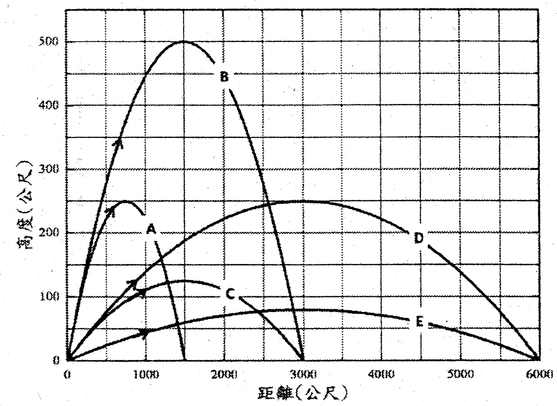


圖 1

二、一河流寬度為W，水流流速為v_R、向北流動。一艘船相對於靜止水的船速為$v_B = \sqrt{13} \times v_R$，若其由河的左岸出發要到河的對岸上游處$W$處，問此船至少需要多少時間？____(3)____。

三、 $x-y$坐標之x軸是與地表平行，而y軸是鉛直向上。現有 A 與 B 兩點，其坐標分別為$(-\ell,0)$及$(\ell,0)$。在y軸上任選一點 P，其坐標為$(0,y)$。A 與 P 兩點之間，及 P 與 B 兩點之間，均以直線連接。現在將一質點，以初速為零，自 A 點沿兩段直線滑向 B 點。假設在 P 點有一很小的圓弧，可以讓質點平滑、無摩擦的由$\overline{AP}$轉向到$\overline{PB}$線段上。若摩擦力可以忽略不計，要使質點抵達 B 點所需的時間為最短，則y之值等於____(4)____。

【提示】: 用微分式：$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$，或$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

四、考慮一個斜角θ 為$45°$的極長斜坡，如圖 2 所示。有一質點鉛直落下，撞擊斜坡時的速率為v_0。假設粒子與斜坡的撞擊為完全彈性碰撞，且粒子與斜坡表面間無摩擦力，重力加速度為g。撞擊後彈起落下，又與斜坡撞擊，如此一直進行。問第二十一次撞擊的撞擊點與第一次的撞擊點間的距

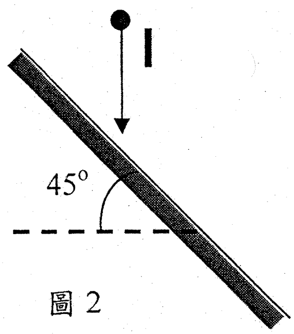


圖 2

離為 ____(5)____。此次彈起時粒子的速度與水平方向的夾角是____(6)____。

五、物體由高空落下時，其所受空氣阻力F_v正比於運動速度的平方，且等於$\frac{1}{2}D\rho Sv^2$，其中D、ρ、S、以及v分別為無因次之風阻係數、空氣密度、運動中物體垂直於速度之截面積，以及運動速度。今有二同質且密度均勻，半徑分別為R_A和R_B之球狀物體 A 和 B。已知$R_B = 2R_A$，則由高空自由落下，A 球之終端速度是 B 球的 (7)___倍。

【註】假設不計浮力，且初始下落之高度，均足以讓二球達到其終端速度。

六、假設鴕鳥蛋與雞蛋之組織成分完全相同，只是照一定的比率放大而已。已知將雞蛋放入滾水中，需要 5 分鐘才能將整顆蛋煮熟。若鴕鳥蛋與雞蛋的重量比是27:1，則將鴕鳥蛋放入滾水中，需要____(8)____分鐘才能將整顆蛋煮熟。

七、 一莫耳之單原子理想氣體，在某一非定壓也非定容的加熱過程中，其莫耳比熱為$2R$，R 為氣體常數。若在此加熱過程中，氣體之體積增加為原體積之 2 倍，則該氣體之溫度變成為原來溫度之____(9)____倍。

【提示】：$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$。

八、巴拿馬運河的寬度為W，因此水閘門寬度也是W。水閘門兩邊運河水的深度分別為h_1和h_2（$h_1 > h_2$），如圖 3 所示，則兩側的水作用在水閘門的靜力和等於____(10)____。如以通過水閘門的底部和水閘門平行的線作為轉軸，則作用在水閘門的力矩大小為____(11)____。(設水閘門的厚度可以忽略不計，水的密度為ρ，重力加速度為g。)

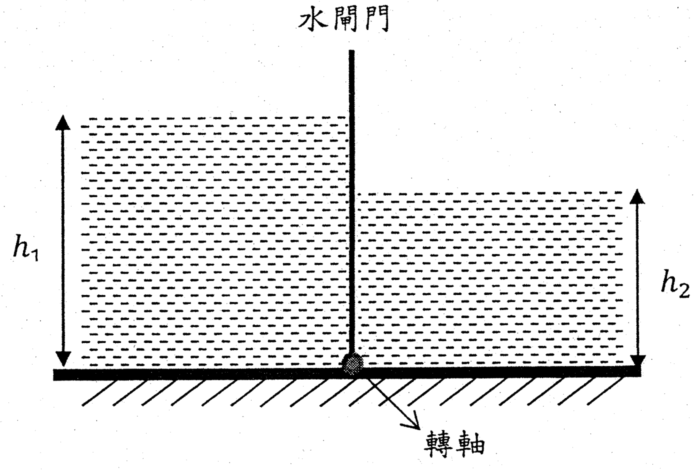


圖 3

【提示】：積分公式：$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，其中$n \neq -1$。

九、天文觀測發現一未知小物體 X 以速率 v 接近太陽系，並且發現相對於太陽，X 物體運動的撞擊參數為 b，如右圖 4 所示。設太陽的質量為 M，重力常數為 G，若除了太陽外，太陽系其它行星與天體的重力可被忽略，且 X 物體不會因距太陽太近而融化或蒸發，則 X 物體能逼近太陽最近的距離為___(12)___。

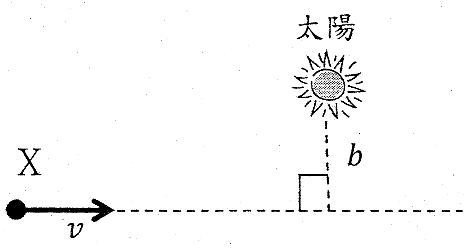


圖 4

十、某一行星是由密度為 ρ_1 的核心和密度為 ρ_2 的外殼所組成，核心的半徑為 a_1，行星的半徑為 a。若最大的重力加速度值發生在核心和外殼的介面 a_1 處，則 ρ_1/ρ_2 的最小值為___(13)___。

【提示】：微分公式：$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$。

十一、半徑 R 為 1 公尺，質量 m 為 2 公斤的實心圓盤狀飛輪（轉動慣量 $I = mR^2/2$），以每秒 30 圈的速率繞固定之中心軸轉動。今在半徑 1 m 處，受到一定力 F 作用後，均勻減速經過 30 秒後停止，則由開始受力至停止，飛輪共轉了___(14)___圈，所受力 F 量值最小需為 ___(15)___ 牛頓。

十二、一個圓形水平轉盤，在距離轉軸 r 處放置一個小方塊，它和轉盤間的最大靜摩擦係數為 b，重力加速度為 g。(a) 在轉盤轉速保持固定，即**等角速度**條件下，若要使該方塊不滑動，則轉動角速率最大值等於___(16)___。(b) 若轉盤由靜止開始以**等角加速度**轉動一圈，要以摩擦力保持方塊在此第一圈中不滑動，則轉完第一圈所需要的最短時間等於___(17)___。

十三、在水平面上將三個大小材質皆相同、半徑皆為 r、形如硬幣的圓盤，依上、中、下順序相疊。若僅考慮重力，而要使三者的圓面皆保持水平，且達成靜力平衡，則三者間的兩個接觸面之面積和的最小值為 ar^2，即上、中圓盤的接觸面積，與中、下圓盤的接觸面積的總和為最小值。則 a 的數值等於 ___(18)___（取 2 位有效數字）。

【註】：你可能會需要用到下列中的某些近似：

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.5236$；$\cos^{-1}\frac{4}{5} \approx 0.6435$；$\cos^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.7227$；$\sqrt{3} \approx 1.732$；$\sqrt{2} \approx 1.4142$；$\pi \approx 3.14162$

十四、水平桌面上有一0^oC的冰塊以等速度前進，且前進時的每一瞬間，摩擦力所作的功皆可以即時轉換為冰塊熔解所需的熱，而熔解後的水立即靜止附著於桌面上。已知冰的熔解熱為 L，且冰塊和桌面之間的動摩擦係數固定為 μ，重力加速度為 g，忽略冰和四周環境的熱交換；則冰塊前進的速率等於___(19)___。每經過 t 的時間，冰塊的質量會減半，則 $t =$___(20)___。

十五、一熱力學系統包括一個固定於水平表面上、一端封閉的圓筒型剛體汽缸，配置於汽缸另一端的一可滑動、截面積為A的密封剛體活塞，以及汽缸內所含之n莫耳的理想氣體，如圖 5 所示。當活塞水平移動時，活塞與汽缸壁之間的動摩擦力，其量值固定為f。已知此系統在絕對溫度為T的等溫條件下，汽缸內氣體的體積很緩慢的由V_1膨脹為V_2，且系統最初與最後均處於靜止平衡。假設在此過程中，系統自外界所吸收的熱量為Q，系統對外界所作的功為W，則比值Q/W等於＿(21)＿。

已知$\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=ln\frac{V_2}{V_1}$，則$W$等於＿(22)＿(假設通用氣體常數為$R$)。

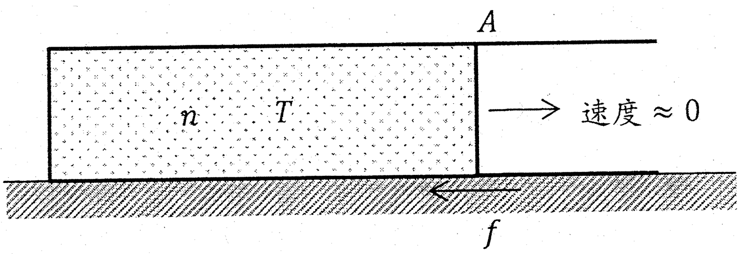


圖 5

十六、一台四輪傳動的車，質量為M，前後車輪的軸距為d；車子的質心位置在前後車軸的中間，而質心離地面的高度為h(如圖 6 所示)。車的四個輪子大小一樣，四輪傳動使四個輪子的轉速都一樣；前後車輪與地面的最大靜摩擦係數則分別為μ_1、μ_2，且$\mu_1 < \mu_2$。以下考慮車子在水平的路面上往前加速，車子的引擎的馬力足夠。設重力加速為g。若車的加速為a，則地面作用於兩個後輪的正向力之和等於＿(23)＿。車子最大的加速a_M等於＿(24)＿。

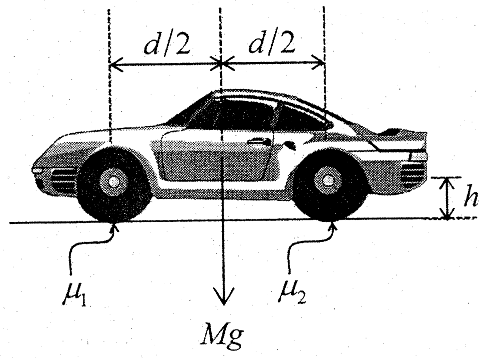


圖 6

十七、將一條長度固定、質量可忽略的柔軟細繩，兩端分別繫上質量為m與M的物體，以形成一系統。先將細繩繞過一半徑為r的定滑輪，並以一水平桌面撐住M，使兩物體靜止懸吊於滑輪兩側，接著再沿鉛直線使m的重心上升h的高度(如圖 7)，然後使m由靜止下落，直到細繩張緊。已知細繩與滑輪之間無摩擦力，來自空氣之作用力均可忽略，且在細繩張緊之前後的極短期間內，重力產生之衝量可忽略；則此系統的總力學能、總動量、總角動量(以滑輪中心為參考點)三者中，在細繩張緊之前後極短的瞬間，沒有守恆的是＿(25)＿。假使M在細繩張緊後瞬間的速率為V，則m在細繩張緊後瞬間的速度等於＿(26)＿。(以向下為正，並設

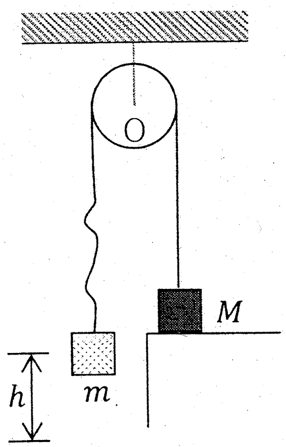


圖 7

重力加速度為g)。

十八、如圖 8 所示，在一光滑的直線上，一氫原子(H)與一氫分子(H_2)發生一維碰撞，已知氫原子可被視為質點A，而氫分子則可視為B與C兩質點並以彈簧相連之系統。設質點之質量皆為m，彈簧的彈力常數為k。發生碰撞前瞬間氫原子的速度為$2v$ ($v>0$，故向右為正)，氫分子的質心速度為$3v/2$，且C相對B的速度為v，而彈簧之伸長量為x。試問相較於碰撞前，碰撞後氫原子與氫分子之質心總動能的改變為__(27)__ (以正值代表增加)，又碰撞後C的最大速度為__(28)__。

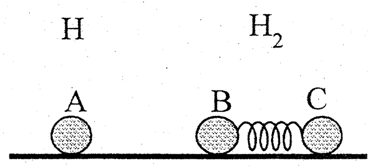


圖 8

十九、楊氏係數Y的定義是應力與應變的比值。應力的定義是材料每單位面積的平均受力，而應變的定義為沿著受力方向的每單位長度的平均形變量。若鋸齒型狀(Zigzag)奈米碳管如圖 9-1 所示，其截面積為A、長度為l_0，當沿著管軸受到F力的作用後，在彈性限度內微小的長度變化量為Δl，則楊氏係數Y等於$\frac{F/A}{\Delta l/l}$。圖 9-2 中是將括弧部分的一小段奈米碳管沿著管軸方向將管壁展開的示意圖，即圖 9-2 中左邊B和右邊B是重合在一起而捲成一個奈米碳管，每一個點●代表一個碳原子。

(a) 若碳一碳原子間鍵結可以用摩斯位能函數來表示，即 $V(x)=V_0\left(e^{-4\frac{x}{a}}-2e^{-2\frac{x}{a}}\right)$，其中$V_0$為平衡時鍵結能，是一個定值；$a$為兩個碳原子平衡時的距離，即平衡時的鍵長；$x$為相對於平衡鍵長的壓縮量或是伸長量。在微小振盪的近似下，即$x \ll a$時，碳一碳原子間位能函數可以寫為$V(x)\approx -V_0+\frac{1}{2}kx^2$，則$k=$ __(29)__。

【提示】：$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$，當$x \ll 1$。

(b) 假設平行軸方向的碳一碳鍵結是影響軸方向楊氏係數的主要因素，而鋸齒狀碳鍵效應可以忽略(如圖 9-2 虛線部分)。已知$V_0=4.93$電子伏特，$a=0.142$ nm，則圖中奈米碳管軸方向的楊氏係數等於__(30)__GPa。
(1 電子伏特 $=1.602\times10^{-19}$ 焦耳)

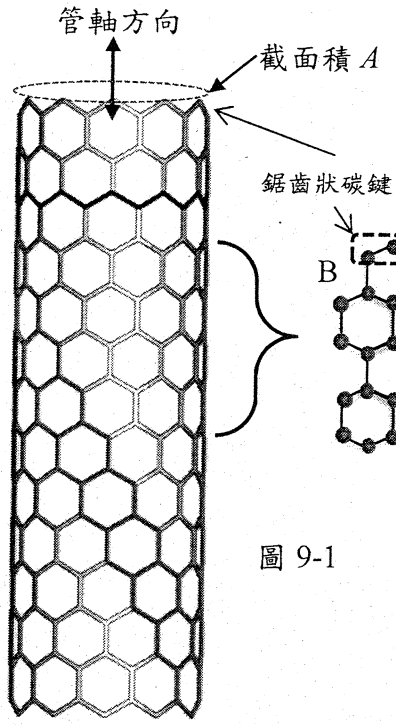


圖 9-1

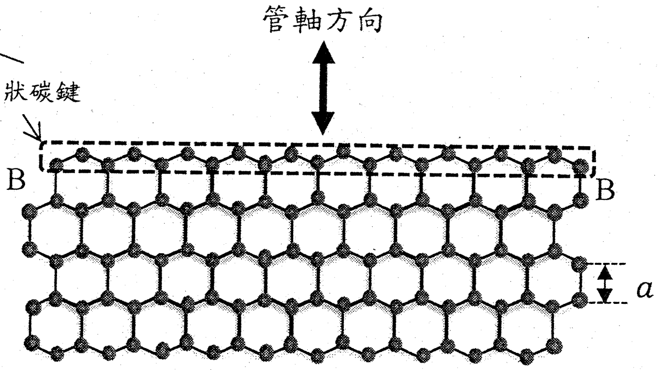


圖 9-2

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、一維的質點振盪運動(15 分)

一彈力常數為 k 的理想彈簧，其一端連在固定的牆上，一端與一個質量可以忽略不計的碗相連接。碗的底面是一個半徑為 R 的凹半球形，碗底有一個質量為 m 的質點。以此彈簧的方向定為 x 軸，設彈簧為原長、且質點在碗底時的位置為 x 軸之原點，如下圖 10-1 所示。假設碗與地面、質點 m 與碗面之間的摩擦力都可以忽略不濟。今對質點施以一個一直與碗圓弧面平行的力，使得質點在碗面內自碗底緩慢上升，質點與碗的球心之連線與鉛垂線的夾角為 θ。過程中施力方向跟著改變而一直保持沿碗面方向，直到與鉛直夾角等於 θ_0，如下圖 10-2 所示。回答下列問題：

(1) 當質點在θ_0處保持靜力平衡，整個系統處於平衡狀態。此時碗亦已離開原來位置，設此時的碗底位置為x_0，求x_0表示式(以θ_0、k、R、m和重力加速度g表示之)。(3 分)

設時間零點是使質點維持在θ_0位置的外力消失的時間，則

(2) 若 θ_0 很小，外力消失之後質點會在碗中作簡諧運動，其角頻率 ω 是多少？(以θ_0、k、R、m和重力加速度g表示之)(6 分)

(3) 承(2)的結果，當以外力消失，經過t的時間後，此質點相對於地面的水平速度為何?(以θ_0、k、R、m和重力加速度g表示之)。(6 分)

【提示】：$\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$，$\frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)$。

當$x \ll 1$，$\sin x \approx x$，$\cos x \approx 1$。

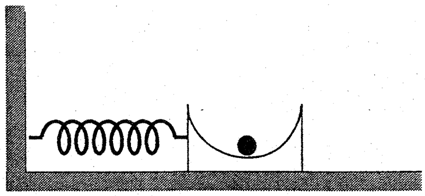


圖 10-1

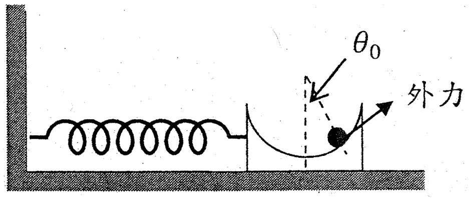


圖 10-2

二、量測大氣壓力(15 分)

一端為開口另一端為閉口的玻璃管，其截面積為 1 cm^2、長度為L。玻璃管內裝有高度為 h_0 的水柱($L > h_0$)，其他剩餘的長度裝有空氣。將此管開口以手暫時封閉垂直倒立插入一盛有水的容器中，將手放開後成為一個測量大氣壓力的簡易裝置；如圖 11 所示。設玻璃管上端的空氣柱高度為 H，管內水面距離容器水面的水柱高度為 h；則隨著玻璃管沿鉛直線在容器中上下移動(即玻璃管在水中的深度不同時)，H 和 h 會隨玻璃管深度而變化。某生利用此裝置進行實驗，紀錄玻璃管不同深度時的 H 和 h 數值，並將實驗結果繪圖，其結果如圖 12 所示。

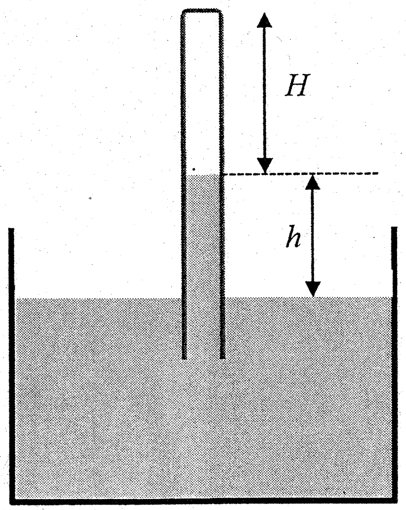


圖 11：測量大氣壓力之簡易裝置

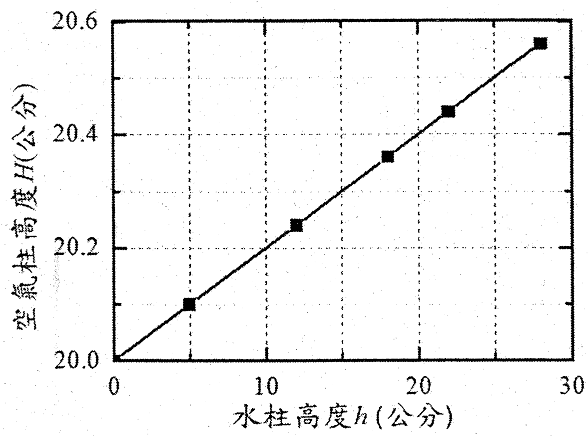


圖 12：空氣柱 H 與水柱 h 實驗數據圖。

實驗過程中，系統的溫度恆定不變，且由圖 12 的實驗結果知 H 和 h 具有線性關係，若兩者的關係可以寫成 $H = a + bh$，則：

(1) 由圖 12 的實驗結果，求 a 和 b 的數值。(2 分)

(2) 設大氣壓力為 P_{atm}、重力加速度為 g，而水的密度為 ρ，試推導得a和 b 的理論表示式(即以P_{atm}、g、ρ、L 和 h_0表示之)。 (5 分)

若已知玻璃管長度 $L = 60\ \mathrm{cm}$，而水的密度為 $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$，重力加速度為 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，則

(3) 求初始管中的水柱高度 h_0 是幾公分高？(2 分)

(4) 請問實驗當地的大氣壓力P_{atm}約是多少 kPa？(4 分)

(5) 當改變玻璃管在水中的深度時，H 和 h 會隨之變化。試問實驗過程中H 和 h可容許的最大值各為多少公尺？(精確至小數點下兩位數，即公分的位數) (2 分)。

【提示】：$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$，當$x \ll 1$。

2014年第15屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第45屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選試題參考解答

一、(1) $\underline{B > D = A > C > E}$

解：

對任一砲彈之飛行軌跡：飛行最高H；射程R。若到達最高點的時間為t，則$H = \frac{1}{2}gt^2$，因此總飛行時間為$2t$，即等於

$$2t = 2 \times \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

由上式知總飛行時間正比於$\sqrt{H}$，以高度作比較，得到$\underline{B > D = A > C > E}$。

(2) $\underline{E > D > C > B > A}$

解：

因為垂直速度分量$V_{y0} = gt$，而水平速度分量$V_{x0} = \dfrac{R}{2t}$，故發射初始速度為

$V_0 = \sqrt{V_{y0}^2 + V_{x0}^2}$，表一顯示計算之結果。

砲彈	$H(m)$	$R(m)$	2t(s)	$V_{y0}(m/s)$	$V_{x0}(m/s)$	$V_0(m/s)$
A	250	1500	14	71	106	127
B	500	3000	20	100	150	180
C	125	3000	10	50	300	304
D	250	6000	14	71	424	430
E	80	6000	8	40	750	751

由上表一的計算得知初速的大小為：$\underline{E > D > C > B > A}$。

二、(3) $\underline{t = \dfrac{W}{2v_R}}$

解：

走直線所費時間最短。設船相對於靜止水之速速，其平行河的分量為$v_\parallel$，垂直於河的分量為$v_\perp$，則 $\frac{v_\parallel - v_R}{v_\perp} = \frac{W}{W} = 1$，故

$$v_\parallel = v_\perp + v_R$$

已知 $v_B=\sqrt{13}\times v_R$，即 $v_{\parallel}^2+v_{\perp}^2=(v_{\perp}+v_R)^2+v_{\perp}^2=13v_R^2$，所以

$$2v_{\perp}^2+2v_{\perp}v_R-12v_R^2=0$$

由上式解得 $v_{\perp}=2v_R$，故最短時間為 $t=\frac{W}{2v_R}$。

三、(4) $\underline{\ -\ell\ }$

解：

質點先由 A 降至 P 點，再升至 B 點，由題意可知 $y<0$，否則質點無法抵達 B 點。由於對稱性，由 A 點抵達 B 點所需的時間是 A 點到 P 點所需時間的兩倍。由 A 點到 P 點所需時間 $t_{\mathrm{A\to P}}$ 為

$$t_{\mathrm{A\to P}}=\frac{\sqrt{\ell^2+y^2}}{(0+v_{\mathrm{P}})/2}=2\frac{\sqrt{\ell^2+y^2}}{\sqrt{2g(-y)}}=\sqrt{\frac{2\ell}{g}}\times\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\xi}} \tag{1}$$

其中 $\xi=\frac{-y}{\ell}$。若 $t_{\mathrm{A\to P}}$ 要有最小值，即 $\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\xi}}$ 是最小值，由算術平均值大於幾何平均的原理知道：

$$\frac{1+\xi^2}{\xi}=\frac{1}{\xi}+\xi\geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{\xi}\right)\times\xi}=2$$

是 $\xi=1$ 時，$t_{\mathrm{A\to P}}$ 有最小值，即 $y=-\ell$ 。

另解：若有最小值，即 $\frac{dt_{\mathrm{A\to P}}}{d\xi}=0$，得即 $\xi^2-1=0$，也可以求得 $y=-\ell$ 。

四、(5) $\underline{\ 420\sqrt{2}\frac{v_0^2}{g}\ }$

解：

設平面 $x-y$ 坐標是以沿著斜坡向下為 x 軸方向，垂直於斜坡為 y 軸方向，如此初速 v_0 及重力加速度 g 就與 x 軸夾 45°的方向。又因為斜坡對粒子的撞擊施力永遠是沿 y 軸方向垂直於斜坡，且在無摩擦的情況下，因此碰撞僅影響斜面垂直方向速度。因此 y 方向運動與 x 方向運動可以互相獨立。

在 y 軸方向：

質點是一個以 $v_0/\sqrt{2}$ 的速度撞擊斜面，並以 $-g/\sqrt{2}$ 加速度反覆彈升的彈跳運動，因此每相鄰兩次撞擊的時間間隔 t'，都符合運動公式

$$-v_0/\sqrt{2}=v_0/\sqrt{2}+\left(-g/\sqrt{2}\right)t'\ ,$$

則 $t'=2\,v_0/g$。

因此第二十一次撞擊與第一次撞擊時間間隔為：$20t'=40\,v_0/g$。

在 x 軸方向：

質點是初速度為 $v_0/\sqrt{2}$，以 $g/\sqrt{2}$ 為加速度進行的等加速運動。在第二十一次撞擊時，時間間隔為$40\,v_0/g$，則與第一次碰撞為的距離為：

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}}\times 40\,v_0/g+\frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{2}}(40\,v_0/g)^2=420\sqrt{2}\frac{v_0^2}{g}\quad。$$

(6) <u>43.6^{o}</u>

解：

在第二十一次撞擊時，y 軸方向的速度為$v_0/\sqrt{2}$，而沿斜面的x 軸方向速度為

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}}+\frac{g}{\sqrt{2}}\times 40\,v_0/g=\frac{41}{\sqrt{2}}v_0\quad，$$

則此速度與斜面的夾角為

$$\tan^{-1}\frac{v_0/\sqrt{2}}{41v_0/\sqrt{2}}=\tan^{-1}\frac{1}{41}\cong 1.4^{\text{o}}\quad，$$

所以與水平的夾角為 $45^{\text{o}}-1.4^{\text{o}}=43.6^{\text{o}}$ 。

五、(7) <u>$\sqrt{2}/2$</u> 倍

解：

由牛頓第二運動定律（不計浮力）知，在到達終端速度v_T時，加速度為零，即：

$$mg=\frac{1}{2}D\rho S v_T^2$$

故終端速度v_T 等於 $\sqrt{2mg/D\rho S}$ ，即 $v_T\propto\sqrt{m/S}$。

球之質量 m 正比於半徑三次方，而垂直於速度之截面積 S 正比於半徑的平方，因此 $v_T\propto\sqrt{R^3/R^2}=\sqrt{R}$，所以 A 和 B 終端速度的比值為

$$\frac{v_T(A)}{v_T(B)}=\sqrt{\frac{R_A}{R_B}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

六、 (8) <u>45</u> 分鐘。

解：

熱傳導率正比於A/L，此處A為面積，L為長度。將蛋煮熟所需之熱能正比於體積，設體積為V，故將蛋煮熟所需的時間正比於$\frac{V}{(A/L)}=\frac{L^3}{(L^2/L)}=L^2$。蛋的重量正比於$V$，兩者組成相同，故鴕鳥蛋與雞蛋的長度比是3：1，因此將鴕鳥蛋黃煮熟需要 45 分鐘。

七、(9) <u>4</u> 倍

解：

由熱力學第一定律：$dQ = dU + PdV$；其中U為系統內能、Q為加入系統之熱能、P和V則分別為系統之壓力和體積。對單原子理想氣體而言，$U = \frac{3}{2}RT$，僅與系統溫度 T 有關，且$PV = RT$，故第一定律可以改寫為：

$$dQ = dU + PdV = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV$$

由題意可知：$\frac{dQ}{dT} = 2R$，即$dQ = 2RdT$；代入上式可得：

$$2RdT = \frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV$$

故 $2\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$，兩邊積分後可得$2\ln V = \ln T + \ln C$，即$\frac{V^2}{T}$ =定值，此為系統在加熱過程中之狀態方程式，亦即系統體積增加為原來體積之 2 倍時，溫度應增加為原來之 4 倍。

八、(10) $\frac{1}{2}W\rho g(h_1^2 - h_2^2)$

解：

在 h_1 水深的部分所造成之淨力和F_1等於

$$F_1 = \int_0^{h_1} zW\rho g dz = \frac{1}{2}W\rho g h_1^2$$

在 h_2 水深的部分所造成之淨力和F_2等於

$$F_2 = \int_0^{h_2} zW\rho g dz = \frac{1}{2}W\rho g h_2^2$$

因為$h_1 > h_2$，故 $F_1 > F_2$ ，故淨力和等於

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}W\rho g(h_1^2 - h_2^2)$$

(11) $\frac{1}{6}W\rho g(h_1^3 - h_2^3)$

解：

水深度為h_1 對於閘門底端的轉軸所產生的力矩為

$$\int_0^{h_1} zW\rho g(h_1 - z)\, dz = \frac{1}{6}W\rho g h_1^3$$

同理，水深度為h_2 對於閘門底端的轉軸所產生的力矩為

$$\int_0^{h_2} zW\rho g(h_2 - z)\,dz = \frac{1}{6}W\rho g h_2^3$$

兩邊所造成力矩方向相反，因此兩者的差值等於閘門所受的力矩，即

$$\frac{1}{6}W\rho g h_1^3 - \frac{1}{6}W\rho g h_2^3 = \frac{1}{6}W\rho g(h_1^3 - h_2^3)$$

九、(12) $\underline{\frac{GM}{v^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{bv^2}{GM}\right)^2}-1\right)}$

解：

設 X 物體離太陽最近的距離為r，此時 X 物體速率為v'，則由角動量守恆可得

$$vb = v'r \text{ 。}$$

由能量守恆可得

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v'^2 - \frac{GM}{r}$$

由角動量守恆解得 v'，代入上可得

$$v^2r^2 + 2GMr - v^2b^2 = 0$$

由此可解得

$$r = \frac{GM}{v^2}\left(\pm\sqrt{1+\left(\frac{bv^2}{GM}\right)^2}-1\right)$$

因 r 恆為正，故

$$r = \frac{GM}{v^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{bv^2}{GM}\right)^2}-1\right)$$

十、(13) $\underline{\ 3/2\ }$

解：

當 $r \le a_1$ 時，重力加速度為

$$g(r) = G\frac{\rho_1\frac{4\pi}{3}r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G(r\rho_1)$$

當 $a_1 < r \le a$ 時，重力加速度為

$$g(r) = G\frac{\rho_1\frac{4\pi}{3}a_1^3 + \rho_2\frac{4\pi}{3}(r^3 - a_1^3)}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\left[\rho_1\frac{a_1^3}{r^2} + \rho_2\left(r - \frac{a_1^3}{r^2}\right)\right]$$

當 $a < r$ 時，重力加速度為

$$g(r)=G\frac{\rho_1\frac{4\pi}{3}a_1^3+\rho_2\frac{4\pi}{3}a^3}{r^2}=\frac{4\pi}{3}G\left[\rho_1\frac{a_1^3}{r^2}+\rho_2\frac{(a^3-a_1^3)}{r^2}\right]$$

因最大的重力加速度值發生在核心和外殼的介面 a_1 處，所以得 $g(a_1)>g(a_1^+)$ ，（a_1^+ 代表由大於 a_1 的範圍趨近於 a_1）則在 a_1^+ 處 g 值變化的斜率為負，也就是在

$a_1<r$的範圍內是$\frac{g(r)}{dr}|_{r=a_1^+}<0$，即

$$\frac{4\pi}{3}G\left(-2\rho_1\frac{a_1^3}{r^3}+\rho_2+2\rho_2\frac{a_1^3}{r^3}\right)|_{r=a_1^+}<0$$

即 $-2\rho_1+3\rho_2<0$，所以

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}>\frac{3}{2}$$

十一、(14) $\underline{\quad 450 \quad}$ 圈

解：

角加速度為$\alpha=-\frac{60\pi}{30}=-2\pi$ ，負號表示使轉速減小，所轉的圈數 N 等於

$$N=\frac{\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi}=\frac{60\pi\times 30+\frac{1}{2}\left(-\frac{60\pi}{30}\right)\times 30^2}{2\pi}=450\,(\text{圈})$$

(15) $\underline{\quad 2\pi \quad}$ 牛頓

解：

力矩等於 $\tau=I\alpha=1\times 2\pi=2\pi(\mathrm{kg\cdot m^2/s^2})$，故施力的量值等於

$F=\frac{\tau}{R}=2\pi(\mathrm{kg\cdot m/s^2})$，及$2\pi$牛頓。

十二、(16) $\underline{\quad \omega\le\sqrt{gb/r} \quad}$

解：

(a) 設小方塊質量為m，轉動角速率為ω，若要使方塊不滑動，則最大靜摩擦力須大於或等於所需的向心力，即 $mgb\ge m\omega^2 r$ ，因此

$$\omega\le\sqrt{gb/r}$$

(17) $\underline{\quad \left[\frac{16\pi^2r^2}{g^2b^2}(1+16\pi^2)\right]^{1/4}\cong 7.1\sqrt{\frac{\pi r}{gb}} \quad}$

解：

(b) 設該圓周運動的等角加速率為α，轉動一圈所需時間為T，故

$$2\pi=\frac{1}{2}\alpha T^2，$$

要以摩擦力保持方塊在第一圈中不滑動，過程中切線方向受力為一定值$m\alpha r$，而徑向受力最大是發生在一圈之末，為$m(\alpha T)^2 r$。此二力相互垂直，且它們的向量和必須始終小於或等於最大靜摩擦力mgb，即

$$(mgb)^2\geq(m\alpha r)^2+[m(\alpha T)^2 r]^2$$

整理後可以得到

$$(gb)^2\geq\left(\frac{4\pi}{T^2}r\right)^2+\left[\left(\frac{4\pi}{T}\right)^2 r\right]^2=\frac{1}{T^4}[(4\pi r)^2+(16\pi^2 r)^2]$$

在等號成立時，T為最小值，即

$$T_{min}^4=\frac{16\pi^2 r^2}{g^2 b^2}(1+16\pi^2)$$

得最短時間為

$$T_{min}=\left[\frac{16\pi^2 r^2}{g^2 b^2}(1+16\pi^2)\right]^{1/4}\cong 7.1\sqrt{\frac{\pi r}{gb}}$$

十三、(18) 1.7

解：

三者間的兩接觸面之面積為最小時，其俯視圖如右圖，圖中的上中兩圓之圓心距為r，而中下兩圓為$3r/2$

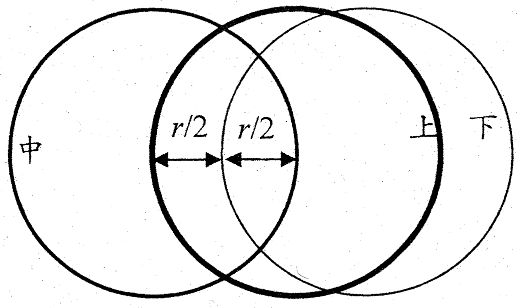


圖 1

故上中兩圓的接觸面積為：

$$A_{上中}=2\left(\frac{\pi r^2}{3}-\frac{\sqrt{3}r^2}{4}\right)=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$$

而中下兩圓的接觸面積為：

$$A_{中下}=2\left(r^2\cos^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}r^2}{16}\right)$$
$$=\left(2\cos^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)r^2$$

故最小面積和為：

$$A_{上中}+A_{中下}=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)r^2$$

將相關的數值代入，得

$$\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)r^2\cong 1.682r^2\cong 1.7r^2$$

即$a=1.7$。

十四、(19) $\sqrt{L}$

解：

每一瞬間冰塊所受摩擦力為$mg\mu$，其中$m = m(t)$為冰塊的質量，是隨時間減少。已知摩擦力所作的功全轉換為熔解所需的熱(及所有其他水與桌面的作用)，就單位時間內摩擦力做的功(即功率)等於單位時間內冰融化所需的熱，加上同等值量的水動能的變化，故

$$mg\mu \times v = -\frac{dm}{dt} \times L$$

$$mg\mu = -\frac{dm}{dt} \times \left(\frac{L}{v}\right) \qquad (1)$$

由牛頓第二定律知，所受淨力必須等於動量的時變率，即：

$$-mg\mu = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt} \times v \qquad (2)$$

由上(1)和(2)式比較得 $v^2 = L$，故$v = \sqrt{L}$ 。

(20) $\underline{\dfrac{\sqrt{L}}{g\mu}\ln 2}$

解：

由(19)題的(2)式討論知：$-mg\mu = \frac{dm}{dt} \times \sqrt{L}$，所以$\frac{dm}{m} = -\frac{g\mu}{\sqrt{L}}dt$ ，積分後得

$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{g\mu}{\sqrt{L}}dt$，因此質量隨時間的變化等於

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{g\mu}{\sqrt{L}}t\right) \text{。}$$

設質量減半需時$t_{1/2}$ ，即

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{g\mu}{\sqrt{L}}t_{1/2}\right) \text{，}$$

故解得時間$t_{1/2}$為$\frac{\sqrt{L}}{g\mu}\ln 2$ 。

十五、(21) $\underline{\quad 1 \quad}$

解：

理想氣體的內能僅與氣體的絕對溫度 T 有關，而汽缸與活塞均為剛體，在等溫下其內能不隨壓力而變，故在等溫的條件下，由熱力學第一定律可得系統的內能變化$\Delta U = Q - W = 0$，即$Q = W$ ，故$Q / W = 1$。

(22) $\underline{nRT\ln\dfrac{V_2}{V_1} - \dfrac{f}{A}(V_2 - V_1)}$

解：

設體積為 V_1 時，壓力 p_1 ；體積為 V_2時，壓力為 p_2，為依據理想氣體方程式：

$$p_1V_1 = p_2V_2 = nRT$$

假設外界對系統的作用力為F，當氣體體積緩慢膨脹時，活塞於氣體膨脹過程中的各點，可視為處於靜力平衡，故作用於活塞的合力為零(如下圖)，即

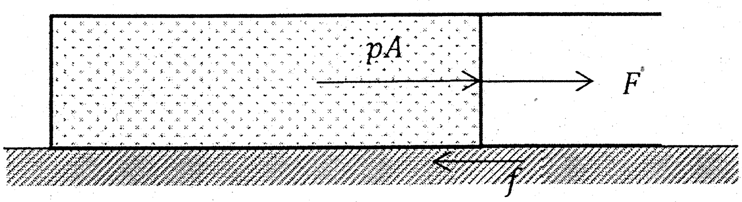
$$F - f + pA = 0 \qquad \text{(以膨脹方向的位移為正)}$$

而系統對外界的反作用力為：$-F = pA - f$，故得系統對外界所作之功W為

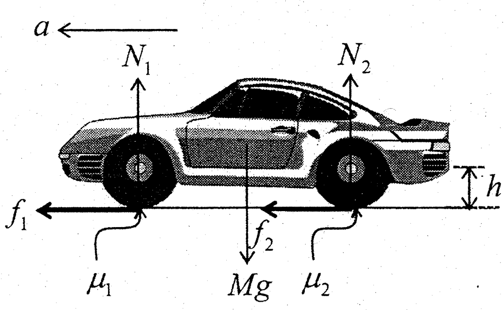
$$W = \int_{V_1}^{V_2} (pA - f)\frac{dV}{A} = \int_{V_1}^{V_2} \left(p - \frac{f}{A}\right) dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT}{V} - \frac{f}{A}\right) dV$$

故

$$W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{f}{A}(V_2 - V_1)$$



十六、(23) $M\left(\frac{g}{2} + \frac{ah}{d}\right)$



解：

由正向力的平衡知：　$Mg = N_1 + N_2$。

車的加速為 a 時，考慮力矩 (以車子後輪與地面瞬間接觸處為參考點)：

$$\frac{Mgd}{2} - N_1d = Mah$$

得

$$N_1 = M\left(\frac{g}{2} - \frac{ah}{d}\right) \quad ,$$

同理

$$N_2 = Mg - N_1 = M\left(\frac{g}{2} + \frac{ah}{d}\right) \quad 。$$

(24) $\frac{(\mu_1 + \mu_2)g}{2[1 - (\mu_2 - \mu_1)\,h/d]}$

解：

車的加速為 a_M 時，前後車輪與地面的接觸點，都恰達到維持純滾動的臨界點，即以最大靜摩擦力進行純滾動，此時：

$$f_1 \le \mu_1 N_1 = \mu_1 M\left(\frac{g}{2} - \frac{a_M h}{d}\right)$$

$$f_2 \le \mu_2 N_2 = \mu_2 M\left(\frac{g}{2} + \frac{a_M h}{d}\right)$$

由上兩式推知

$$\mu_1 M\left(\frac{g}{2} - \frac{a_M h}{d}\right) + \mu_2 M\left(\frac{g}{2} + \frac{a_M h}{d}\right) = M a_M$$

推知 a_M 等於

$$a_M = \frac{(\mu_1 + \mu_2)g}{2[1 - (\mu_2 - \mu_1)\,h/d]}$$

十七、(25) 總動量

解：

細繩張緊前後之極短瞬間，滑輪對系統之作用力由無到有，在極短的時間內有力的變化，因此其衝量不為零，故總動量不守恆。繩子對滑輪的正向力通過滑輪中心，沒有力矩；又極短時間內質量m受重力產生的衝量可忽略，即重力產生的角衝量為零，故總角動量守恆。因重力為保守力，滑輪對細繩不做功，故總力學能守恆。

(26) $\sqrt{2gh} - \frac{M}{m}V$

解：

在細繩張緊前之瞬間，m的下落速度 v 可依據力學能守恆定律求出：

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{2gh}$$

若在細繩張緊後之瞬間，m的速度為v'，則依據相對於 O 的角動量守恆定律，可得：

$$rmv = rmv' + rMV$$

故得

$$v' = v - \frac{M}{m}V = \sqrt{2gh} - \frac{M}{m}V$$

註：當細繩拉緊之時間足夠，兩者會有相同的速度v''。

十八、(27) $\frac{1}{4}mv^2$

解：

設碰撞前 B 質點的速度為 v_B，則且 B 和 C 的質心速度為$3v/2$，故

$$\frac{3v}{2}=\frac{mv_B+m(v_B+v)}{2m} \quad \rightarrow \quad 3v=2v_B+v \quad ,$$

可解出$v_B=v$，故在碰撞之前B與C的速度各為v與$2v$，兩者均向右運動。
氫原子與氫分子之間的碰撞是由A與B質點之碰撞達成，因為氫原子可被視為質點，而質點間之碰撞皆為彈性碰撞。
因為A與B質量相同，且為彈性碰撞，故碰撞後A的速度由$2v$變成為v，而B的速度由v轉變成為$2v$。因此碰撞後，B與C的速度都是$2v$，因此氫分子之質心速度為$2v$。因碰撞前氫分子之質心速度為$3v/2$，故氫原子與氫分子之質心總動能的改變為

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(2m)(2v)^2-\frac{1}{2}m(2v)^2-\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{3v}{2}\right)^2=\frac{1}{4}mv^2$$

(28) $2v+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}$

因碰撞後，B與C相對速度為0，故x即為B與C相對運動的最大振幅，故

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_{max}^2$$

因C相對質心之最大速度為$v_{max}=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}$，故碰撞後C的最大速度為$2v+\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}$。

十九、(29) $\frac{8V_0}{a^2}$

解：

(a)由泰勒展開式，可以將$V(x)=V_0\left(e^{-4\frac{x}{a}}-2e^{-2\frac{x}{a}}\right)$展開至$x^2$，故

$$V(x)\approx V_0\left[1-4\frac{x}{a}+\frac{16}{2!}\frac{x^2}{a^2}-2\left(1-2\frac{x}{a}-\frac{4}{2!}\frac{x}{a}\right)\right]$$

因此可以得$V(x)\approx -V_0+\frac{4V_0}{a^2}x^2$。所以$k=\frac{8V_0}{a^2}$

(30) 924

解：

(b) 由(a)之結果，得知$k=\frac{8V_0}{a^2}$是碳—碳鍵的力常數，代入楊氏係數的公式，得

$$Y=N\times\frac{8V_0}{a^2}\times\frac{a}{A}=N\frac{8V_0}{a\pi r^2} \qquad (1)$$

其中 N 為平行於軸的碳一碳鍵結數目，r為奈米碳管的半徑，且依照圖上的周長，得 $2\pi r = 10\sqrt{3}\,a$，故

$$r = \frac{10\sqrt{3}\,a}{2\pi} = \frac{5\sqrt{3}\,a}{\pi} \tag{2}$$

(2)式代入(1)式，則楊氏係數等於

$$Y = N\frac{8V_0}{a\pi r^2}Y = N\frac{8\pi V_0}{75a^3}$$

由圖知$N = 10$，將$V_0 = 4.93$ 電子伏特 ，$a = 0.142\ \text{nm}$ ，代入上式得 Y 等於

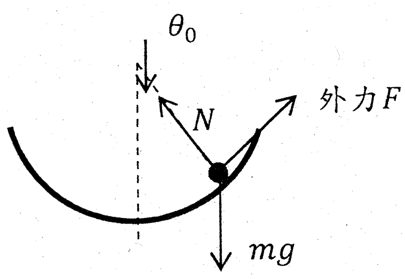
$$Y = 10 \times \frac{8\pi(4.93 \times 1.602 \times 10^{-19})}{75(0.142 \times 10^{-9})^3} = 924.3\ \text{GPa}。$$

貳、計算題(每題 15 分，共二題，合計 30 分)

一、一維簡諧運動

(1) 當考慮質點受力作用時，

質點受到平行碗面的外力F，而保持平衡在θ_0處，則重力在碗面方向的分力與所施外力洽抵消，$F = mg\sin\theta_0$，而重力在垂直碗面方向的分力則與碗面對質點的正向力N抵消：$N = mg\cos\theta_0$。



當考慮碗的受力作用時，

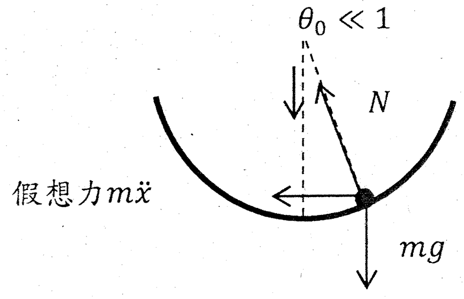
質點對碗面施以上述正向力的反作用力 N(垂直於碗面)，彈簧對碗施以彈力，碗的總受力必須為零，因此在水平方向可以得到：

$$kx_0 = Nsin\theta_0 = mg\cos\theta_0 sin\theta_0 \tag{1}$$

即 $x_0 = \frac{mg}{k}\cos\theta_0 sin\theta_0$ 。

(2) 當外力消失，質點受到沿碗面方向的淨力而在碗中向下滑動。選擇在碗的靜止座標系來進行討論。在此加速座標系中，質點會受到一個水平的假想力：$-m\ddot{x}$。質點在垂直於碗面的方向的運動，必須有提供圓周運動的向心加速度，因此：

$$N + m\ddot{x} \times \sin\theta = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 \tag{2}$$



但在小角度運動條件下：$\theta \ll 1$，角速度$\dot{\theta}$也很小，所以$N \approx mg$。

因為碗的質量可以忽略，它的總受力永遠為零。因此在水平方向可以得到：

$$kx = N\sin\theta \approx mg\cos\theta\sin\theta \approx mg\theta \tag{3}$$

上式 $kx \cong mg\theta$ 在運動過程中一直保持著。（這個關係與起始狀態所滿足的關係在小角度近似下是一致的，因此起始狀態會很平滑的進入以下的簡諧運動。）

質點沿碗面方向的運動，沿碗面質點的總受力為

$$-mg\sin\theta - m\ddot{x}\cos\theta \approx -mg\theta - m\ddot{x} \tag{4}$$

在角度座標中，θ 滿足方程式：

$$mR\ddot{\theta} \approx -mg\theta - m\ddot{x} \tag{5}$$

且 $k\ddot{x} = mg\ddot{\theta}$，故

$$\left(R + \frac{mg}{k}\right)\ddot{\theta} = -g \cdot \theta \tag{6}$$

因為 $\theta = \theta_0\cos\omega t$，由(6)式可以求得角頻率$\omega$等於

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}} \tag{7}$$

(3) 當以外力消失，經過t的時間後，$\theta = \theta_0\cos\omega t$，微分$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0\frac{d}{dt}\cos\omega t$，可得質點相對於碗的速度$V_1$為

$$R\,\frac{d\theta}{dt} = V_1 = -R\theta_0\omega\sin\omega t$$

即

$$V_1 = -R\theta_0\sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}}\sin\sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}}\,t\ 。 \tag{8}$$

碗相對於地的運動速度V_2可以由$kx \cong mg\theta$求得，即$V_2 = \dot{x}$，故

$$V_2 = \dot{x} = \frac{mg}{k}\dot{\theta} = -\frac{mg}{k}\left[\theta_0\sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}}\sin\sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}}\,t\right] \tag{9}$$

結合(8)和(9)，得質點相對於地的速度$V = V_1 + V_2$，即為

$$V = -\left(\frac{mg}{k} + R\right)\left[\theta_0 \sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}} \sin \sqrt{\frac{g}{R + \frac{mg}{k}}} t\right] \tag{10}$$

二、量測大氣壓力

(1) 由圖 12 之斜率為 0.02，而截距為 20 公分，因此線性關係為：$H = 20 + 0.02\, h$，所以$a = 20$和 $b = 0.02$。

(2) 玻璃管內氣體的壓力P等於

$$P = P_{atm} - \rho g h \tag{1}$$

其中P_{atm}為大氣壓力，ρ為水的密度，g為重力加速度。因為是等溫過程，因此

$$P(H \times 1\, cm^2) = P_{atm}(L - h_0) \times 1\, cm^2, \tag{2}$$

由(1)和(2)是可以得

$$H = (L - h_0) \times \frac{P_{atm}}{P_{atm} - \rho g h} = (L - h_0)\frac{1}{1 - \frac{\rho g h}{P_{atm}}}, \tag{3}$$

因為$P_{atm} \gg \rho g h$，即 $\frac{\rho g h}{P_{atm}} < \frac{1}{30}$，故由二項式近似展開，得

$$H = (L - h_0) + (L - h_0)\frac{\rho g}{P_{atm}} h, \tag{4}$$

因此兩者的表示式為： $a = (L - h_0)$ 和 $b = (L - h_0)\frac{\rho g}{P_{atm}}$ 。

(3) 由上述(1) 和(2) 的結果得$20\text{ cm} = L - h_0$，所以$h_0 = 40\text{ cm}$ 。

(4) 依據(4)式和圖 2 之實驗結果，知截距等於$L - h_0 = 20\text{ cm} = 0.2\text{ m}$。
圖 12 中的斜率等於 0.02，即

$$0.02 = 0.2\, \frac{\rho g}{P_{atm}}, \tag{5}$$

$$P_{atm} = 0.2 \times \frac{\rho g}{0.02} = 0.2 \times \frac{1000 \times 9.8}{0.02}\left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right), \tag{6}$$

由(6)式得大氣壓力為$P_{atm} = 98000\, N/m^2$，即為 98kPa。
另解：由(3)是代入已知的相關數值(或實驗值)，可以解得$P_{atm} = 98980\, N/m^2$。

(5) 由(4)式知，H 和 h兩者成正比，當空氣為最大值$H_{\max}$時，水柱也是最大值$h_{\max}$，且 $H_{\max} + h_{\max} = L$，故

$$H_{\max} = L - h_{\max} = (L - h_0) + (L - h_0)\frac{\rho g}{P_{atm}} h_{\max},$$

故得

$$h_{\max} = \frac{h_0}{1 + (L - h_0)\frac{\rho g}{P_{atm}}} = \frac{h_0 \times P_{atm}}{P_{atm} + (L - h_0)\rho g},$$

代入數值，可以得水柱的最大值。

$$h_{\max} = \frac{0.4 \times 98000}{98000 + 0.2 \times 1000 \times 9.8} = \frac{0.4}{1.02} \approx 0.39 \text{ m} \quad ,$$

空氣柱的最大值是 0.21 m。

另解：由(1)所得之線性方程式，$H_{max} = 20 + 0.02\, h_{max}$，和$H_{max} + h_{max} = 60$，

聯立解得$h_{\max} \approx 0.39$ m，$H_{\max} \approx 0.21$ m。